Annals of Mathematics, **141** (1995), 147–179

Relèvement de Cycles Algébriques et Homomorphismes Associés en Homologie d'Intersection

By G. BARTHEL, J.-P. BRASSELET, K.-H. FIESELER, O. GABBER, L. KAUP*

Introduction

L'introduction de l'homologie d'intersection par Goresky et MacPherson a permis l'extension aux espaces singuliers des résultats classiques de Poincaré et Lefschetz sur l'homologie des variétés *lisses* (i.e. sans singularités), à savoir les théories d'intersection et de dualité. Malheureusement, l'homologie d'intersection présente un sérieux inconvénient, d'un point de vue systématique, celui de n'être pas fonctorielle dans un sens naturel (cf. [3, IX,C]). Les résultats présentés dans ce travail permettent de remédier au moins partiellement à ce défaut: Nous montrons que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques complexes de dimension pure, il existe des *homomorphismes associés* en homologie d'intersection à coefficients rationnels, c'est-à-dire des homomorphismes $\nu_f : \mathrm{IH}_\bullet(X) \to \mathrm{IH}_\bullet(Y)$ qui rendent commutatifs les diagrammes

$$(\mathrm{D}_\bullet)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{IH}_\bullet(X) & \xrightarrow{\nu_f} & \mathrm{IH}_\bullet(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \omega_X} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_Y} \\ \mathrm{H}_\bullet(X) & \xrightarrow{f_\bullet} & \mathrm{H}_\bullet(Y) \end{array}$$

où $\omega : \mathrm{IH}_\bullet \to \mathrm{H}_\bullet$ désigne l'homomorphisme de comparaison induit par l'inclusion au niveau des chaînes. Nous avons noté ici $\mathrm{IH}_\bullet$ l'homologie d'intersection par rapport à la perversité moitié $\mathfrak{m}$, à coefficients rationnels et à supports compacts. Les homomorphismes ν_f sont donc des relèvements des homomorphismes induits $f_\bullet$ en homologie singulière. En général, ils ne sont pas déterminés de façon unique.

En utilisant la fonctorialité de l'homologie usuelle, on voit que la composition d'homomorphismes associés à deux morphismes est un homorphisme associé au morphisme composé. Pour construire ν_f il suffit donc, en utilisant

*Nous avons bénéficié des remarques pertinentes de P. Deligne, M. Goresky et R. MacPherson, ainsi que de discussions frucuteuses avec E. Looijenga et T.A. Springer pendant le workshop sur les Singularités de Utrecht en décembre 1992, et avec A.A. Beilinson pendant le Colloque International de Géométrie à Moscou en mai 1993, qu'ils en soient tous remerciés ici.

la factorisation $X \hookrightarrow X \times Y \to Y$ de f par le graphe, de construire les homomorphismes associés à une projection et à un plongement fermé. Dans le cas des projections, et plus généralement celui des applications *placides* (voir 3.3), l'existence et même l'unicité d'homomorphismes associés ont été montrés par des arguments géométriques dans [15, Prop. 4.1]. Par contre, pour construire des homomorphismes associés à un plongement fermé, nous sommes amenés à utiliser des méthodes cohomologiques de la théorie des faisceaux. Comme il est bien connu, de nombreux résultats en homologie d'intersection peuvent être démontrés d'une manière plus efficace en utilisant la description, proposée par Deligne et Verdier et présentée dans [14], de l'homologie d'intersection comme hypercohomologie d'un complexe de faisceaux $\mathcal{IC}^\bullet$ convenable. Dans le cadre de ce formalisme, l'existence de morphismes associés a été montrée dans plusieurs cas particuliers ([14], [4], [11]; voir 2.4), en utilisant le Théorème de Décomposition. Nous montrons l'existence de morphismes associés, en toute généralité, en construisant d'abord, au niveau des complexes de faisceaux, des morphismes *contravariants* $\mu^f : f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y \to \mathcal{IC}^\bullet_X$ dont la propriété principale est d'être compatibles avec l'isomorphisme canonique $f^*\mathbb{Q}_Y \overset{\cong}{\to} \mathbb{Q}_X$ qui induit l'homomorphisme usuel $f^\bullet : \mathrm{H}^\bullet(Y) \to \mathrm{H}^\bullet(X)$ (Théorème principal 2.1). Cette construction de μ^f utilise d'une manière décisive le *Théorème de Pureté* et est essentiellement dûe aux idées du quatrième auteur. Par dualité, il en résulte des morphismes *covariants* ν_f au niveau des complexes de faisceaux. Ils induisent, par passage à l'hypercohomologie, les homomorphismes associés *globaux* ν_f cherchés. Dans le cours de la démonstration, et en établissant la version globale 2.3 du théorème d'existence, nous mettons également en évidence des homomorphismes associés contravariants du type Gysin.

On déduit de l'existence d'homomorphismes associés ν_f la solution d'un autre problème, posé par Goresky et MacPherson dans [3, IX,H] et point de départ de ce travail (cf. [1, § 3]): les classes d'homologie des cycles algébriques admettent un relèvement en homologie d'intersection à coefficients rationnels et même à supports arbitrairement proches du cycle donné (Théorème de relèvement 2.4; pour le cas de singularités isolées, voir aussi [22]). Cet énoncé nous conduit au théorème de classification 2.7 où nous montrons que, de façon réciproque, l'existence de morphismes associés au niveau faisceautique est une conséquence de l'existence d'un tel *bon* relèvement de cycles. En fait, il y a une correspondance biunivoque entre les morphismes associés et les relèvements de la classe d'homologie $[\Gamma_f]$ du graphe de f en homologie d'intersection à supports convenables.

La première section de notre texte donne une motivation des résultats. Nous y explicitons une construction plus géométrique pour des homomorphismes associés ν_f, en relation avec l'existence d'un relèvement du cycle Γ_f en un cycle d'intersection dont le support est arbitrairement proche de celui de

Γ_f. Les énoncés précis de nos résultats se trouvent dans la section 2 et leurs démonstrations, dans les sections 3 à 5.

0. Quelques rappels de définitions et de notations

En plus de [14], notre référence la plus importante pour l'homologie d'intersection en termes de faisceaux sera [3], en particulier l'exposé V de A. Borel. Nous en suivrons largement les notations pour les constructions faisceautiques utilisées. Cependant, pour la commodité du lecteur, nous rappelons brièvement les notations et quelques-uns des résultats les plus importants dont nous allons nous servir. Dans la suite, Z désigne une variété algébrique complexe de dimension (complexe) pure d.

a) *Homologie et cohomologie usuelles*: Fixons un anneau de coefficients R principal[1], et notons R_Z le faisceau constant, considéré comme complexe concentré en degré 0. Pour ce travail, l'anneau le plus important sera le corps $\mathbb{Q}$. Dans le contexte faisceautique, la cohomologie et l'homologie singulières à coefficients dans R et à supports dans une famille Φ s'écrivent comme hypercohomologie $\mathrm{H}^\bullet_\Phi(Z) = \mathbb{H}^\bullet_\Phi(Z, R_Z)$ et $\mathrm{H}^\Phi_\bullet(Z) = \mathbb{H}^{-\bullet}_\Phi(Z, \mathcal{D}^\bullet_Z)$ respectivement, où $\mathcal{D}^\bullet_Z$ est le complexe de faisceaux dualisant relativement à R (cf. [3, V,7.A]). Suivant les conventions usuelles, nous ne noterons ni les supports *fermés* dans le contexte (hyper-)cohomologique, ni les supports *compacts* en homologie, en écrivant simplement $\mathrm{H}^\bullet(Z) = \mathbb{H}^\bullet(Z, R_Z)$ et $\mathrm{H}_\bullet(Z) = \mathbb{H}^{-\bullet}_{\mathrm{c}}(Z, \mathcal{D}^\bullet_Z)$. Sur un ouvert *lisse*[2] $W \Subset Z$, le complexe dualisant $\mathcal{D}^\bullet_W = \mathcal{D}^\bullet_Z|_W$ est le faisceau d'orientation $R_W[2d]$, i.e. le faisceau constant placé en degré $-2d$. Il sera commode d'introduire aussi le complexe dualisant décalé $\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z := \mathcal{D}^\bullet_Z[-2d]$, ce qui permet d'exprimer l'homologie usuelle par la formule $\mathrm{H}_\bullet(Z) = \mathbb{H}^{2d-\bullet}_{\mathrm{c}}(Z, \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z)$, de façon tout à fait analogue au cas de l'homologie d'intersection explicité ci-dessous.

