UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
L. Abrahamsson 0702-353722
4713205

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammet
ES
Enstaka kurs
Linjär algebra
2005–03–22

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.
Observera: Duggor och inlämningsuppgifter kan endast tillgodoräknas av dem som läste kursen i period 3 våren 2005.
Tentamensresultatet, och förslag till lösningar, kommer att finnas tillgängligt senast torsdag 24/3.

Följande två problem löses endast om motsvarande duggor ej är godkända.

1. Bestäm dimensionerna hos radrummet, kolonnrummet och nollrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Låt M vara det delrum av $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)$ och $\mathbf{u}_2 = (1,1,0,0)$. Skriv vektorn $\mathbf{v} = (1,2,3,-5)$ som en summa $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1 \in M$ och $\mathbf{v}_2 \in M^{\perp}$.

Följande sex problem löses av alla och envar.

3. Låt $\mathbf{u} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in \mathbb{E}^3$. Bestäm en ON–bas $\mathcal{B}$ i $\mathbb{E}^3$ sådan att $\mathbf{u}$'s koordinatvektor i basen $\mathcal{B}$ är $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = (0,1,0)$.

4. Låt $M = \text{span}\{(1,1,1,1),(1,1,0,0)\}$ och låt $\text{proj}_M : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ vara ortogonala projektionen på M. Bestäm matrisen för proj_M i standardbasen i $\mathbb{E}^4$. Vad blir $\text{proj}_M(1,2,3,-5)$?

5. Låt $G : P_2 \to P_2$ vara avbildningen $F(p(x)) = x^2p''(x) + (x-2)p'(x)$.

a) Visa att F är linjär.
b Bestäm F's matris i basen $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ i P_2.
c) Bestäm baser i F's nollrum och värderum.

Var god vänd!

6. För vilka värden på den reella parametern b är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} b & b & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4b & -1 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar?

7. Undersök om

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz = 4$$

beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm i så fall en riktningsvektor för rotationsaxeln. Bestäm minsta avståndet från ytan till origo, även om det inte är en rotationsyta.

8. Kryssprodukten mellan två vektorer $\mathbf{u} = (x, y, z)$ och $\mathbf{v} = (x', y', z')$ i $\mathbb{E}^3$ definieras (som bekant) av determinanten

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix},$$

där $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ och $\mathbf{k}$ är vektorerna i standardbasen i $\mathbb{E}^3$. Låt nu $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ och definiera $K : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ genom $K(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Då är K linjär (detta behöver inte visas).

a) Bestäm K's matris i standardbasen i $\mathbb{E}^3$.

b) Bestäm baser i K's värderum och nollrum.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i Linjär algebra 2005–03–22

1. Radrummet och kolonnrummet har båda dimension = rangen hos A, som via elementära radoperationer beräknas till 2. Dimensionssatsen ger sedan att dimensionen hos nollrummet är $5-2=3$.

2. Bestäm först en ON-bas i M med hjälp av Gram–Schmidt. En sådan är $\mathbf{f}_1 = (1,1,0,0)/\sqrt{2}$ och $\mathbf{f}_2 = (0,0,1,1)/\sqrt{2}$. Därefter beräknas $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_1)\mathbf{f}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_2)\mathbf{f}_2 = (3,3,-2,-2)/2$, och $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}-\mathbf{v}_1 = (-1,1,8,-8)/2$.

3. Låt $\mathbf{v} = (a,b,c)$ och bestäm a,b och c så att $\mathbf{v}\cdot\approxeq = (a+b+c)/\sqrt{3} = 0$. Detta ger att $c=-a-b$, det vill säga $\mathbf{v} = (a,b,-a-b) = (a(1,0,-1)+b(0,1,-1)$. Gram-Schmidt ger två ortonormerade vektorer $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1)/\sqrt{2}$ och $\mathbf{v}_3 = (-1,2,-1)/\sqrt{6}$. Välj nu som ON–bas $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}$ och $\mathbf{v}_3$.

4.

5. a) F linjär: Låt $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ och $p,q\in P_2$. Då är

$$F(\alpha p(x)+\beta q(x)) = x^2(\alpha p+\beta q)''(x) + (x-2)(\alpha p+\beta q)'(x) =$$

$$= x^2\alpha p''(x) + x^2\beta q''(x) + (x-2)\alpha p'(x) + (x-2)\beta q'(x) =$$

$$\alpha(x^2p''(x)+(x-2)p'(x)) + \beta(x^2q''(x)+(x-2)q'(x)) = \alpha F(p(x)) + \beta F(q(x)),$$

vilket visar att F är linjär.

b) F's verkan på basvektorerna:

$$\begin{cases} F(1) = & 0 = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x) = & x-2 = & (-2)\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 \\ F(x^2) = & 2x^2+(x-2)2x = & 0\cdot 1 + (-4)\cdot x + 4\cdot x^2 \end{cases}$$

Alltså är F's matris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Man ser direkt att bas i A's värderum är $(-2,1,0)$ och $(0,-1,1)$ (multiplicera den sista kolonnen med $1/4$). Dessa är koordinatvektorer till polynomen $-2+x$ respektive $-x+x^2$, så dessa bägge är bas i F's värderum. Nollrummet till A spänns upp av (till exempel) vektorn $(1,0,0)$, som är koordinatvektor till det konstanta polynomet 1. Alltså är polynomet 1 en bas i F's nollrum.

6. Man beräknar $\det(A-\lambda I) = (b-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda) = 0$, vilket ger egenvärdena $\lambda = b$, 5 och -1. För $b\neq -1, 5$ har vi alltså tre skilda egenvärden, och A är därmed diagonaliserbar. För $b=-1$ eller 5 har vi ett egenvärde av multiplicitet 2, och beräkning av egenvektorerna visar, i fallet $b=-1$, att dimensionen hos egenrummet hörande till $\lambda=-1$ är ett, och i fallet $b=5$ är dimensionen hos egenrummet hörande till $\lambda=5$ två är 1. Alltså är A diagonaliserbar för alla $b\neq -1$..

7. Man beräknar egenvärdena till den symmetriska matrisen hörande till den kvadratiska fromen, till $\lambda = 2$ (multiplicitet 2) och $\lambda = -4$. Ett egenvärde med multiplicitet 2 ger att det är en rotationsyta (enmantlad hyperboloid i detta fall). I ON–basen av egenvektorer blir den kvadratiska formen

$$2hatx^2 + 2haty^2 - 4hatz^2 = 4.$$

Minsta avstånd till origo fås för $\hat{z} = 0$, och vi ser att $2hatx^2 + 2haty^2 = 4$ beskriver en cirkel med radie $\sqrt{2}$. Rotationsaxeln är riktad i den riktning som ges av en egenvektor hörande till $\lambda = -4$. En sådan beräkans till $(1, 2, 1)$.

8. a) Man beräknar K's verkan på (standard)basvektorern, och får att K's matris är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Nollrummet blir $\text{span}\{(1, 1, 1)\}$ och värderummet $\text{span}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$.