Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammet ES
kandidatprogrammet i matematik
Fristående kurser

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2009–10–19

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 10x_4 + x_5 = 23 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + x_5 = 17 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

2. Lös matrisekvationen $AXB = C$, där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{och } C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Ange $\det(A)$.

(b) Ge skäl för påståendet att A är inverterbar.

(c) Finn A^{-1}.

(d) Skriv A^{-1} som produkt av elementärmatriser.

4. (a) För vilka värden på (x, y) är matrisen $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ inte inverterbar?

(b) För vilka värden på (x, y) ligger punkten $P = (x, y)$ på linjen L genom punkterna $Q = (2, 3)$ och $R = (4, 5)$?

(c) Visa att A inte är inverterbar om och endast om P ligger på L.

Var god vänd!

5. Ett rätblock har kantlängderna 1, 2, och ℓ. Bestäm ℓ så att vinkeln α mellan kanten av längd 2 och rätblockets rymddiagonal är lika med 45^{o}.

6. Planet E_1 går genom punkterna $A = (4, 0, 0), B = (0, 2, 0)$, och $C = \left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$. Planet E_2 ges av ekvationen $2x + 3y + 4z - 5 = 0$.

(a) Ange en normalvektor n_1 för E_1, och en normalvektor n_2 för E_2.

(b) Ge skäl för påståendet att E_1 och E_2 skär varandra i en linje L. (Här ska du *inte* räkna, utan enbart resonera utifrån n_1 och n_2.)

(c) Beskriv linjen $L = E_1 \cap E_2$ med hjälp av en ekvation på parameterform.

7. Den sammansatta operatorn $h = gfe$ på $\mathbb{R}^3$ ges av speglingen e i xy-planet, speglingen f i xz-planet, och speglingen g i yz-planet. Finn h:s matris, och tolka h geometriskt.

8. Låt v och w vara enhetsvektorer (dvs vektorer av längd 1) i $\mathbb{R}^n$. Beteckna längden av $v + w$ med ℓ, och vinkeln mellan v och w med α.

(a) Visa att $0 \leq \ell \leq 2$.

(b) Visa att vektorerna $v + w$ och $v - w$ är ortogonala.

(c) Längden av $v - w$ är entydigt bestämd av ℓ. Finn en formel som beskriver detta samband.

(d) Talet $\cos \alpha$ är entydigt bestämt av ℓ. Finn en formel som beskriver detta samband.

(e) Finn α då $\ell = \sqrt{3}$.

LYCKA TILL!