b) *Homologie d'intersection et complexe de Deligne*: Nous notons[3] $\mathcal{IC}^\bullet_Z = \mathcal{IC}_{2d-\bullet}$ le complexe de faisceaux des chaînes d'intersection (chaînes admissibles) de Z par rapport à la perversité moitié $\mathfrak{m}$, relativement à une stratification algébrique convenable (e.g., de Whitney) et à une structure PL compatible, et à coefficients dans R. Si $\pi : \widetilde{Z} \to Z$ est la normalisation de Z, on a un isomorphisme $\mathcal{IC}^\bullet_Z \cong \pi_*\mathcal{IC}^\bullet_{\widetilde{Z}}$. Nous notons $\mathrm{IH}_\bullet(Z) := \mathbb{H}^{2d-\bullet}_{\mathrm{c}}(Z, \mathcal{IC}^\bullet_Z)$ l'homologie d'intersection à supports *compacts* et $\mathrm{IH}^\Phi_\bullet(Z) := \mathbb{H}^{2d-\bullet}_\Phi(Z, \mathcal{IC}^\bullet_Z)$ l'homologie

[1] Il suffit de supposer que l'anneau R est commutatif, unitaire et noethérien de dimension cohomologique finie comme dans [3, V, p.47].

[2] Le symbole $\Subset$ désigne toujours un sous-ensemble ouvert.

[3] Dans le choix des degrés du complexe $\mathcal{IC}^\bullet$, nous suivrons [3, V] en utilisant la codimension topologique des chaînes (cf. [14, 2.3]).

d'intersection à supports dans une autre famille Φ. Dans la suite, nous pourrons remplacer le complexe $\mathcal{IC}_Z^\bullet$ par un complexe quasi-isomorphe, propriété qui peut être caractérisée axiomatiquement ([14, 3.6], [3, V, 2.5]). Dans la catégorie dérivée[4], un tel complexe *de Deligne*, noté également $\mathcal{IC}_Z^\bullet$, peut être obtenu, à partir du complexe constant R_W sur la strate ouverte partout dense W d'une bonne stratification, par applications successives des foncteurs *image directe* et *troncation.*

c) *Dualité et foncteur dualisant*: Le foncteur dualisant de Verdier $\mathbf{D} := \mathbf{D}_Z$ est défini dans la catégorie dérivée par $\mathbf{D}(-) := \mathbf{R}\mathcal{H}om(-, \mathcal{D}_Z^\bullet)$ (cf. [3, V, 7.B]). On a $\mathcal{D}_Z^\bullet \cong \mathbf{D}(R_Z)$ et donc aussi $R_Z \cong \mathbf{D}\mathcal{D}_Z^\bullet$ à cause de la bidualité: Si $\mathcal{F}^\bullet$ est un complexe de faisceaux qui est cohomologiquement constructible par rapport à une bonne stratification de Z (voir [3, V, 3.3(ii)]), alors on a un isomorphisme naturel $\mathbf{D}(\mathbf{D}\mathcal{F}^\bullet) \cong \mathcal{F}^\bullet$ [3, V, 8.10]. Si l'anneau de coefficients R est un corps, on a la dualité de Poincaré en homologie d'intersection [3, V, 9.8] qui s'exprime sous forme d'un isomorphisme $\mathbf{D}\mathcal{IC}^\bullet \cong \mathcal{IC}^\bullet[2d]$. Pour simplifier la notation, nous introduisons aussi le foncteur dualisant décalé $\widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{\mathbf{D}}_Z$, défini par $\widetilde{\mathbf{D}}(-) := \mathbf{D}(-)[-2d]$. Alors on a $\widetilde{\mathcal{D}}_Z^\bullet \cong \widetilde{\mathbf{D}}(R_Z)$, la bidualité est également valable pour $\widetilde{\mathbf{D}}$, et si R est un corps, le complexe $\mathcal{IC}^\bullet$ est auto-dual par rapport à $\widetilde{\mathbf{D}}$, i.e. on a $\widetilde{\mathbf{D}}\mathcal{IC}^\bullet \cong \mathcal{IC}^\bullet$.

d) *Morphismes de comparaison*: Les identifications $R_W \cong \mathcal{IC}_W^\bullet$ et $\mathcal{IC}_W^\bullet \cong \widetilde{\mathcal{D}}_W^\bullet$ sur un ouvert dense lisse $W \Subset Z$ induisent des morphismes $\alpha_Z : R_Z \to \mathcal{IC}_Z^\bullet$ et $\omega_Z : \mathcal{IC}_Z^\bullet \to \widetilde{\mathcal{D}}_Z^\bullet$ (cf. [3, V, 9.2 et 9.4]). Leur composé $\delta_Z := \omega_Z \circ \alpha_Z : R_Z \to \widetilde{\mathcal{D}}_Z^\bullet$ induit au niveau global l'homomorphisme de dualité de Poincaré *classique* $\mathrm{H}_c^{2d-\bullet}(Z) \to \mathrm{H}_\bullet(Z)$. Par les identifications évidentes, on a $\omega_Z = \widetilde{\mathbf{D}}\alpha_Z$ et donc $\delta_Z = \widetilde{\mathbf{D}}\delta_Z$.

e) *Images directes et inverses*: Pour un morphisme $f : X \to Y$, on a deux paires de foncteurs adjoints bien connus: les foncteurs f^* et f_* ainsi que les foncteurs $f_!$ (image directe à supports propres) et $f^!$ (voir [3, V, 7.C et VI]). Contrairement aux autres foncteurs, ce dernier ne provient pas d'un foncteur au niveau des faisceaux, il n'est défini que dans la catégorie dérivée. Nous nous permettrons cependant parfois de noter de la même façon un foncteur et son dérivé, par exemple nous écrirons la propriété d'adjonction entre $f_!$ et $f^!$, version globale de la *dualité de Verdier*, comme $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, f^!\mathcal{B}^\bullet) = \mathrm{Hom}(f_!\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet)$ [3, V, 7.17]. Entre ces foncteurs, on a les relations $\mathbf{D}_X f^! = f^*\mathbf{D}_Y$ et $\mathbf{D}_Y f_! = f_*\mathbf{D}_X$ (cf. [3, V, 10.11(2)]). En notant $p : Z \to \{\mathrm{pt}\}$ l'application constante, on a $R_Z = p^*R_{\mathrm{pt}}$ et $\mathcal{D}_Z^\bullet = p^!R_{\mathrm{pt}}$, d'où il résulte des isomorphismes canoniques $f^*R_Y \cong R_X$ et $\mathcal{D}_X^\bullet \cong f^!\mathcal{D}_Y^\bullet$. Les homomorphismes induits par f en cohomologie et homologie usuelles en résultent par adjonction et par passage

[4]Nous travaillons dans la catégorie dérivée $D_c^b(Z)$ des complexes de faisceaux sur Z, à cohomologie constructible et bornée (voir [3, V, 5.12]).

