Lösningar till duggan 2011-02-09

1. (a) $\mathcal{U} \subset V$ är ett delrum om följande villkor är uppfyllda.

(DR1) $0 \in \mathcal{U}$

(DR2) $x, y \in \mathcal{U} \Rightarrow x+y \in \mathcal{U}$

(DR3) $c \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{U} \Rightarrow cx \in \mathcal{U}$

(b) $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ är ett delrum då nollmatrisen är en diagonalmatris, summan av två diagonalmatriser är en diagonalmatris, och en skalär multipel av en diagonalmatris är en diagonalmatris.

$\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ är ett delrum då nollmatrisen är symmetrisk, summan av två symmetriska matriser är symmetrisk, och en skalär multipel av en symmetrisk matris är symmetrisk.

$\mathcal{U}_3 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ är inte ett delrum, då nollmatrisen inte är inverterbar.

$\mathcal{U}_4 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ är inte ett delrum, då $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_4$ medan

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{U}_4 .$$

2. (a) En följd $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ i V kallas för en bas i V om

(B1) $\underline{b}$ är linjärt oberoende, och

(B2) $\underline{b}$ spänner upp V.

(b) Matrisen $T = T_{\underline{e}\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ är inverterbar, då $\det(T) = 2$.

(B1) $\underline{b}$ är linjärt oberoende, då

$$0 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = Tc \Rightarrow c = T^{-1} 0 = 0 .$$

(B2) $\underline{b}$ spänner upp $\mathbb{R}^{3\times 1}$, då ekvationen

$$Tc = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = v \quad \text{löses av} \quad c = T^{-1} v \quad \text{för alla } v \in \mathbb{R}^{3\times 1} .$$

(c)
$$[v]_{\underline{b}} = T_{\underline{b}\underline{e}} [v]_{\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}}^{-1} [v]_{\underline{e}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 15 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{kasta om} \\ \text{raderna}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 15 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ (-1)\cdot \\ (-1)\cdot \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ & & & 1 & 8 \\ & & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & 3 & 0 & -3 \\ & & & 1 & 8 \\ & & & & \end{pmatrix} = T$$

(a) $(T_{\cdot 1}, T_{\cdot 2}, T_{\cdot 4})$ är en bas i $K(T)$ $\Rightarrow$ $\underline{a} = (A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, A_{\cdot 4})$ är en bas i $K(A)$.

(b) $[A_{\cdot 5}]_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(c) $\dim R(A) = \operatorname{rang}(A) = 3$.

(d) $\dim N(A) = 5 - \operatorname{rang}(A) = 5 - 3 = 2$.

4. (a) $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ & \lambda & -1 \\ & & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\,\lambda\,(\lambda-1)$ visar att

A:s egenvärden är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

$E(-1) = N(-I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$-I-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$E(0) = N(-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$E(1) = N(I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$I-A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$ med $Ab_1 = -b_1$, $Ab_2 = 0$, $Ab_3 = b_3$.

Alltså uppfyller $T = T_{\underline{e}\,\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ekvationen $T^{-1}AT = D$.

(b) $T^{-1}AT = D \Rightarrow A = TDT^{-1} \Rightarrow A^n = TD^nT^{-1} \quad \forall n \geq 1$

$$A^{16} = TD^{16}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{17} = TD^{17}T^{-1} = TDT^{-1} = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$