UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Volodymyr Mazorchuk
Ryszard Rubinsztein

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
EL, IT, K, X, ES, F, Q, W,
Enstaka kurs
LINJÄR ALGEBRA
2007–08–16

Skrivtid: 09.00 – 14.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng.

1. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 - x_3 - 2x_4).$$

(a) Bestäm F:s matris i standardbasen.

(b) Bestäm en bas i F:s värderum och en bas i F:s nollrum.

2. Låt $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildning som avbildar vektorn $u_1 = (1, 2, 3)$ på vektorn $G(u_1) = (1, 0, 1, 1)$, vektorn $u_2 = (-2, 1, -1)$ på vektorn $G(u_2) = (1, 2, 0, 1)$, och vektorn $u_3 = (2, 5, 6)$ på vektorn $G(u_3) = (3, -1, 1, 2)$. Bestäm G:s matris i standardbasen.

3. (a) Låt $\mathbb{E}$ vara ett euklidiskt rum och M ett delrum till $\mathbb{E}$. Ge definitionen av det ortogonala komplementet till M.

(b) Avgör om vektorn $u = (1, 1, 1)$ tillhör det ortogonala komplementet till det linjära höljet av vektorerna $v_1 = (1, -1, 0)$ och $v_2 = (1, -1, 1)$ i $\mathbb{E}^3$.

(c) Avgör om polynomet $p(x) = x$ tillhör det ortogonala komplementet till det linjära höljet av polynomet $q(x) = x^2$ i det euklidiska rummet $\mathcal{P}_2$ av alla reella polynom $f(x)$ av grad högst 2 med skalärprodukten $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

4. Låt N vara det delrum till $\mathbb{E}^4$ som ges av

$$N = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \,:\, x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}.$$

(a) Finn en ON-bas i N.

(b) Finn en ON-bas i $N^{\perp}$.

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $a = (3, -2, 0, 3)$ på N.

Var god vänd!

5. En andragradsyta i $\mathbb{E}^3$ ges av ekvationen $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz - 2yz = 1$. Bestäm ytans typ, det minsta avståndet från ytan till origo samt alla punkter på ytan där det minsta avståndet antas.

6. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avgör om F är diagonaliserbar och, om så är fallet, finn en bas i $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till F samt den motsvarande diagonalmatrisen.

7. Låt $\mathcal{P}_2$ vara rummet av alla reella polynom $p(x)$ av grad högst 2 och låt a vara en reell konstant. Finn alla värden på konstanten a för vilka polynomen $p_1(x) = a + x - x^2$, $p_2(x) = -1 + x + ax^2$ och $p_3(x) = a + 2x + 2x^2$ utgör en bas i $\mathcal{P}_2$.

8. Antag att de kvadratiska matriserna A och B uppfyller ekvationen $A^2 + AB = E$.

(a) Visa att A är inverterbar.

(b) Visa att $AB = BA$.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2007–08–16

1.

$$[F]_{std}^{std} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

En bas i $V(F)$ utgörs t.ex. av $(1,0,1)$ och $(1,1,0)$. En bas i $N(F)$ utgörs t.ex. av $(1,-1,1,0)$ och $(2,-1,0,1)$.

2.

$$[G]_{std}^{std} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -11 & -5 & 7 \\ -6 & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (b) Nej.

(c) Ja.

4. (a) T.ex. $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)$ och $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1,2,2,-1)$.

(b) T.ex. $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$ och $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(2,1,1,2)$.

(c) $(1,-2,-2,1)$.

5. Enmantlad hyperboloid. Avståndet är $1/2$, antas i punkterna $P_{1,2} = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

6. F är diagonaliserbar,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektorerna $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,-1,0)$, $(0,1,0,-1)$ utgör en egenbas till F.

7. $a \neq -1, 4$

8.

Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2007–08–16

Lösning till problem 1. Vi har

$$\begin{aligned} F(1,0,0,0) &= (1,0,1), \\ F(0,1,0,0) &= (1,1,0), \\ F(0,0,1,0) &= (0,1,-1), \\ F(0,0,0,1) &= (-1,1,-2). \end{aligned}$$

Om vi skriver dessa vektorer som kolonner i en matris, får vi F:s matris i standardbaserna:

$$[F]_{std}^{std} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nu använder vi Gauß-elimination för att reducera matrisen till trappstegsformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{1}-\boxed{2}]{\boxed{3}+\boxed{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom pivotelement står i den första och i den andra kolonnen, utgör motsvarande kolonner i den ursprungliga matrisen en bas i $V(F)$, d.v.s. vektorerna $(1,0,1)$ och $(1,1,0)$ utgör en bas i $V(F)$. Motsvarade homogena linjära ekvatiuonssystemet har två linjär oberoende lösningar, t.ex. $(1,-1,1,0)$, $(2,-1,0,1)$. Dessa två vektorer utgör då en bas i $N(F)$.

