Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Ernst Dieterich

Civilingenjörsprogrammet ES
Kandidatprogrammet i matematik
Lärarprogrammet, Fristående kurser

Prov i matematik
Linjär algebra och geometri I, 5hp
2011–10–20

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan får hoppa över första uppgiften.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 5x + 4y + 7z = 2 \end{cases}$$

och tolka lösningsmängden L geometriskt.

2. (a) Visa att matriserna $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $A + B$ är inverterbara.

(b) Beräkna matrisen $X = A(A^{-1} + B^{-1})B(A + B)^{-1}$.

3. För vilka värden på a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Finn elementet $(A^{-1})_{44}$ för alla dessa värden på a.

4. Punkterna $A = (1, 1, 1), B = (2, 4, 6)$ och $C = (3, 5, 7)$ bestämmer en triangel i rymden.

(a) Bestäm triangelns area.

(b) Avgör om någon av triangelns tre vinklar är trubbig. Om så är fallet, ange två vektorer som bildar den trubbiga vinkeln.

Var god vänd!

5. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (-4, 7, -4)$ och planet E som är parallellt med vektorn $v = (3, -2, 0)$ och innehåller punkterna $A = (-2, -1, 0)$ och $B = (-9, 2, 1)$.

6. (a) Visa att matriserna

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bildar en bas $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Ange koordinatvektorn för matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{B}$.

7. Den linjära operatorn f på $\mathbb{R}^3$ ges geometriskt som spegling i planet $E : 2x + 3y + z = 0$. Finn f:s matris, samt vektorn $f(v)$ för $v = (-7, -7, -7)$.

8. Den linjära operatorn $f = gh$ på $\mathbb{R}^2$ är sammansatt av speglingen h i linjen $L : \sqrt{3}x + y = 0$ och rotationen g moturs kring origo med vinkel $\frac{2\pi}{3}$. Finn f:s matris, och tolka operatorn f geometriskt.

LYCKA TILL!

Lösningar 2011 - 10 - 20

1. $-5 \quad -3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim -3 \quad 1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x \qquad + z = 0 \\ \qquad y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \end{cases} \sim \begin{cases} x = -z \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Sätt $z = t$, där $t \in \mathbb{R}$. Den allmänna lösningen blir

$(x,y,z) = (-t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t) = (0, \frac{1}{2}, 0) + t(-1, -\frac{1}{2}, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, eller ekvivalent

$(x,y,z) = (-1,0,1) + s(2,1,-2)$, $s \in \mathbb{R}$.

<u>Svar.</u> $L = \{(-1,0,1) + s(2,1,-2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ <u>är linjen genom punkten</u> $P = (-1,0,1)$ <u>med riktningsvektor</u> $v = (2,1,-2)$.

2. (a) $\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$, $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$.

(b) $X = A(A^{-1} + B^{-1})B(A+B)^{-1} = (I + AB^{-1})B(A+B)^{-1}$

$= (B+A)(A+B)^{-1} = (A+B)(A+B)^{-1} = I$.

<u>Svar (b).</u> $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\det(A) = \begin{array}{c} a \\ a \end{array} \begin{vmatrix} a & & & -1 \\ & -a & 1 & \\ & -1 & -a & \\ 1 & & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -1-a^2 & 0 & 0 \\ 1+a^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a^2 & & & \\ 0 & -1-a^2 & & \\ 0 & -a & 1 & \\ a & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$= (1+a^2)^2 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}\, C^{T}$$ medför att

$$(A^{-1})_{44} = \frac{1}{\det(A)} (C^{T})_{44} = \frac{1}{\det(A)} C_{44} = \frac{1}{\det(A)} M_{44} =$$

$$= \frac{1}{(1+a^2)^2} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & -a \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+a^2)^2}\, a \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+a^2)^2}\, a\,(a^2+1) =$$

$$= \frac{a}{1+a^2}$$

<u>Svar.</u> <u>För alla</u> $a \in \mathbb{R}$ <u>är</u> A <u>inverterbar</u>, <u>och</u> $(A^{-1})_{44} = \dfrac{a}{1+a^2}$.

4. (a) $\overrightarrow{AB} = (1,3,5)$, $\overrightarrow{AC} = (2,4,6)$. Triangelns area är

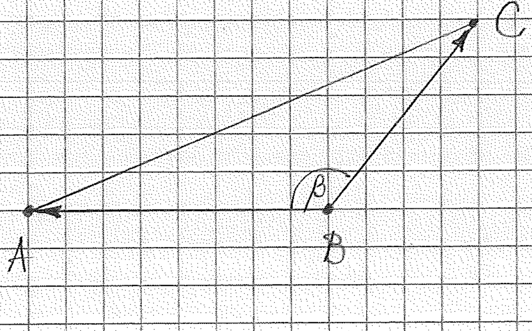
$$F = \tfrac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \| \overrightarrow{AB} \times \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \| = \| (1,3,5) \times (1,2,3) \| =$$

$$= \| (-1,2,-1) \| = \sqrt{6}.$$

(b) $\overrightarrow{BC} = (1,1,1)$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1,-3,-5)\cdot(1,1,1) = -9$

medför att vinkeln $\beta = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ är trubbig.

