UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Ryszard Rubinsztein 471-3226

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
F, Q, W
Enstaka kurs
LINJÄR ALGEBRA
2007–04–19

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger max 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Låt M vara det delrum till $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$M = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \quad \text{och} \quad 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \}.$$

(i) Finn en bas i M.

(ii) Avgör för vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $v = (a, -1, a-4, 2a-3)$ delrummet M. För dessa värden av a bestäm även koordinaterna för vektorn v i den bas i M som du har valt i del (i) av uppgiften.

2. Låt $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder en projektion av rummets vektorer på planet $\pi : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$. Projektionen sker parallellt med linjen $l : (x_1, x_2, x_3) = (t, t, 3t),\ t \in \mathbb{R}$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

3. a) Ge definitionen av en bas i ett linjärt rum.

b) Avgör om vektorerna $u_1 = (1, 2, 1),\ u_2 = (-1, -1, -1),\ u_3 = (2, 1, 2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Bevisa ditt påstående.

c) Avgör om polynomen $p_1(x) = 1 - x + x^2,\ p_2(x) = 1 + x,\ p_3(x) = x + x^2$ utgör en bas i rummet $\mathcal{P}_2$ av alla reella polynom av grad högst 2. Bevisa ditt påstående.

4. Låt N vara det delrum till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 4, 1)$ och $u_3 = (1, -1, -1, 2)$.

(a) Finn en bas i N.

(b) Finn en ON-bas i N.

(c) Bestäm den ortoganala projektionen av vektorn $w = (0, 2, 3, 1)$ på N och avståndet från w till N.

V.g.v!

5. Visa att den andragradsyta i $\mathbb{E}^3$ som ges av ekvationen

$$x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy - 4xz + 4yz = 1 \ .$$

är en rotationsyta. Bestäm ytans typ, dess rotationsaxel och det minsta avståndet från ytan till origo.

6. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Avgör om det finns en ON-bas i $\mathbb{E}^3$ bestående av egenvektorer till F. Bestäm i så fall en **ortogonal** matris T och en diagonal matris D så att $T^{-1}AT = D$.

7. Låt $\mathcal{M}_{2\times 2}$ vara det linjära rummet av alla 2×2-matriser. Låt $F : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$F(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$$

för $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(a) Matriserna $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ utgör en bas i rummet $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Finn F:s matris i denna bas.

(b) Bestäm en bas i F:s nollrum $N(F)$ och en bas i F:s värderum $V(F)$. (Basernas vektorer skall anges som matriser.)

8. (a) Ge definitionen av en symmetrisk avbildning.

(b) I $\mathbb{R}^2$ inför man en skalärprodukt så att vektorerna $u_1 = (1,1)$ och $u_2 = (2,1)$ utgör en ON-bas. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen har matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 2 \end{pmatrix}$. Vilket samband måste de reella konstanterna a och b uppfylla för att avbildningen F skall vara symmetrisk m.a.p. den givna skalärprodukten?

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2007–04–19

1. (i) T.ex. $\mathbf{u} = (\,u_1 = (1,0,1,0),\ u_2 = (4,-1,0,1))\,.$
(ii) $a = 2$. Om $a = 2\ :\quad v = (\,-2,\ 1)_{\mathbf{u}}.$

2.

$$[F]_{\mathbf{st}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. b) Nej.
c) Ja.

4. (a) T.ex. $v_1 = (1,0,1,1),\ v_2 = (0,1,2,-1)\,.$
(b) T.ex. $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1),\ e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{51}}(-1,3,5,-4)\,.$
(c) $w_1 = (1,1,3,0)\,,$ avståndet$= \sqrt{3}\,.$

5. En enmantlad rotationshyperboloid, avståndet till origo är $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Rotationsaxeln: $(x,y,z) = s(1,-1,2),\ s \in \mathbb{R}\,.$

6. Ja.
T.ex.

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. (a)

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En bas i $N(F)\ :\ u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (t.ex.).
En bas i $V(F)\ :\ v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (t.ex.).

8. $5a - 2b = -3\,.$

Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2007–04–19

Lösning till problem 1.

Lösning till problem 2.

Lösning till problem 3.

Lösning till problem 4.

Lösning till problem 5.

Lösning till problem 6.

Lösning till problem 7.

Lösning till problem 8.