Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich
Johannes Alneberg

Civilingenjörsprogrammen STS och X
Höstterminen 2010

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2010–12–16

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan får hoppa över första uppgiften.

1. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Beräkna A^3.

(b) Bestäm $(I - A)(I + A + A^2)$.

(c) Finn inversen till $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Varje punkt $P = (x, y)$ i planet bestämmer en matris $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Ange $\mathrm{adj}(A)$.

(b) Beräkna $\det(A)$.

(c) Beskriv en linje L i planet med egenskapen att A är inverterbar om och endast om punkten P inte ligger på L.

(d) Ange A^{-1} för alla P som inte ligger på L.

Var god vänd!

4. Vilket samband finns det mellan lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$$

och linjen genom origo med riktningsvektor $v = (1, 1, 1) \times (1, 2, 3)$? Motivera ditt svar!

5. Punkterna $A = (1, 1, -1)$, $B = (0, 3, 0)$ och $C = (2, -4, 2)$ bestämmer en triangel som har en trubbig vinkel θ.

(a) Vilken av punkterna A, B, C tillhör θ?

(b) Är θ mindre än 135°, lika med 135°, eller större än 135°?

6. Planet E går genom punkterna $A = (-1, -1, -1)$, $B = (-1, 0, 1)$ och $C = (1, 1, 1)$. Planet F går genom punkten A och är ortogonal mot vektorn $\overrightarrow{AB}$.

(a) Avgör utan räkning om planen E och F är parallella eller inte. Motivera ditt svar.

(b) Beskriv E och F genom ekvationer på standardform.

(c) Ifall E och F inte är parallella, beskriv deras skärningsmängd genom en ekvation på parameterform.

7. Den linjära operatorn $h = gf$ på $\mathbb{R}^3$ är sammansatt av speglingen f i xy-planet och speglingen g i xz-planet. Finn h:s matris, samt tolka operatorn h geometriskt.

8. Den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges som rotation kring den riktade axeln A_a med vinkel $\alpha = 60^{\circ}$, där $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

(a) Förklara varför formeln

$$f(u) = (u \cdot a)a + (\cos \alpha)(u - (u \cdot a)a) + (\sin \alpha)(a \times u)$$

gäller för alla vektorer $u \in \mathbb{R}^3$.

(b) Finn f:s matris.

(c) Avgör utan räkning om f:s matris är inverterbar eller inte. Motivera ditt svar.

LYCKA TILL!