Lösning till problem 2. Vi kontrollerar först att $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$. Eftersom $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, är $\mathbf{u}$ en bas i $\mathbb{R}^3$ om och endast om vektorerna från $\mathbf{u}$ är linjärt oberoende, d.v.s. om och endast om följande determinant är nollskild:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 30 - 6 + 5 + 24 = -5 \neq 0.$$

Om vi väljer nu basen $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^3$ och standardbasen i $\mathbb{R}^4$ blir G:s matris följande:

$$[G]_{std}^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nu föreslår vi två olika lösningar.

Lösning 1 (basbyte formeln). För att kunna använda basbyteformel, behöver vi inversen till transformationsmatrisen från standardbasen till **u**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\boxed{2}-2\boxed{1} \\ \boxed{3}-3\boxed{1}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{3}-\boxed{2}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\boxed{1}-2\boxed{3} \\ \boxed{2}-\boxed{3}}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot\boxed{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\boxed{1}+2\boxed{2}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11/5 & -2 & 12/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Vi får

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -11 & -10 & 12 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Nu använder vi basbyteformeln:

$$[G]_{std}^{std} = [G]_{std}^{\mathbf{U}} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -11 & -10 & 12 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -11 & -5 & 7 \\ -6 & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning 2. Låt $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ vara standradbasen i $\mathbb{R}^3$. Vi har $u_1 = s_1 + 2s_2 + 3s_3$, $u_2 = -2s_1 + s_2 - s_3$ och $u_3 = 2s_1 + 5s_2 + 6s_3$. Eftersom G är en linjär avbildning, får vi

$$\left\{\begin{array}{lllllll} G(u_1) & = & G(s_1+2s_2+3s_3) & = & G(s_1)+2G(s_2)+3G(s_3) & = & (1,0,1,1) \\ G(u_2) & = & G(-2s_1+s_2-s_3) & = & -2G(s_1)+G(s_2)-G(s_3) & = & (1,2,0,1) \\ G(u_3) & = & G(2s_1+5s_2+6s_3) & = & 2G(s_1)+5G(s_2)+6G(s_3) & = & (3,-1,1,2). \end{array}\right. \tag{1}$$

Vi finner vektorerna $G(s_1)$, $G(s_2)$, $G(s_3)$ genom att lösa det linjära ekvationssystemet (1).

Detta system har totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{2}+2\boxed{1} \\ \boxed{3}-2\boxed{1}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{\boxed{2}-5\boxed{3} \\ \boxed{1}-2\boxed{3}}}{\longrightarrow}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{5}\cdot\boxed{2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 7/5 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\boxed{1}-3\boxed{2}}{\longrightarrow}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -11/5 & -6/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 7/5 & 7/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Detta medför att $G(s_1) = \frac{1}{5}(1, -11, -6, -4)$, $G(s_2) = (1, -1, -1, 0)$ och $G(s_1) = \frac{1}{5}(-2, 7, 7, 3)$. Följaktigen är F:s matris i standardbaserna lika med

$$[G]_{std}^{std} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -11 & -5 & 7 \\ -6 & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 3. (a) Det ortogonala komplementet $M^{\perp}$ består av alla element $v \in \mathbb{E}$ som är ortogonala mot alla element från M.
(b) Eftersom $(u, v_2) = 1 \neq 0$, har vi att vektorerna u och v_2 inte är ortogonala. Detta innebär att u inte tillhör det ortogonala komplementet till det linjära höljet av vektorerna v_1 och v_2 i $\mathbb{E}^3$.
(c) Vi har

$$(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Detta medför att $p(x)$ och $q(x)$ är ortogonala och således $p(x)$ tillhör det ortogonala komplementet till det linjära höljet av polynomet $q(x)$.

Lösning till problem 4. (a) För att bestämma en bas i N skall vi lösa det homogena linjära ekvationssytemet med följande martisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna matris är redan en trappstegsmatris och vi får följande två linjärt oberoende lösningar: $v_1 = (-1, 0, 0, 1)$ och $v_2 = (-1, 1, 1, 0)$. Vi ortonormerar de med hjälp av Gramm-Schmidt metod: $u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)$,

$$\tilde{u}_2 = v_2 - \frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = (-1, 1, 1, 0) - \frac{1}{2}(-1, 0, 0, 1) = (-1/2, 1, 1, -1/2) = \frac{1}{2}(-1, 2, 2, -1);$$

$\tilde{\tilde{u}}_2 = (-1, 2, 2, -1)$, $u_2 = \dfrac{\tilde{\tilde{u}}_2}{|\tilde{\tilde{u}}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-1, 2, 2, -1)$. Vektorerna u_1 och u_2 utgör en ON-bas i N.