à l'hypercohomologie: la flèche $R_Y \to f_* R_X$ induit $f^\bullet = \mathrm{H}^\bullet(f) : \mathrm{H}^\bullet(Y) \to \mathrm{H}^\bullet(X)$, et la flèche $f_! \mathcal{D}_X^\bullet \to \mathcal{D}_Y^\bullet$ induit $f_\bullet = \mathrm{H}_\bullet(f) : \mathrm{H}_\bullet(X) \to \mathrm{H}_\bullet(Y)$.

f) *Produit tensoriel externe*: Soient $\mathcal{A}_i^\bullet$, pour $i = 1$ et 2, deux complexes de faisceaux sur des variétés Z_i, alors en notant $p_i : Z_1 \times Z_2 \to Z_i$ les projections canoniques, nous posons

$$\mathcal{A}_1^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \mathcal{A}_2^\bullet := p_1^* \mathcal{A}_1^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p_2^* \mathcal{A}_2^\bullet$$

où le bifoncteur $\overset{\mathbf{L}}{\otimes}$ est le foncteur derivé à gauche du produit tensoriel usuel (voir [3, V, 6.2(3) et 6.91]).

Comme nous travaillons dans une catégorie dérivée, nous ne distinguerons pas en général entre des complexes quasi-isomorphes.

1. Motivation géométrique

A titre de motivation, nous allons développer, sans démonstration, une idée de construction géométrique de morphismes associés ν_f en supposant l'existence d'un relèvement de la classe du graphe de f en homologie d'intersection à coefficients rationnels et à supports convenables. Rappelons que les énoncés précis et leurs démonstrations se trouvent dans les sections suivantes.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes de dimensions pures respectives m et n; nous notons Γ_f le graphe de f, cycle algébrique de $X \times Y$. La formule ensembliste $f(A) = \mathrm{pr}_Y((A \times Y) \cap \Gamma_f)$, pour un sous-ensemble A de X, nous suggère de considérer l'application suivante: Etant donné un relèvement de la classe $[\Gamma_f]$ en homologie d'intersection, i.e., un cycle d'intersection γ dans $X \times Y$ qui est homologue (au sens usuel) au cycle Γ_f, nous faisons correspondre à tout cycle d'intersection ξ de X la *chaîne* $\mathrm{pr}_Y((\xi \times [Y]) \cap \gamma)$, dont nous nous proposons de montrer qu'elle est un cycle d'intersection bien défini de Y.

Afin de préciser cette idée, nous considérerons les chaînes sur le produit $X \times Y$ qui sont admissibles par rapport aux deux facteurs, en contrôlant séparément leur comportement d'intersection. Plus précisément, nous introduisons, pour deux perversités arbitraires $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ données, l'homologie d'intersection *produit* $\mathrm{I}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})}\,\mathrm{H}_\bullet(X \times Y)$ par rapport à la *biperversité* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ comme hypercohomologie

$$\mathrm{I}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{q})}\,\mathrm{H}_\bullet(X \times Y) := \mathbb{H}_c^{2m+2n-\bullet}(X \times Y\,,\, \mathcal{I}_\mathfrak{p}\mathcal{C}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \mathcal{I}_\mathfrak{q}\mathcal{C}_Y^\bullet) \;\cong\; \mathrm{I}_\mathfrak{p}\,\mathrm{H}_\bullet(X) \otimes \mathrm{I}_\mathfrak{q}\,\mathrm{H}_\bullet(Y)\,.$$

Le dernier isomorphisme résulte de la formule de Künneth généralisée (voir [3, V, 10.19]) pour l'hypercohomologie d'un produit tensoriel externe. Le produit d'intersection usuel induit alors un produit

$$\mathrm{I}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')}\,\mathrm{H}_i(X\times Y)\times \mathrm{I}_{(\mathfrak{q},\mathfrak{q}')}\,\mathrm{H}_j(X\times Y)\xrightarrow{\cap}\mathrm{I}_{(\mathfrak{r},\mathfrak{r}')}\,\mathrm{H}_{i+j-2(m+n)}(X\times Y)$$

pour $\mathfrak{r}\geq\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}'\geq\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}'$.

Le lien avec la théorie usuelle est donné par la formule de Künneth en homologie d'intersection: Au niveau des complexes de faisceaux, celle-ci fournit un isomorphisme

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}^{\bullet}_{X\times Y}\cong\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}^{\bullet}_{X}\overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}\mathcal{C}^{\bullet}_{Y}$$

bien connu dans les cas particuliers les plus importants $\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}$ (cf. [14, 6.3]) et $\mathfrak{t}$, et encore valable pour toutes les perversités $\mathfrak{p}$ satisfaisant à la condition

$$\mathfrak{p}(2k)+\mathfrak{p}(2l)\leq\mathfrak{p}(2k+2l)\leq\mathfrak{p}(2k)+\mathfrak{p}(2l)+2$$

(voir [8]). Pour ces perversités, nous avons donc l'isomorphisme

$$\mathrm{I}_{\mathfrak{p}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(X\times Y)\;\cong\;\mathrm{I}_{(\mathfrak{p},\mathfrak{p})}\,\mathrm{H}_{\bullet}(X\times Y)\,.$$

Pour commencer la discussion de l'application envisagée, supposons dans un premier temps que les variétés X et Y soient compactes. Nous faisons l'hypothèse que la classe d'homologie $[\Gamma_f]\in\mathrm{H}_{2m}(X\times Y)$ se relève en une classe γ dans $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}\,\mathrm{H}_{2m}(X\times Y)\;\cong\;\mathrm{I}_{(\mathfrak{m},\mathfrak{m})}\,\mathrm{H}_{2m}(X\times Y)$. Comme la classe fondamentale $[Y]$ appartient d'une manière naturelle à $\mathrm{I}_{\mathfrak{o}}\,\mathrm{H}_{2n}(Y)$, on peut définir un homomorphisme $\nu_\gamma:\mathrm{IH}_{\bullet}(X)\to\mathrm{IH}_{\bullet}(Y)$ par la composition:

$$\begin{array}{ccccccc}\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(X) & \to & \mathrm{I}_{(\mathfrak{m},\mathfrak{o})}\,\mathrm{H}_{\bullet+2n}(X\times Y) & \to & \mathrm{I}_{(\mathfrak{t},\mathfrak{m})}\,\mathrm{H}_{\bullet}(X\times Y) & \to & \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(Y)\\ \xi & \mapsto & \xi\times[Y] & \mapsto & (\xi\times[Y])\cap\gamma & \mapsto & q_{\bullet}\left((\xi\times[Y])\cap\gamma\right),\end{array}$$

où $q_{\bullet}$ désigne la projection canonique

$$\mathrm{I}_{(\mathfrak{t},\mathfrak{m})}\,\mathrm{H}_{\bullet}(X\times Y)\cong\mathrm{I}_{\mathfrak{t}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(X)\otimes\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(Y)\twoheadrightarrow\mathrm{I}_{\mathfrak{t}}\,\mathrm{H}_0(X)\otimes\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(Y)\twoheadrightarrow\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}\,\mathrm{H}_{\bullet}(Y)\,,$$

en utilisant l'homomorphisme d'augmentation $\mathrm{I}_{\mathfrak{t}}\,\mathrm{H}_0(X)\cong\mathrm{H}_0(\widetilde{X})\twoheadrightarrow\mathbb{Q}$ (pour $\widetilde{X}$ la normalisée de X). Un tel morphisme ν_γ est un bon candidat pour un morphisme associé ν_f. Nous montrerons en effet dans le Théorème 2.7 qu'on obtient un homomorphisme associé ν_f en choisissant convenablement (dans un sens précisé ci-dessous) un relèvement γ du cycle Γ_f en homologie d'intersection.

Il semble naturel qu'un *bon choix* du relèvement γ devrait induire de façon cohérente une famille de morphismes $\nu_V=\nu_{\gamma_V}:\mathrm{IH}_{\bullet}(f^{-1}V)\to\mathrm{IH}_{\bullet}(V)$ pour les ouverts V de Y, satisfaisant des conditions de compatibilité en ce sens qu'elles permettent de présenter une version faisceautique de la construction précédente. Cela nous amène d'une part à étudier le cas non-compact, d'autre part à préciser la condition de support pour qu'un relèvement soit bien choisi. L'avantage de cette présentation se manifestera dans la section (3.5), où nous devrons passer du cas complexe au cas arithmétique.

