UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ryszard Rubinsztein 471-3226

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
F, Q, W
Enstaka kurs
LINJÄR ALGEBRA
2006–12–21

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger max 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Låt M vara det delrum till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, -1, 3, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1, -2)$, $u_3 = (3, 3, -5, -5)$, $u_4 = (1, 3, -2, 1)$ och $u_5 = (3, -4, 7, -1)$.

(i) Finn en bas i M *bland de givna vektorerna.*

(ii) Avgör för vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (1,\ a - 1,\ 1 - 3a,\ 5)$ delrummet M. För dessa värden av a bestäm även koordinaterna för vektorn v i den bas i M som du har valt i del (i) av uppgiften.

2. Låt $F : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder en rotation i rummet med vinkeln π kring axeln $(x_1, x_2, x_3) = (t, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

3. (a) Ge definitionen av en transformationsmatris från en bas till en annan bas i ett linjärt rum.

(b) Givna är två baser i $\mathbb{R}^2$: en bas $\mathbf{u}$ bestående av vektorerna $u_1 = (1, 1)$ och $\mathrm{u}_2 = (2, -1)$ och en bas $\mathbf{v}$ bestående av vektorerna $v_1 = (-5, 2)$ och $v_2 = (3, -1)$. Finn transformationsmatrisen från basen $\mathbf{u}$ till basen $\mathbf{v}$.

(c) Låt $\mathcal{P}_2$ vara rummet av alla reella polynom $p(x)$ av grad högst 2. Finn transformationsmatrisen från basen $\mathbf{p}$ som består av polynomen $p_1(x) = 1 - x^2$, $p_2(x) = x + 2x^2$ och $p_3(x) = 1 + 2x + x^2$ till basen $\mathbf{q}$ som består av polynomen $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x$, $q_3(x) = x^2$.

4. Låt N vara det delrum till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorn $u = (1, 2, 0, 2)$. Låt $P_1 : \mathbb{E}^4 \longrightarrow \mathbb{E}^4$ vara den ortogonala projektionen av $\mathbb{E}^4$ på N och låt $P_2 : \mathbb{E}^4 \longrightarrow \mathbb{E}^4$ vara den ortogonala projektionen av $\mathbb{E}^4$ på $N^{\perp}$. Finn både P_1:s och P_2:s matriser i standardbasen.

V.g.v!

5. En andragradsyta i $\mathbb{E}^3$ ges av ekvationen

$$3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 6xz + 2yz = 1 \ .$$

Bestäm ytans typ, det minsta avståndet från ytan till origo och dessa punkter på ytan där det minsta avståndet antas (obs: punkterna skall anges med sina koordinater i standardbasen) .

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Avgör om avbildningen F är diagonaliserbar. Om så är fallet, finn en bas i $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till F samt en matris T som diagonaliserar matrisen A. Ange även den motsvarande diagonala matrisen.

7. I $\mathbb{R}^3$ inför man en skalärprodukt

$$\varphi((x_1, x_2, x_3) \, , \, (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j$$

sådan att vektorerna $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ utgör en ON-bas i $\mathbb{R}^3$ m.a.p. denna skalärprodukt. Bestäm koefficienterna a_{ij} för alla $1 \le i, j \le 3$, dvs. finn Grams matris för skalärprodukten φ i standardbasen.

8. Låt $F : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ vara en **isometrisk** avbildning som i någon bas i $\mathbb{E}^2$ har en matris A med $\det(A) = -1$. Visa att F är en spegling i någon linje genom origo i $\mathbb{E}^2$.

LYCKA TILL!

GOD JUL
och
GOTT NYTT ÅR!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2006–12–21

1. (i) T.ex. $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_4)$.
(ii) $a = -3$. Om $a = -3$: $v = (3,\ -1,\ 0)_{\mathbf{u}}$.

2.

$$[F]_{\mathbf{st}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. (b)

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.

$$[P_1] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \qquad [P_2] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

5. En enmantlad hyperboloid, avståndet till origo är $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, antas i punkterna $P_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1, 0, 1)$.

6. Ja, F är diagonaliserbar.
T.ex.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.

$$A = (a_{ij}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2006–12–21

Lösning till problem 1.

Lösning till problem 2.

Lösning till problem 3.

Lösning till problem 4.

Lösning till problem 5.

Lösning till problem 6.

Lösning till problem 7.

Lösning till problem 8.