Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich
Cecilia Holmgren
Jimmy Kungsman

Vårterminen 2009
Civilingenjörsprogrammet X
Gymnasielärarprogrammet
Geokandidatprogrammet
Fristående kurser

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2009–06–10

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 2y & - & z & = & 2 \\ & & 2x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ 2w & + & 4x & + & 5y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

2. Låt $S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ och $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att S är inverterbar, och ange inversen till S.

(b) Bestäm alla matriser X som uppfyller ekvationen $SXS^{-1} = 4I$.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Finn elementärmatriser E_1, E_2, E_3 så att $E_3E_2E_1A = I$.

(b) Skriv A som produkt av elementärmatriser.

4. (a) För vilka värden på x är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

inverterbar?

(b) Bestäm A^{-1} för alla sådana x att A^{-1} finns.

Var god vänd!

5. Planet π går genom punkterna $A = (0,3,3)$, $B = (3,0,3)$ och $C = (3,3,0)$.

(a) Finn planets ekvation på formen $ax + by + cz + d = 0$.

(b) Beräkna (det minsta) avståndet mellan origo och planet π.

(c) Finn den punkt N i planet π som ligger närmast origo.

6. Givet är punkterna $A = (0,2,2)$, $B = (2,0,2)$ och $C = (2,2,0)$ i rymden. Beräkna

(a) arean av triangeln med hörnpunkterna A, B, C;

(b) volymen av parallellepipeden som späns upp av vektorerna $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$;

(c) vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{OB}$.

7. Linjen $\ell : (x,y,z) = (0,1,1) + t(1,1,0)$, $t \in \mathbb{R}$, speglas i planet $\pi : x + 2y + z = 0$ till sin spegelbild ℓ'. Finn ℓ':s ekvation på parameterform.

8. Den sammansatta operatorn $h = gfg^{-1}$ på $\mathbb{R}^3$ ges av rotationen f kring x-axeln med vinkel α, moturs i yz-planet, och speglingen g i xz-planet. Finn h:s matris, och tolka h geometriskt.

Lycka till!