Dans le cas de variétés qui ne sont plus forcément compactes, notons d'abord que le graphe Γ_f du morphisme $f : X \to Y$ induit toujours une classe $[\Gamma_f]$ dans $\mathrm{H}_{2m}^{\Pi_X}(X \times Y)$, homologie à *supports propres* sur X, i.e. à supports dans la famille

$$\Pi_X := \{A \hookrightarrow X \times Y\,;\ \mathrm{pr}_X|_A : A \to X \ \text{ est propre}\}\ .$$

Or s'il existe un relèvement γ de cette classe en homologie d'intersection correspondante $\mathrm{IH}_{2m}^{\Pi_X}(X \times Y)$, alors pour toute classe ξ de $\mathrm{IH}_\bullet(X)$, donc à supports compacts, la classe $\nu_\gamma(\xi) := (\xi \times [Y]) \cap \gamma$ est également à supports compacts, bien que ceci ne soit pas vrai en général ni pour $\xi \times [Y]$ ni pour γ. Bien entendu, dans la définition de ν_γ, il faut remplacer les supports compacts qui figurent dans $\mathrm{I}_{(\mathfrak{m},\mathfrak{o})}\mathrm{H}_\bullet(X \times Y)$ par la famille Π_Y des supports propres sur Y.

De façon locale, étant donné un ouvert V de Y, notons $U := f^{-1}(V) \Subset X$. Alors, pour tout relèvement $\gamma_V \in \mathrm{IH}_{2m}^{\Pi_U}(U \times V)$ de $\Gamma_f \cap (U \times V)$, la construction précédente nous fournit un homomorphisme $\nu_V := \nu_{\gamma_V} : \mathrm{IH}_\bullet(f^{-1}(V)) \to \mathrm{IH}_\bullet(V)$. Dans cette situation, se pose la question de pouvoir choisir les relèvements γ_V de manière à ce que la famille $(\nu_V)_{V \Subset Y}$ satisfasse la condition naturelle de compatibilité pour un homomorphisme de *pré-cofaisceaux*: Pour tout couple d'ouverts $V \Subset V' \Subset Y$, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{IH}_\bullet(f^{-1}(V)) & \xrightarrow{\nu_V} & \mathrm{IH}_\bullet(V) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{IH}_\bullet(f^{-1}(V')) & \xrightarrow{\nu_{V'}} & \mathrm{IH}_\bullet(V')
\end{array}$$

doit être commutatif.

Pour une construction satisfaisant cette condition, notons que la classe $[\Gamma_f]$ s'interprète de façon naturelle comme élément de l'homologie $\mathrm{H}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y)$ à supports dans Γ_f, et supposons qu'elle admette un relèvement γ en homologie d'intersection correspondante $\mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y)$. Comme on a un isomorphisme[5]

$$\mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) \ \cong \ \varprojlim_{\Gamma_f \subset W \Subset X \times Y} \mathrm{IH}_{2m}^{\mathrm{cld}(X \times Y)|W}(W)$$

(voir la Proposition 2.5), nous obtenons des relèvements $(\gamma_V)_{V \Subset Y}$ satisfaisant la condition précédente en prenant pour γ_V l'image de γ par l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) \longrightarrow \mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f \cap (U \times V)}(U \times V) \longrightarrow \mathrm{IH}_{2m}^{\Pi_U}(U \times V)\ .$$

[5]Pour une famille de supports Φ dans un espace topologique X et pour un sous-ensemble S de X, on utilisera les familles de supports $\Phi|S := \{A \in \Phi\,;\ A \subset S\}$ et $\Phi \cap S := \{A \cap S\,;\ A \in \Phi\}$.

Ainsi, l'existence, pour tout morphisme $f : X \to Y$ donné, d'une famille d'homomorphismes compatibles $\nu_V : \mathrm{IH}_\bullet(f^{-1}(V)) \to \mathrm{IH}_\bullet(V)$ est une conséquence de l'énoncé suivant concernant les *bons* relèvements de cycles algébriques en homologie d'intersection: *Pour tout cycle algébrique C, de dimension pure m, dans une variété algébrique Z de dimension pure, la classe $[C] \in \mathrm{H}^C_{2m}(Z)$ est contenue dans l'image de l'homomorphisme de comparaison $\omega^C_Z : \mathrm{IH}^C_{2m}(Z) \to \mathrm{H}^C_{2m}(Z)$* (cf. Théorème 2.4).

En fait, l'existence de morphismes associés au niveau des faisceaux n'est pas seulement une conséquence de cet énoncé, elle lui est même équivalente (Corollaire 2.8). Nous esquissons ci-dessous l'argument réciproque dans la catégorie des variétés compactes: Pour le plongement $C \hookrightarrow Z$ d'un cycle algébrique comme ci-dessus, soit $(\nu_W)_{W \Subset Z}$ une famille compatible d'homomorphismes associés $\nu_W : \mathrm{IH}_\bullet(C \cap W) \to \mathrm{IH}_\bullet(W)$. Alors il en résulte un relèvement γ de la classe $[C]$ en homologie d'intersection, à supports dans C, de la manière suivante: Le cycle C admet un système fondamental de voisinages ouverts W dans Z tels que l'inclusion $C \hookrightarrow W$ soit une *bonne* équivalence d'homotopie (cf. § 4, preuve de la proposition 2.5). Pour un tel voisinage W, on a donc des isomorphismes $\mathrm{H}_\bullet(C) \cong \mathrm{H}_\bullet(W) \cong \mathrm{H}^C_\bullet(Z)$ et $\mathrm{IH}_\bullet(W) \cong \mathrm{IH}^C_\bullet(Z)$ et un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{IH}_\bullet(C) & \xrightarrow{\nu_W} & \mathrm{IH}_\bullet(W) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{IH}^C_\bullet(Z) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \omega_C} & & \big\downarrow{\scriptstyle \omega_W} & & \big\downarrow{\scriptstyle \omega^C_Z} \\
\mathrm{H}_\bullet(C) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}_\bullet(W) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}^C_\bullet(Z)\,.
\end{array}$$

Comme la flèche ω_C est un isomorphisme en degré $2m$, nous obtenons le relèvement cherché.

2. L'énoncé des résultats

Dans cette section, toutes les variétés algébriques seront de dimension pure et, sauf mention explicite du contraire, nous ne considérons que l'homologie d'intersection par rapport à la perversité moitié et à coefficients rationnels.

(2.1) *Le théorème d'existence local.* Le théorème d'existence de morphismes associés, résultat central de ce travail, s'exprime dans le langage des faisceaux:

THÉORÈME 2.1 (Théorème principal). *Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre variétés algébriques complexes de dimensions pures m et n respectivement. Alors, il existe des morphismes contravariants $\mu^f : f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y) \to \mathcal{IC}^\bullet_X$ et covariants $\nu_f : \mathcal{IC}^\bullet_X \to f^!(\mathcal{IC}^\bullet_Y)[2s]$ (où $s := n - m$)de complexes de faisceaux de* *chaînes d'intersection à coefficients rationnels qui sont associés à f, c'est-à-dire qu'ils sont compatibles avec les morphismes de comparaison α et ω au sens de la commutativité des diagrammes suivants:*

$$(\mathrm{D}^{\mu})\qquad \begin{array}{ccc} f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y) & \xrightarrow{\mu^f} & \mathcal{IC}^\bullet_X \\ \Big\uparrow{\scriptstyle f^*(\alpha_Y)} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha_X} \\ f^*(\mathbb{Q}_Y) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Q}_X \end{array}$$

et

$$(\mathrm{D}_{\nu})\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{IC}^\bullet_X & \xrightarrow{\nu_f} & f^!(\mathcal{IC}^\bullet_Y)[2s] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \omega_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f^!(\omega_Y)[2s]} \\ \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X & \xrightarrow{\cong} & f^!(\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Y)[2s]. \end{array}$$

Les morphismes contravariants μ^f et covariants ν_f sont en correspondance biunivoque, par dualité de Poincaré-Verdier.

