UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Bo Styf

Linjär algebra II
Q, KandFy m.fl.
Höstterminen 2008

Lösningar till tentamen i linjär algebra II, 2008-10-17

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,-2,1,2)$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,1,-2)$, $\mathbf{u}_4 = (1,1,2,3)$, $\mathbf{u}_5 = (1,2,2,2)$. Bestäm en bas i M bland dessa vektorer och bestäm även $a \in \mathbb{R}$ så att vektorn $\mathbf{v} = (a,1,-1,3)$ tillhör M. Ange för ett sådant a-värde koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den valda basen.

Lösning. Vi löser båda delarna av uppgiften samtidigt. En vektor v ur $\mathbb{R}^4$ tillhör M omm det finns reella tal $\lambda_1, ..., \lambda_5 \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 + \lambda_4\mathbf{u}_4 + \lambda_5\mathbf{u}_5 = \mathbf{v}$$

Detta är ekvivalent med att det linjära ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

har någon lösning.

Vi löser ekvationssytemet med hjälp av Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \boxed{2}+\boxed{1} \\ \boxed{3}-\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{1} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 3-a \end{array}\right) \begin{array}{l} \boxed{1}-\boxed{3} \\ (\boxed{2}+\boxed{4})/4 \\ \boxed{4}-2\boxed{3} \\ \boxed{4}\leftrightarrow\boxed{2} \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2a+1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{1}-\boxed{2} \\ \longmapsto \\ \\ \boxed{4}-\boxed{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & a-4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right)$$

Detta system är lösbart omm $a+2=0$ dvs. om och endast om $a=-2$. Det följer att

$$\mathbf{v} = (a,1,-1,3) \in M \quad \Leftrightarrow \quad a=-2 \qquad .$$

Dessutom är $\dim M = \text{rang (koeff.matrisen)} = 3$.

I den sista matrisen har vi pivotelement i kolonn 1, 2 och 4 vilket medför att $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$ utgör en bas i M.

Antag nu att $a = -2$. Den sista matrisen är då

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi kan här direkt avläsa att

$$(-6)\,\mathbf{u}_1 + 3\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = \mathbf{v}$$

om $a = -2$.

Svar: $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4)$ utgör en bas i M (t.ex.). $v \in M \Leftrightarrow a = -2$. Om $a = -2$: $\mathbf{v} = (-6)\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 = (-6, 3, 1)_{\mathcal{U}}$.

$\square$

2. Antag att $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ medan $\mathbf{v}$ har koordinatvektorn $(1, -1, 1)$ med avseende på basen $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 2, 3)$. Bestäm koordinaterna för $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ med avseende på (a) standardbasen, (b) basen $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$.

Lösning. Vi har alltså $\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = (1, 1, 1) - (1, 2, 2) + (2, 2, 3) = (2, 1, 2)$, vilket ger $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = (1, -1, 1) - (2, 1, 2) = (-1, -2, -1)$ (standardkoordinaterna). För att finna koordinaterna för $\mathbf{w}$ i basen $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ löser vi ekvationssystemet $\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{w}$. På matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Alltså gäller $\mathbf{w} = (-2, -1, 1)_{\mathcal{B}}$.

Svar: $\mathbf{w} = (-1, -2, -1) = (-2, -1, 1)_{\mathcal{B}}$.

$\square$

3. M är ett delrum till $\mathbb{E}^4$ som definieras genom

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\}$$

Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet $M^{\perp}$, till M. Skriv vektorn $\mathbf{w} = (0, 0, 0, 1)$ som en summa $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, där $\mathbf{u} \in M$ och $\mathbf{v} \in M^{\perp}$.

Lösning. Koefficienterna framför $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ i de båda ekvationerna ger oss direkt en bas $\mathbf{u}_3 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{u}_4 = (1,2,1,4)$ i $M^\perp$. En ortogonalbas $\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4$ i $M^\perp$ fås med Gram-Schmidt's metod: $\mathbf{b}_3 = \mathbf{u}_3 = (1,1,1,1)$,

$$\mathbf{b}_4' = \mathbf{u}_4 - \frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = (1,2,1,4) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) = (-1,0-1,2)$$

$\mathbf{b}_4 = -\mathbf{b}_4' = (1,0,1,-2)$. Genom att normera dessa vektorer får vi ON-basen $(1/2,1/2,1/2,1/2),\ (1/\sqrt{6},0,1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$ i $M^\perp$.

Vi börjar med att beräkna $\mathbf{v}$, d.v.s. ortogonala projektionen av $\mathbf{w}$ på $M^\perp$:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 + \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_4}{\mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{b}_4}\mathbf{b}_4 = \frac{1}{12}[(3,3,3,3) - (4,0,4,-8)] = \frac{1}{12}(-1,3,-1,11).$$

Slutligen får vi $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \frac{1}{12}(1,-3,1,1)$.

Svar: En ON-bas i $M^\perp$ är $(1/2,1/2,1/2,1/2),\ (1/\sqrt{6},0,1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$.
$\mathbf{u} = \frac{1}{12}(1,-3,1,1)$ och $\mathbf{v} = \frac{1}{12}(-1,3,-1,11)$.

□

4. Bestäm standardmatrisen för den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ som geometriskt kan beskrivas som en ortogonal projektion på planet $x - y + z = 0$.

Lösning. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (1,-1,1)$ som spänner upp ett endimensionellt delrum N till $\mathbb{E}^3$. Standardmatrisen Q för den ortogonala projektionen på N ges av

$$Q = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n}\,\mathbf{n}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Standardmatrisen P för F ges då av

$$P = I - Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Svar: Se ovan.