(b) Eftersom vilkoret $x_1 + x_3 + x_4 = 0$ kan skrivas som $((1, 0, 1, 1), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$, och vilkoret $x_2 - x_3 = 0$ kan skrivas som $((0, 1, -1, 0), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$, drar vi slutsatsen att vektorerna $x_1 = (0, 1, -1, 0)$ och $x_2 = (1, 0, 1, 1)$ spänner upp $N^{\perp}$. Dessa två vektorer är icke-proportionella och därmed linjärt oberoende. Detta innebär att de utgör en bas i $N^{\perp}$. Vi ortonormerar denna bas med hjälp av Gramm-Schmidt metod: $y_1 = \dfrac{x_1}{|x_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$,

$$\tilde{y}_2 = x_2 - \frac{(x_2, x_1)}{(x_1, x_1)} x_1 = (1, 0, 1, 1) + \frac{1}{2}(0, 1, -1, 0) = (1, 1/2, 1/2, 1) = \frac{1}{2}(2, 1, 1, 2);$$

$\tilde{\tilde{y}}_2 = (2, 1, 1, 2)$, $y_2 = \dfrac{\tilde{\tilde{y}}_2}{|\tilde{\tilde{y}}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(2, 1, 1, 2)$. Vektorerna y_1 och y_2 utgör en ON-bas i $N^{\perp}$.

(c) Den ortogonala projektionen av a på N räknas på följande sätt:

$$\mathrm{pr}_N(a) = (a, u_1)u_1 + (a, u_2)u_2 = \frac{0}{2}(-1, 0, 0, 1) + \frac{-10}{10}(-1, 2, 2, -1) = (1, -2, -2, 1).$$

Lösning till problem 5. Matrisen för motsvarande kvadratiska formen är

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För att lösa problemet måste vi bestämma B:s egenvärden. För det beräknar vi sekularpolynomet:

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 2 + 2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - 4(2-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Egenvärden är $\lambda_1 = 4 > 0$, $\lambda_2 = 1 > 0$ och $\lambda_3 = -1 < 0$. Därför är ytan en enmatlad hyperboloid med det minsta avståndet från ytan till origo $(\sqrt{\lambda_1})^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

För att bestämma dem punkter på ytan där det minsta avståndet antas behöver vi en egenvektor med egenvärde $\lambda_1 = 4$. För att finna en sådan egenvektor måste vi hitta en lösning till det homogena linjära ekvationsystemet med matrisen

$$B - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Genom Gauß-elimination får vi lösningen $(1, 1, -1)$. Nu stoppar vi in vektorn $a(1, 1, -1)$ i ytans ekvation:

$$a^2 + a^2 + 2a^2 + 4a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 12a^2 = 1$$

som innebär att $a = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{3}}$. Därför antas det minsta avståndet på punkterna $P_{1,2} = \dfrac{\pm 1}{2\sqrt{3}}(1, 1, -1)$.

Lösning till problem 6. Avbildningen F är diagonaliserbar eftersom matrisen A är symmetrisk. Vi börjar med sekularpolynomet.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{1}+\boxed{3} \\ \boxed{2}+\boxed{4}}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\substack{\boxed{3}-\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{2}}}{=} (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\lambda^2.$$

Vi har två egenvärden, $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 0$, både av multiplicitet 2. Därför blir F:s diagonalform

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma egenvektorer med egenvärden $\lambda_1 = 2$ skall vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen $A - 2E$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta system har två linjärt oberoende lösningar som är mycket enkelt att gissa, t.ex. $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ och $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.
För att bestämma egenvektorer med egenvärden $\lambda_1 = 0$ skall vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta system har två linjärt oberoende lösningar som är mycket enkelt att gissa, t.ex. $v_3 = (1, 0, -1, 0)$ och $v_4 = (0, 1, 0, -1)$.
Vektorerna v_1, v_2, v_3 och v_4 utgör en bas i $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till F.

Lösning till problem 7. Vi vet att $\dim \mathcal{P}_2 = 3$. Tre element i ett tredimensionellt rum utgör en bas om och endast om de är linjärt oberoende. Det senaste är fallet om och endast om determenanten för matrisen som innehåler koordinaterna av dessa vektorer i basen $(1, x, x^2)$, skrivna som kolonner, är nollskild. I vårt fall har vi följande matris:

$$S = \begin{pmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & a & 2. \end{pmatrix}$$

Vi räknar nu determinanten:

$$\det(S) = 2a + 2 + a^2 + a - 2a^2 + 2 = -a^2 + 3a + 4 = -(a-4)(a+1).$$

Därför är $\det(S) \neq 0$ om och endast om $a \neq -1, 4$, som innebär att p_1, p_2 och p_3 utgör en bas i $\mathcal{P}_2$ om och endast om $a \neq -1, 4$.

Lösning till problem 8. (a) Vi har $E = A^2 + AB = A(A+B)$. Eftersom matrisen A är kvadratisk, medför detta enligt en av satserna i kursen att A är inverterbar med inversen $A^{-1} = A + B$.
(b) Vi multiplicerar nu båda sidor av likheten $A^2 + AB = E$ med A^{-1} från vänster och får $A + B = A^{-1}$. Nu miltiplicerar vi båda sidor av sista likheten med matrisen A från höger och får $A^2 + BA = E$. Ur $A^2 + BA = E$ och $A^2 + AB = E$ följer att $A^2 + BA = A^2 + AB$ och därmed $AB = BA$.