De façon générale, les morphismes associés à f ne sont pas uniquement déterminés; d'autre part, ils n'existent pas toujours en homologie d'intersection à coefficients entiers. Cependant, pour quelques classes particulièrement importantes de morphismes, on a des résultats d'unicité et des résultats d'existence à coefficients entiers (ou même dans l'anneau R). Nous aborderons ces questions dans la section (2.4) ci-dessous.

L'observation suivante, bien qu'évidente, nous sera souvent utile:

LEMME 2.2 (Lemme de composition). *Si $g : Y \to Z$ est un autre morphisme et si μ^f, μ^g, ν_f et ν_g sont des morphismes associés à f et à g respectivement, alors $\mu^f \circ f^*(\mu^g)$ et $f^!(\nu_g)[2s]\circ\nu_f$ sont des morphismes $\mu^{g\circ f}$ et $\nu_{g\circ f}$ associés au composé $g\circ f$.*

Ceci nous permet de considérer les paires (f,μ^f), resp. (f,ν_f), comme morphismes de la *catégorie des variétés algébriques (de dimension pure) avec leur structure naturelle d'homologie d'intersection* (cf. [3, IX,C]). De ce point de vue, notre résultat principal dit que le foncteur oubli de cette catégorie dans celle des variétés algébriques est un foncteur plein.

(2.2) *Le théorème d'existence global.* La première conséquence du théorème principal est l'existence d'homomorphismes globaux associés à f dont nous énonçons les cas particuliers les plus intéressants:

THÉORÈME 2.3. *Avec les mêmes hypothèses qu'au Théorème 2.1, on a les résultats suivants:*

1) *Il existe des homomorphismes contravariants $\mu^f = \mu^f_{\mathrm{cld}} : \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{2n-\bullet}(Y) \to \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{2m-\bullet}(X)$ à supports fermés, et covariants $\nu_f = \nu^{\mathrm{c}}_f : \mathrm{IH}_\bullet(X) \to \mathrm{IH}_\bullet(Y)$ à*

supports compacts qui sont associés au morphisme f, i.e. qui rendent commutatifs les diagrammes suivants:

$$(\mathrm{D}^{\mu}_{\mathrm{cld}}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{2n-\bullet}(Y) \arrow[r, "\mu^f"] & \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{2m-\bullet}(X) \\ \mathrm{H}^{\bullet}(Y) \arrow[u, "\alpha_Y"'] \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{H}^{\bullet}(X) \arrow[u, "\alpha_X"'] \end{tikzcd}$$

et

$$(\mathrm{D}^{\mathrm{c}}_{\nu}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{IH}_{\bullet}(X) \arrow[r, "\nu_f"] \arrow[d, "\omega_X"] & \mathrm{IH}_{\bullet}(Y) \arrow[d, "\omega_Y"] \\ \mathrm{H}_{\bullet}(X) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{H}_{\bullet}(Y). \end{tikzcd}$$

2) *Si l'application $f : X \to Y$ est propre, alors il existe des homomorphismes associés contravariants à supports compacts $\mu^f = \mu^f_{\mathrm{c}} : \mathrm{IH}_{2n-\bullet}(Y) \to \mathrm{IH}_{2m-\bullet}(X)$ et covariants à supports fermés $\nu_f = \nu_f^{\mathrm{cld}} : \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{\bullet}(X) \to \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{\bullet}(Y)$ qui rendent commutatifs les diagrammes correspondants*:

$$(\mathrm{D}^{\mu}_{\mathrm{c}}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{IH}_{2n-\bullet}(Y) \arrow[r, "\mu^f"] & \mathrm{IH}_{2m-\bullet}(X) \\ \mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{c}}(Y) \arrow[u, "\alpha_Y"'] \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{c}}(X) \arrow[u, "\alpha_X"'] \end{tikzcd}$$

et

$$(\mathrm{D}^{\mathrm{cld}}_{\nu}) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{\bullet}(X) \arrow[r, "\nu_f"] \arrow[d, "\omega_X"] & \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{\bullet}(Y) \arrow[d, "\omega_Y"] \\ \mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{\bullet}(X) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{\bullet}(Y). \end{tikzcd}$$

Remarques. a) L'homomorphisme ν_f du diagramme $(\mathrm{D}^{\mathrm{cld}}_{\nu})$, associé à un morphisme propre, admet une factorisation naturelle par $\mathrm{IH}^{f(X)}_{\bullet}(Y)$, l'homologie d'intersection de Y à supports dans le fermé $f(X)$ (voir la section suivante).

b) Bien entendu, on a des énoncés analogues pour des familles de supports plus générales, sous les hypothèses techniques du lemme 4.1.

(2.3) *Le théorème de relèvement.* La deuxième conséquence du théorème principal concerne le relèvement des cycles algébriques en homologie d'intersection. Pour l'énoncer, nous utilisons la notion d'homologie d'intersection $\mathrm{IH}^{C}_{\bullet}(Z)$ d'une variété algébrique Z à supports dans une sous-variété fermée C. Cette notion est explicitée ci-dessous.

THÉORÈME 2.4. *Soit C une sous-variété fermée, de dimension pure m, d'une variété algébrique Z. Alors sa classe d'homologie $[C]$ (à coefficients* *rationnels) est dans l'image de l'homomorphisme de comparaison:*

$$\mathrm{IH}^C_{2m}(Z) \longrightarrow \mathrm{H}^C_{2m}(Z)\ .$$

Bien que l'homologie $\mathrm{H}^C_{2m}(Z)$ à supports dans C s'identifie à l'homologie usuelle $\mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{2m}(C)$, l'homologie d'intersection correspondante $\mathrm{IH}^C_{2m}(Z)$ ne s'interprète pas immédiatement d'une façon élémentaire. Notons d'abord qu'on a toujours

$$\mathrm{IH}^\Phi_\bullet(Z) \;\cong\; \mathrm{H}^{2n-\bullet}(\Gamma_\Phi(Z,\mathcal{A}^\bullet))$$

pour une famille de supports Φ dans Z et un complexe $\mathcal{A}^\bullet$ de faisceaux Γ_Φ-acycliques qui est quasi-isomorphe au complexe $\mathcal{IC}^\bullet_Z$. Or les faisceaux $\mathcal{IC}^q_Z$ des chaînes d'intersection sont mous ([3, II, 5.1]); par conséquent ils sont Γ_Φ-acycliques pour toute famille paracompactifiante Φ dans Z, comme celles des fermés ou des compacts de Z, et il vient $\mathrm{IH}^\Phi_\bullet(Z) \;\cong\; \mathrm{H}^{2n-\bullet}(\Gamma_\Phi(Z,\mathcal{IC}^\bullet_Z))$. Mais comme la famille des fermés d'une sous-variété propre n'est pas paracompactifiante dans la variété ambiante, on ne peut pas calculer l'homologie d'intersection $\mathrm{IH}^C_\bullet(Z)$ par passage à la cohomologie à partir du complexe $\Gamma_C(Z,\mathcal{IC}^\bullet_Z)$ des sections à support dans le fermé C. On peut en voir aussi la raison d'un point de vue géométrique en disant que, en général, la sous-variété C n'est pas suffisamment transversale aux strates singulières de Z. Néanmoins, nous montrerons dans la section 4 la proposition suivante donnant une l'interprétation géométrique de $\mathrm{IH}^C_\bullet(Z)$, même à coefficients dans l'anneau R:

PROPOSITION 2.5. *Soit C une sous-variété fermé de Z, alors on a un isomorphisme*

$$\mathrm{IH}^C_\bullet(Z) \;\cong\; \varprojlim_{C\subset W\Subset Z} \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}(Z)|W}_\bullet(W)\ .$$

Si de plus le plongement $C \hookrightarrow Z$ est normalement non-singulier [14, 5.4.1], *alors ces deux groupes sont isomorphes à* $\mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_\bullet(C)$.

