Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich
Johannes Alneberg

Civilingenjörsprogrammen STS och X
Höstterminen 2010

Linjär algebra och geometri I
Svar på tentamen 2010–12–16

1. $L = \{(4, 0, 1, -1) + t(-1, 1, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) $A^3 = 0$; (b) $(I - A)(I + A + A^2) = I$;
(c) $B^{-1} = (I - A)^{-1} = (I + A + A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -y+1 & y-1 \\ -1 & x & -x+1 \\ 1 & -x & x-y \end{pmatrix}$; (b) $\det(A) = -y + 1$; (c) $L : y = 1$;
(d) $A^{-1} = \frac{1}{-y+1} \begin{pmatrix} 0 & -y+1 & y-1 \\ -1 & x & -x+1 \\ 1 & -x & x-y \end{pmatrix}$.

4. Lösningsmängden är lika med linjen.

5. (a) θ hör till A; (b) $\theta < 135^o$.

6. (a) E och F är ej parallella, då $n_E \perp n_F$; (b) $E : x - 2y + z = 0, \quad F : y + 2z + 3 = 0$;
(c) $E \cap F : (x, y, z) = (-1, -1, -1) + t(5, 2, -1)$, där $t \in \mathbb{R}$.

7. $[h] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Operatorn h är rotationen kring x-axeln med vinkel π.

8. (a) Varje vektor $v \in A_a$ avbildas på $f(v) = v$. Varje vektor $w \perp A_a$ avbildas på

$$f(w) = (\cos\alpha)w + (\sin\alpha)(a \times w).$$

Varje vektor $u \in \mathbb{R}^3$ skrivs på formen $u = v + w$, där v och w är som ovan, och avbildas på

$$f(u) = f(v + w) = f(v) + f(w) = v + (\cos\alpha)w + (\sin\alpha)(a \times w).$$

Med $v = \mathrm{proj}_a u = (u \cdot a)a$ och $w = u - (u \cdot a)a$ följer den påstådda formeln.

(b) $[f] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Matrisen $[f]$ är inverterbar, då operatorn f är inverterbar.