<u>Svar.</u> (a) <u>Triangelns area är</u> $F = \sqrt{6}$. (b) <u>Vinkeln</u> $\beta = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ <u>är trubbig</u>.



5. Som normalvektor till E duger $n = \overrightarrow{AB} \times v = (-7,3,1) \times (3,-2,0) = (2,3,5)$. Därmed blir E:s ekvation

$$2(x+2) + 3(y+1) + 5(z-0) = 0 \qquad \text{Punktnormalform}$$

$$\sim \quad 2x + 3y + 5z + 7 = 0 \qquad \text{Standardform}$$

Avståndsformeln ger

$$D = \frac{|2\cdot(-4) + 3\cdot 7 + 5\cdot(-4) + 7|}{\sqrt{4+9+25}} = \frac{0}{\sqrt{38}} = 0,$$

vilket betyder att $P \in E$.

<u>Svar.</u> $D = D(P,E) = 0$.

6.(a) $\underline{B}$ är en bas i $\mathbb{R}^{2\times 2}$ omm ekvationen $\sum_{i=1}^{4} c_i B_i = W \quad (*_W)$ har precis en lösning $(c_1, \ldots, c_4) \in \mathbb{R}^4$ för varje $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Med $W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ antar $(*_W)$ formen

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}, \text{ vilket betyder}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = w_{11} \\ c_1 + c_2 + c_3 = w_{12} \\ c_1 + c_2 = w_{21} \\ c_1 = w_{22} \end{cases}, \text{ eller koncist}$$

$$Mc = w, \text{ där } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{21} \\ w_{22} \end{bmatrix}.$$

$\det(M) = 1 \Rightarrow M$ är inverterbar $\Rightarrow (*_W)$ har den entydiga lösningen $c = M^{-1}w$.

Alltså är $\underline{B}$ en bas i $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) $[A]_{\underline{B}}$ är lösningen till systemet med totalmatris

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&1\\ 1&1&0&0&2\\ 1&0&0&0&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&&&&3\\ 1&1&&&2\\ 1&1&1&&1\\ 1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&&&&3\\ 0&1&&&-1\\ 0&1&1&&-2\\ 0&1&1&1&-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&&&&3\\ &1&&&-1\\ &0&1&&-1\\ &0&1&1&-2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&&&&3\\ &1&&&-1\\ &&1&&-1\\ &&&1&-1 \end{pmatrix} \Rightarrow [A]_{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3\\-1\\-1\\-1 \end{pmatrix}.$$

Svar (b). $(A)_{\underline{B}} = (3,-1,-1,-1)$.

7. $[f] = \left[f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right]$, där

$$f(e_j) = e_j - 2\,\mathrm{proj}_n(e_j) = e_j - 2\frac{e_j \cdot n}{\|n\|^2}\,n \qquad \text{och } n = (2,3,1).$$

Vi får

$$f(e_1) = (1,0,0) - 2\frac{2}{14}(2,3,1) = (1,0,0) - \frac{2}{7}(2,3,1) = \frac{1}{7}(3,-6,-2)$$

$$f(e_2) = (0,1,0) - 2\frac{3}{14}(2,3,1) = (0,1,0) - \frac{3}{7}(2,3,1) = \frac{1}{7}(-6,-2,-3)$$

$$f(e_3) = (0,0,1) - 2\frac{1}{14}(2,3,1) = (0,0,1) - \frac{1}{7}(2,3,1) = \frac{1}{7}(-2,-3,6)$$

Alltså är $[f] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3&-6&-2\\ -6&-2&-3\\ -2&-3&6 \end{bmatrix}$ och $[f]\begin{bmatrix}-7\\-7\\-7\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\cdot 7 \begin{bmatrix} -3&6&2\\ 6&2&3\\ 2&3&-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\11\\-1\end{bmatrix}.$

Svar. $[f] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ och $f(-7,-7,-7) = (5,11,-1)$.

8. Linjen L går genom origo och punkten $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Alltså är

$$[h] = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & \sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & -\cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ Dessutom är

$$[g] = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ Därmed blir

$$[f] = [gh] = [g][h] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [i],$$

där i är speglingen i x-axeln.

Svar. $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Operatorn f är speglingen i x-axeln.