En particulier, d'après le théorème 2.4, pour tout cycle algébrique C de Z, la classe d'homologie $[C]$ dans $\mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{2m}(Z)$ contient des cycles d'intersection γ arbitrairement proches de C, i.e. étant donné un voisinage W de C dans Z, on peut trouver un tel cycle $|\gamma|$ qui soit contenu dans W, et de même pour une chaîne réalisant l'homologie entre ces cycles C et γ.

Puisque les classes de Chern (au sens de Schwartz [20] et [16]) d'une variété algébrique, en homologie, sont représentables par des cycles algébriques, le théorème de relèvement nous permet de répondre positivement à la conjecture bien connue (voir [3, IX,H] et [1, § 3]) concernant le relèvement de ces classes:

COROLLAIRE 2.6. *Les classes de Chern-Schwartz-MacPherson d'une variété algébrique, en homologie, se relèvent en homologie d'intersection, pour la perversité moitié et à coefficients rationnels.*

Ce résultat laisse espérer la possibilité d'établir une théorie générale de nombres caractéristiques pour les variétés singulières. Malheureusement, il n'y a pas toujours de relèvement canonique, comme le montre l'exemple b) de 2.5 ci-dessous, explicité dans [5]. D'autre part, les résultats précédents, valables pour la perversité moitié (et les perversités supérieures) ne permettent pas de multiplier plus de deux classes d'homologie.

(2.4) *Le théorème de classification et conditions d'unicité.* Nous avons déjà remarqué que les morphismes μ^f ne sont pas uniquement déterminés par le morphisme f. Le résultat suivant permet de déterminer le degré de liberté de cette ambiguïté. En même temps, il précise le raisonnement géométrique de la première section et complète le théorème principal, en montrant qu'il est équivalent au théorème de relèvement:

THÉORÈME 2.7. *Il y a une correspondance biunivoque entre les morphismes μ^f, resp. ν_f, rendant commutatif le diagramme* (D^μ), *resp.* (D_ν), *du théorème principal, et les classes $\gamma \in \mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y)$ qui relèvent la classe d'homologie $[\Gamma_f] \in \mathrm{H}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y)$.*

Le résultat reste valable si nous remplaçons les coefficients rationnels par un corps quelconque et nous obtenons ainsi:

COROLLAIRE 2.8. *Les quatre énoncés suivants sont équivalents, même à coefficients dans un corps quelconque*:

1) *Tout cycle algébrique C d'une variété algébrique Z est homologue à un cycle d'intersection ξ arbitrairement proche de C dans Z, cette homologie étant réalisée par des chaînes dont le support est également arbitrairement proche de C.*

2) *Pour tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques, il existe un homomorphisme associé $\mu^f : f^*(\mathcal{IC}_Y^\bullet) \to \mathcal{IC}_X^\bullet$.*

3) *Pour tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques, il existe un homomorphisme associé $\nu_f : \mathcal{IC}_X^\bullet \to f^!(\mathcal{IC}_Y^\bullet)[2s]$.*

4) *Pour tout morphisme propre $f : X \to Y$ entre variétés algébriques, il existe un homomorphisme associé $\nu_f : \mathrm{IH}_\bullet(X) \to \mathrm{IH}_\bullet^{f(X)}(Y)$.*

D'après le théorème principal, ces énoncés sont tous vrais si le corps de coefficients est de caractéristique 0, mais ils sont faux dans le cas de caractéristique positive p, comme le montre l'exemple a) dans la section (2.5).

Nous discutons maintenant quelques résultats d'unicité ou d'existence à coefficients entiers, pour les morphismes associés.

Conditions d'unicité. Les morphismes associés μ^f et ν_f sont determinés de façon unique par f dans les cas particuliers suivants:

a) si Y est *lisse* (dans ce cas α_Y et donc $f^*(\alpha_Y)$ sont des isomorphismes et μ^f est déterminé par α_X),

b) si f est un morphisme dominant équidimensionnel ou, plus généralement, une application *placide* (cf. (3.3)),

c) si f est le plongement d'une sous-variété fermée X de codimension 1 dans Y telle que Y soit localement analytiquement irréductible le long de X (cf. (3.6)),

d) si f est une application *homologiquement petite* dans le sens de [14, 6.2].

Dans les cas a), b) et d), le morphisme μ^f existe même à coefficients entiers (ou dans l'anneau R).

Nous discutons brièvement le cas d), ainsi que quelques conséquences du théorème de décomposition. Remarquons d'abord que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ tel que dans le théorème 2.1, on a une correspondance biunivoque, par adjonction, entre morphismes $\mu^f : f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y \to \mathcal{IC}^\bullet_X$ associés à f (à coefficients dans l'anneau R), et morphismes $\lambda : \mathcal{IC}^\bullet_Y \to \mathbf{R}f_*\mathcal{IC}^\bullet_X$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{IC}^\bullet_Y & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{R}f_*\mathcal{IC}^\bullet_X \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha_Y} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{R}f_*\alpha_X} \\ R_Y & \xrightarrow{\kappa} & \mathbf{R}f_*R_X \end{array}$$

où κ est l'adjoint de l'isomorphisme canonique $f^*R_Y \xrightarrow{\cong} R_X$.

Il suffit donc d'étudier l'existence et l'unicité du morphisme λ pour un morphisme homologiquement petit. Notons que, par définition, un tel morphisme est propre, surjectif et génériquement fini, ce qui implique l'existence d'un ouvert (de Zariski) partout dense lisse $V \Subset Y$ tel que la restriction $f|_U : U := f^{-1}(V) \to V$ soit un revêtement non ramifié. Alors le faisceau f_*R_U est un système local sur V, et définit donc un complexe $\mathcal{IC}^\bullet_Y(f_*R_U)$ sur Y. D'après [14, 6.2], il vient, comme propriété des morphismes homologiquement petits, un isomorphisme naturel $\mathbf{R}f_*(\mathcal{IC}^\bullet_X) \cong \mathcal{IC}^\bullet_Y(f_*R_U)$. D'autre part, en utilisant ([3, V, 9.1(b) et 9.2]), on a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}\,(\mathcal{IC}^\bullet_Y, \mathcal{IC}^\bullet_Y(f_*R_U)) \;\cong\; \mathrm{Hom}(R_V, f_*R_U) \;\cong\; \mathrm{Hom}\,(R_Y, \mathcal{IC}^\bullet_Y(f_*R_U))$$

et l'homomorphisme canonique $R_V \to f_*R_U$ nous fournit alors le morphisme λ cherché.

Ajoutons que l'on a un résultat de canonicité dans un autre cas particulier, à l'aide du théorème de décomposition (voir [2, 6.2.5], [7, 3.2.4] ou [17, § 12]), et donc dans le cadre des coefficients rationnels. Si le morphisme $f : X \to Y$ est propre, surjectif et génériquement fini, alors le complexe $\mathbf{R}f_*\mathcal{IC}^\bullet_X$ se décompose (en général de façon non canonique) en somme directe dont l'un des termes est isomorphe au complexe $\mathcal{IC}^\bullet_Y(f_*\mathbb{Q}_U)$. D'une telle décomposition, on déduit un morphisme λ dont l'exemple b) de (2.5) ci-dessous met en évidence l'ambiguïté. Cependant, si f est *projectif*, alors d'après les résultats de [11] et [2, 5.4.10], le choix d'un faisceau relativement ample $\mathcal{O}(1)$ sur X fournit un morphisme canonique[6] $\alpha_{\mathcal{O}(1)} : \mathcal{IC}_Y^\bullet(f_*\mathbb{Q}_U) \to \mathbf{R}f_*\mathcal{IC}_X^\bullet$, d'où un choix naturel de morphisme $\lambda = \lambda_{\mathcal{O}(1)} : \mathcal{IC}_Y^\bullet \to \mathbf{R}f_*\mathcal{IC}_X^\bullet$ par composition avec le morphisme canonique $\mathcal{IC}_Y^\bullet \to \mathcal{IC}_Y^\bullet(f_*\mathbb{Q}_U)$.

