UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Styf 0707-253107

Prov i matematik
för programmen
EI, IT, K, X
Linjär algebra
2005–06–07

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Delrummet M av $\mathbb{R}^4$ spänns upp av vektorerna $u_1 = (1,3,4,3)$, $u_2 = (1,2,3,2)$, $u_3 = (3,10,13,10)$, $u_4 = (1,5,6,5)$. Bestäm en bas i M och bestäm även $a \in \mathbb{R}$ så att vektorn $w = (a+2, 2a+5, 4a+6, 3a+4)$ tillhör M. Ange för ett sådant a-värde koordinaterna för w i den valda basen.

2. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en bas i det linjära rummet $\mathbf{L}$. Visa att

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

är en ny bas. Ange koordinaterna för $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ i den nya basen.

3. N är ett delrum till $\mathbb{E}^4$ som definieras genom

$$N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid x_1 - x_2 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$$

Bestäm en ON-bas i det ortogonala komplementet $N^\perp$, till N. Skriv vektorn $w = (2,3,4,1)$ som en summa $w = u + v$, där $u \in N$ och $v \in N^\perp$.

4. Bestäm standardmatrisen för den linjära operatorn F på $\mathbb{E}^3$ som geometriskt kan beskrivas som en ortogonal projektion på planet $2y - z = 0$.

5. Visa att ekvationen $5x^2 - 3y^2 - 8yz + 3z^2 = 1$ beskriver en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$. Bestäm ytans typ, rotationsaxeln samt minsta avståndet från ytan till origo.

6. Låt F vara den linjära operatorn på $\mathbb{R}^3$ med standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2a+2 \\ 6 & -4 & 3a+3 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

(a) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är F diagonaliserbar?

(b) Visa att F är diagonaliserbar då $a = 0$. Bestäm, då $a = 0$, en diagonalmatris D och en inverterbar matris T sådana att $A = TDT^{-1}$.

Var god vänd!

7. Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara det linjära rummet av alla reella (2×2)-matriser. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Den linjära avbildningen $F : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definieras genom $F(X) = AX - XA$. Finn en bas i F:s nollrum.

8. A, B, T och D är kvadratiska matriser av ordning 2005, sådana att B, T är inverterbara och

$$D = T^{-1}ABT$$

Bevisa att det finns en inverterbar matris S sådan att

$$D = S^{-1}BAS.$$

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i Linjär algebra 2005–06–07

1. u_1, u_2 är en bas i M. $w \in M$ bara då $a = 1$, i vilket fall kordinaterna för w i basen u_1, u_2 är $1,\ 2$.

2. Koordinaterna i den nya basen är $-5,\ 0,\ 2$.

3. En ON-bas i $N^{\perp}$ är t ex $(1,-1,0,-1)/\sqrt{3}$ och $(1,0,1,1)/\sqrt{3}$. $u = (1,7,5,-6)/3$, $v = (5,2,7,9)/3$.

4.

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Ytan är en enmantlad (rotations-)hyperboloid. Rotationsaxeln går genom origo och är parallell med vektorn $(0,2,1)$. Minsta avståndet till origo är $1/\sqrt{5}$.

6. F är diagonaliserbar då $a \neq 2$. Då $a = 0$ gäller att $A = TDT^{-1}$, där

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. En bas i F:s nollrum är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$