□

5. Visa att ekvationen $x^2 - 3y^2 + 4yz = 1$ beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxeln samt minsta avståndet från ytan till origo.

Lösning. Den kvadratiska formen i vänsterledet har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[\lambda^2 + 3\lambda - 4] = (1-\lambda)^2(-4-\lambda)$$

Alltså $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$. Ytans ekvation i principalkoordinaterna är därför $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 4\tilde{z}^2 = 1$, varav framgår att ytan är en enmantlad rotationshyperboloid med rotationsaxeln parallell med $\mathbf{v}_3$. Avståndet till origo är 1. Vid beräkningen av $\mathbf{v}_3$ är det enklast att betrakta ekvationssystemet för $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 0 = 2y - z \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Då $\mathbf{v}_3$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ följer av ovanstående ekvation att $\mathbf{v}_3 = (0, 2, -1)/\sqrt{5}$. Rotationsaxeln är alltså den räta linjen med ekvationen $(x, y, z) = t(0, 2, -1)$.

Svar: Ytan är en enmantlad rotationshyperboloid med minsta avståndet 1 till origo. Rotationsaxeln är den räta linjen med ekvationen $(x, y, z) = t(0, 2, -1)$.

□

6. Lös systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = 4y_1(t) - 2y_2(t) \end{cases}$$

där $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -2$.

Lösning. På matrisform kan systemet skrivas $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Egenvärdena till A ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (2-\lambda)(-1-\lambda)$$

Alltså $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 0 = y_1 - y_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & \\ 4 & -1 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 0 = 4y_1 - y_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

För matrisen

$$P = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{med inversen} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gäller då att $P^{-1}AP = D$, där D är diagonalmatrisen med egenvärdena 2, -1 i diagonalen. Genom transformationen $\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t)$ fås systemet $\mathbf{z}'(t) = D\mathbf{z}(t)$, d.v.s. $z_1'(t) = 2z_1(t)$, $z_2'(t) = -z_2(t)$, med lösningen $z_1(t) = c_1e^{2t}$, $z_2(t) = c_2e^{-t}$. Här gäller att

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{y}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vilket slutligen ger oss lösningen

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & - & e^{-t} \\ 2e^{2t} & - & 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

Svar: $y_1(t) = 2e^{2t} - e^{-t}$, $y_2(t) = 2e^{2t} - 4e^{-t}$.

$\square$

7. Den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ har standardmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1+a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(i) För vilka $a \in \mathbb{R}$ finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F? Ange i förekommande fall en sådan bas.

(ii) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar? Ange i förekommande fall en bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning. (i) F har en ON-bas av egenvektorer precis då A är symmetrisk, vilket inträffar om och endast om $a = 0$. Då gäller att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)(2-\lambda)(0-\lambda)$$

Alltå gäller $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. En ON-bas av egenvektorer ges av

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 0 = x - z \\ 0 = y \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 0 = x \\ 0 = z \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respektive

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 0 = x + z \\ 0 = y \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) I de återstående fallen ($a \neq 0$) ges egenvärdena av

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1+a \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1-a & 0 & 1+2a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[\lambda^2 - 2(1+a)\lambda + 2a + a^2] = (1-\lambda)(2+a-\lambda)(a-\lambda)$$

Alltså har vi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + a$, $\lambda_3 = a$. Egenvärdena är distinkta då $a \notin \{1, -1\}$, vilket medför att F är diagonaliserbar för dessa a–värden.
Egenvektorerna, då $a \neq \pm 1$, ges av de på matrisform skrivna ekvationssystemen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 2a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = 2a^2 t \\ y = (1-a^2)t \\ z = (a^2 - a)t \end{cases}$$

t.ex. $\mathbf{v}_1 = (2a^2, 1-a^2, a^2-a)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-a & a & 1+a & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & -a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

t.ex. $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, respektive

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & a & 1+a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 1+a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = (a+1)t \\ y = 0 \\ z = (a-1)t \end{cases}$$

t.ex. $\mathbf{v}_3 = (a+1, 0, a-1)$.
Då $a = 1$ ges egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ av

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Då $a = -1$ ges egenvektorerna till $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ av

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

I båda fallen har egenrummet dimension 1, vilket betyder att F ej är diagonaliserbar för $a = \pm 1$.

$\square$

8. Den linjära operatorn F på $\mathbb{R}^n$ har standardmatrisen A som uppfyller $A^2 = I$, där I är enhetsmatrisen. Visa att F är diagonaliserbar, d.v.s visa att det finns en bas i $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning. Om $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ är en egenvektor till F, hörande till egenvärdet λ, gäller att

$$\mathbf{x} = I\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

så vi måste ha $1 = \lambda^2$. De enda möjliga egenvärdena är alltså $\lambda = \pm 1$. Låt

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\} \quad \text{och} \quad N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid F(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\}$$

vara motsvarande egenrum.

Varje vektor $\mathbf{x}$ kan skrivas

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + A\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - A\mathbf{x}) = \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

där $\mathbf{u} = (\mathbf{x} + A\mathbf{x})/2 \in M$, ty $F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{x} + A\mathbf{x})/2 = (A\mathbf{x} + A^2\mathbf{x})/2 = \mathbf{u}$, och $\mathbf{v} = (\mathbf{x} - A\mathbf{x})/2 \in N$, ty $F(\mathbf{v}) = A(\mathbf{x} - A\mathbf{x})/2 = (A\mathbf{x} - A^2\mathbf{x})/2 = -\mathbf{v}$. En bas i M tillsammans med en bas i N bildar alltså en bas i $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till F. $\square$