(2.5) *Exemples.* Les exemples ci-dessous apportent une réponse négative aux deux questions suivantes:

a) *Existe-t-il toujours un relèvement de cycles algébriques en homologie d'intersection à coefficients dans un corps de caractéristique positive?*

b) *Peut-on associer à tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques de dimension pure un seul morphisme compatible ν_f de manière à ce que, avec l'homomorphisme induit* $\mathrm{IH}_\bullet(\nu_f) : \mathrm{IH}_\bullet(X) \longrightarrow \mathrm{IH}_\bullet(Y)$*, l'homologie d'intersection devienne fonctorielle?*

Exemple a). Nous prenons pour X le cône, dans $\mathbb{P}_{d+1}$, sur la courbe rationelle normale $\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_d$ de degré d (l'image du plongement de Veronese). Alors, pour tout diviseur premier p de d, on a $\mathrm{IH}_2(X, \mathbf{F}_p) = 0$. D'autre part, $\mathrm{H}_2(X, \mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p$ est engendré par la classe d'une génératrice du cône, et celle-ci n'admet pas de relèvement en homologie d'intersection.

Exemple b). Il existe un morphisme de variétés compactes $f : X \to Y$ admettant deux factorisations différentes $X \xrightarrow{g_i} X_i \xrightarrow{h_i} Y$ où les morphismes associés ν_{g_i} et ν_{h_i} sont uniques, mais leurs composés sont déjà différents au niveau global.

Un tel exemple est obtenu dans [5] en prenant pour X l'éclaté, en son sommet, du cône $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_4$ sur la quadrique lisse $Q \hookrightarrow \mathbb{P}_3$, image du plongement de Segre de $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. La composition $p_i := \mathrm{pr}_i \circ \pi$ de la projection du fibré en droites projectives $\pi : X \to Q$ et de $\mathrm{pr}_i : Q \cong \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ munit la variété lisse X de deux structures différentes de fibré sur $\mathbb{P}_1$. Chaque fibre ${}_iF_a$ est l'éclaté en un point (le sommet du cône) du cône sur la droite $\{a\} \times \mathbb{P}_1$ ou $\mathbb{P}_1 \times \{a\}$, contenue dans Q; ce cône est un plan projectif et par conséquent ${}_iF_a$ est la surface rationelle réglée Σ_1 (surface de Hirzebruch). L'intersection de ${}_iF_a$ avec la sous-variété exceptionelle $E \hookrightarrow X$ de l'éclatement $f : X \to Y$ est la courbe exceptionelle ${}_iE_a$ de ${}_iF_a$. On peut alors contracter, dans chaque fibre ${}_iF_a$, cette courbe ${}_iE_a$, et on obtient ainsi l'application $g_i : X \to X_i$. Evidemment, l'application f se factorise en $X \xrightarrow{g_i} X_i \xrightarrow{h_i} Y$. Or, les variétés X, X_1 et X_2 étant lisses, les homomorphismes associés globaux ν_{g_i} s'identifient aux homomorphismes induits $(g_i)_\bullet : \mathrm{H}_\bullet(X) \to \mathrm{H}_\bullet(X_i)$. En outre, les h_i sont des résolutions petites, ce qui implique que les homomorphismes associés globaux

[6] Lettre de Deligne aux auteurs du 5 février 1993.

ν_{h_i} sont des isomorphismes. Mais le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}_\bullet(X) \arrow[dl, "(g_1)_\bullet"'] \arrow[dr, "(g_2)_\bullet"] & \\ \mathrm{H}_\bullet(X_1) \arrow[dr, "\cong"'] & & \mathrm{H}_\bullet(X_2) \arrow[dl, "\cong"] \\ & \mathrm{IH}_\bullet(Y) & \end{tikzcd}$$

n'est pas commutatif puisque les homomorphismes $(g_i)_\bullet$ ont des noyaux différents.

3. Démonstration du théorème principal

Nous allons démontrer le résultat principal en plusieurs étapes. D'abord nous montrons que l'on peut ramener la preuve de l'existence d'un morphisme μ^f aux cas particuliers d'un plongement et d'une projection, et nous établissons un lemme d'extension qui servira dans la démonstration de ces deux cas. Dans une deuxième étape, nous construisons le morphisme μ^f dans le cas d'une projection, et plus généralement d'une application placide, cas où le morphisme μ^f est même unique. Nous traitons ensuite le cas d'un plongement $X \hookrightarrow Y$; il se réduit à la situation où les deux variétés sont irréductibles et où X est de codimension 1 dans Y. Enfin, nous discutons brièvement les problèmes de l'unicité et d'une généralisation aux coefficients entiers.

Le Théorème de Pureté intervient précisément dans la démonstration de l'existence de μ^f dans le cas du plongement de codimension 1. Dans la section suivante, nous indiquerons, après la preuve du théorème 2.4, comment le Théorème de Décomposition permet de donner une démonstration alternative de l'existence de *bons* relèvements de cycles algébriques et donc aussi de notre résultat principal d'existence de morphismes associés, en utilisant le corollaire 2.8.

(3.1) *Premières réductions et choix de stratifications.*

Il suffit de construire les morphismes contravariants μ^f: En effet, le foncteur dualisant $\widetilde{\mathbf{D}}_X$ transforme biunivoquement les morphismes associés contravariants μ^f en leurs équivalents covariants ν_f et réciproquement: à partir d'un diagramme commutatif (D^μ), on obtient un diagramme commutatif (D_ν) en posant $\nu_f := \widetilde{\mathbf{D}}_X(\mu^f)$ grâce aux relations $\widetilde{\mathbf{D}}\mathcal{IC}^\bullet \cong \mathcal{IC}^\bullet$ et $\widetilde{\mathbf{D}}_X f^*(-) = f^!\widetilde{\mathbf{D}}_Y(-)[2s]$. La réciproque est une conséquence de la bidualité [3, V, 8.10]. Ainsi, nous avons déjà vérifié le dernier énoncé du théorème 2.1.

Il suffit de considérer les cas particuliers d'un plongement fermé et d'une projection: En effet, le morphisme f se factorise sous la forme

$$X \cong \Gamma_f \hookrightarrow X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y ,$$

et l'assertion découle immédiatement du lemme de composition.

Choix de stratifications: Pour une stratification de Whitney algébrique (T_j) de Y (voir [21]) avec $\dim T_j = j$ pour chaque strate non vide, les ouverts

$$V_k := \bigcup_{j>n-k} T_j \subset Y$$

satisfont aux propriétés suivantes: $V_1 = T_n$ est la strate ouverte partout dense; on a $V_{k+1} = V_k \cup T_{n-k}$ et $V_{n+1} = Y$. Notons $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ l'application de normalisation, alors on a une stratification évidente de $\widetilde{Y}$ dont les strates sont les images réciproques $\widetilde{T_j} := \pi^{-1}(T_j)$ des strates de Y, munies de la structure réduite. Chaque restriction $\pi|_{\widetilde{T_j}} : \widetilde{T_j} \to T_j$ est un revêtement non ramifié; de plus, si la stratification (T_j) est suffisamment fine, l'ouvert $\pi^{-1}(V_2)$ de $\widetilde{Y}$ est lisse, puisque les singularités d'une variété normale sont de codimension au moins 2.

