Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich
Tomas Johnson

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, ES1
2007–10–22

*Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.*

1. Lös följande ekvationssystem.

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 - x_2 + 2}x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

2. Avgör om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

är inverterbar, och bestäm inversen till $A$ ifall den finns.

3.(a) Beskriv på parameterform alla kvadrupler $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ för vilka följande ekvationssystem är lösbart.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b_1 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 = b_2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = b_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 13x_4 = b_4 \end{cases}$$

(b) Hur många lösningar $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ har systemet för dessa $(b_1, b_2, b_3, b_4)$?

VAR GOD VÄND!

4. Lös följande matrisekvation.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Linjen $L$ går genom punkterna $A = (2, 1, -3)$ och $B = (0, 2, -1)$. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (4, 3, 0)$ och linjen $L$, samt den punkt $N$ på linjen $L$ som ligger närmast $P$.

6. Planet $E$ går genom punkterna $A = (5, 4, 3)$, $B = (4, 3, 1)$ och $C = (1, 5, 4)$. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (3, 3, 3)$ och planet $E$, samt den punkt $N$ på planet $E$ som ligger närmast $P$.

7. Speglingen i planet $E: \; x - y + z = 0$ är en linjär operator $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Den avbildar linjen $L: \; (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, 3, -1)$ på dess spegelbild $L'$.

(a) Bestäm $f$:s matris.

(b) Beskriv $L'$ genom en ekvation på parameterform.

8. Den linjära operatorn $i = hgf$ på $\mathbb{R}^3$ är sammansatt av rotationen $f$ kring $x$-axeln med vinkel $\pi$, rotationen $g$ kring $y$-axeln med vinkel $\pi$, och rotationen $h$ kring $z$-axeln med vinkel $\pi$. Bestäm $i(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}^3$.

Lycka till!