Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammet ES
kandidatprogrammet i matematik
Fristående kurser

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2010–01–12

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3v - 6y = -2 - z \\ 4v + x = 7 \\ 5v + w = 8 \end{cases}$$

2. Finn alla vinklar α, β, γ som uppfyller $0 \leq \alpha \leq 2\pi,\ 0 \leq \beta \leq 2\pi,\ 0 \leq \gamma < \pi$ samt löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 2 \\ 6\sin\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9 \end{cases}$$

3. För vilka värden på x är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$$

inverterbar?

4. Visa att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

inte är inverterbar om och endast om punkten (x, y, z) ligger på planet genom punkterna $(1, 2, 3),\ (2, 3, 1)$, och $(3, 1, 2)$.

Var god vänd!

5. Två plan kallas vinkelräta om deras normalvektorer är vinkelräta. Finn en ekvation för planet F som är vinkelrät mot planet $E : 8x - 2y + 6z = 1$ och går genom punkterna $P = (-1, 2, 5)$ och $Q = (2, 1, 4)$.

6. Visa att olikheten

$$\left(v^T A^T A w\right)^2 \leq \left(v^T A^T A v\right)\left(w^T A^T A w\right)$$

gäller för alla kvadratiska matriser $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och alla kolonner $v, w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

7. Projektionen P parallellt med vektorn $v = (1, 1, 0)$ på planet $E : x + y = 0$ avbildar linjen $\ell : (x, y, z) = (2, 3, 5) + t(3, 5, 7),\ t \in \mathbb{R}$, på delmängden $P(\ell) = \{P(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \ell\}$ i E. Visa att $P(\ell)$ är en linje. Finn även en ekvation på parameterform för $P(\ell)$.

8. Planen E och F skär varandra i linjen $\ell : (x, y, z) = t(1, 1, 1),\ t \in \mathbb{R}$. Dessutom går E genom punkten $(1, 0, 0)$, medan F går genom punkten $(0, 1, 0)$. Operatorn $g = fe$ på $\mathbb{R}^3$ är sammansatt av speglingen e i planet E, och speglingen f i planet F. Finn g:s matris,

Lycka till!