Nous choisissons aussi une stratification de Whitney algébrique (S_i) de X (à strates équidimensionnelles, mais dont l'indice ne correspond pas forcément à la dimension) telle que l'image $f(S_i)$ de toute strate de X soit contenue dans une strate de Y. Pour les ouverts images réciproques

$$U_k := f^{-1}(V_k) \subset X ,$$

nous avons des identifications évidentes de complexes

$$\mathcal{IC}^\bullet_X|_{U_k} = \mathcal{IC}^\bullet_{U_k} \quad \text{et} \quad (f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_{U_k} = f^*\mathcal{IC}^\bullet_{V_k} .$$

(3.2) *Le lemme d'extension.* Dans les deux cas particuliers à considérer, nous allons vérifier l'existence d'un morphisme μ^f par récurrence sur les ouverts U_k définis ci-dessus. Nous montrerons d'abord l'existence d'un tel morphisme sur un ouvert partout dense (U_1 ou U_2), puis nous le prolongerons de l'ouvert U_k à U_{k+1} à l'aide du lemme d'extension ci-dessous.

Pour une variété algébrique[7] Z, soient W un ouvert de Z et S le fermé complémentaire; notons $i : W \xrightarrow{\subset} Z$ et $j : S \hookrightarrow Z$ les inclusions. Pour tout complexe $\mathcal{B}^\bullet$ de R-modules sur Z, nous considérons le triangle distingué

$$(\Delta\mathcal{B}^\bullet) \qquad \begin{array}{ccc} j_!j^!\mathcal{B}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{B}^\bullet \\ {}_{[1]}\nwarrow^{\delta} & & \swarrow_{\sigma} \\ & \mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet & \end{array}$$

[7] Il suffit même de considérer un espace topologique comme dans [3, V, 1].

(cf. [3, V, 5.14]) dans la catégorie dérivée. Pour un deuxième complexe $\mathcal{A}^\bullet$ de R-modules sur Z, nous obtenons un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet) \arrow[r] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, \mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet) \\ & \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet|_W, \mathcal{B}^\bullet|_W)\ . \arrow[u, "\iota", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

La flèche horizontale est l'homomorphisme de composition avec σ et la flèche ρ est l'homomorphisme de restriction. L'isomorphisme ι est l'inverse de l'isomorphisme d'adjonction; il est défini par $\iota(\varphi) := i_*(\varphi)\circ\sigma_{\mathcal{A}^\bullet}$ où $\sigma_{\mathcal{A}^\bullet}$ est le morphisme naturel $\mathcal{A}^\bullet \to \mathbf{R}i_*i^*\mathcal{A}^\bullet$. Notons que la flèche d'adjonction ι^{-1} est obtenue de la même façon que ρ en remplaçant $\mathcal{B}^\bullet$ par $\mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet$. Le résultat suivant généralise celui de [3, V, 9.1(b)]:

LEMME 3.1 (Lemme d'extension). (i) *Un morphisme φ, élément de* $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet|_W, \mathcal{B}^\bullet|_W)$, *est dans l'image de ρ si et seulement si l'on a* $\delta(\iota(\varphi)) = 0$.

(ii) *S'il existe des entiers a et b tels que:*

(α) $\mathcal{A}^\bullet \cong \tau_{\leq a}\mathcal{A}^\bullet$, *et*

(β) *le morphisme σ induit un quasi-isomorphisme* $\mathcal{B}^\bullet \cong \tau_{\leq b}(\mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet)$, *alors ρ est bijectif si $a \leq b$, et injectif si $a = b+1$.*

Preuve. Le triangle distingué ($\Delta\mathcal{B}^\bullet$) donne lieu à une suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, j_!j^!\mathcal{B}^\bullet) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, \mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet, j_!j^!\mathcal{B}^\bullet[1]) \to \cdots$$

d'où l'assertion (i). Pour (ii), remarquons que l'hypothèse (β) implique l'existence de quasi-isomorphismes

$$j_!j^!\mathcal{B}^\bullet \cong \tau^{\geq b+2}(\mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet[-1]) \cong \tau^{\geq b+2}(j_!j^!\mathcal{B}^\bullet)\ .$$

Alors l'hypothèse (α) entraîne les égalités

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet,\ j_!j^!\mathcal{B}^\bullet) = \mathrm{Hom}\left(\tau_{\leq a}\mathcal{A}^\bullet,\ \tau^{\geq b+2}(j_!j^!\mathcal{B}^\bullet)\right) = 0$$

si $a \leq b+1$ et

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^\bullet,\ j_!j^!\mathcal{B}^\bullet[1]) = \mathrm{Hom}\left(\tau_{\leq a}\mathcal{A}^\bullet,\ \tau^{\geq b+1}(j_!j^!\mathcal{B}^\bullet[1])\right) = 0$$

si $a \leq b$, d'où l'assertion (ii) à l'aide de la suite exacte précédente. □

(3.3) *Construction de μ^f pour une projection.* Une projection, et plus généralement un morphisme dominant équidimensionnel, est une application *placide* au sens de [15, § 4]; i.e. il existe une stratification (T_j) de Y telle que, pour toute strate, on ait

$$\mathrm{codim}_Y(T_j) \leq \mathrm{codim}_X\, f^{-1}(T_j)\ .$$

Pour cette classe d'applications, l'existence et l'unicité des morphismes associés, à coefficients dans l'anneau R et pour toute perversité $\mathfrak{p}$, ont été établies par des arguments géométriques dans [15, Prop. 4.1]. Nous allons cependant en donner une autre démonstration à l'aide du lemme d'extension. Celle-ci montre également l'unicité de μ^f; en outre, elle se généralise au cas de systèmes de coefficients locaux $\mathcal{E}_X$ et $\mathcal{E}_Y$, définis sur les ouverts U_1 de X et V_1 de Y respectivement, tels qu'il existe un homomorphisme[8] $f^*(\mathcal{E}_Y) \to \mathcal{E}_X$, au cas d'une perversité $\mathfrak{p}$ quelconque, et dans la situation analytique sous condition de l'existence de stratifications convenables.

PROPOSITION 3.2. *Si $f : X \to Y$ est un morphisme placide, alors, le morphisme $\mu^f : f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y \to \mathcal{IC}^\bullet_X$ associé à f existe et est unique, même à coefficients dans R.*

Preuve. Nous pouvons supposer que la stratification de Y choisie dans 3.1 satisfait aussi à la condition de placidité ci-dessus. Nous construisons le morphisme μ^f par extension successive des morphismes

$$\mu_k : f^*\mathcal{IC}^\bullet_{V_k} \to \mathcal{IC}^\bullet_{U_k}$$

de U_k à U_{k+1}. Pour commencer, notons que les ouverts V_1 de Y et $U_1 = f^{-1}(V_1)$ de X sont partout denses. Comme V_1 est lisse, nous avons un morphisme

$$f^*\mathcal{IC}^\bullet_{V_1} \cong f^*\mathbb{Q}_{V_1} \cong \mathbb{Q}_{U_1} \xrightarrow{\alpha_{U_1}} \mathcal{IC}^\bullet_{U_1}$$

et nous devons poser $\mu_1 := \alpha_{U_1}$.

La récurrence est une conséquence immédiate de ce que la restriction induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(f^*\mathcal{IC}^\bullet_{V_{k+1}}, \mathcal{IC}^\bullet_{U_{k+1}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{IC}^\bullet_{V_k}, \mathcal{IC}^\bullet_{U_k})$$

que nous allons établir: En supposant que les strates S_ℓ de X sont connexes, nous avons une décomposition

$$U_{k+1} = U_k \cup S_{\ell_1} \cup \cdots \cup S_{\ell_r}$$

où les codimensions des strates S_{ℓ_λ} dans X sont croissantes. Pour simplifier, utilisons, pour λ fixé, les notations du lemme d'extension:

$$W := U_k \cup S_{\ell_1} \cup \cdots \cup S_{\ell_{\lambda-1}} \quad \text{et} \quad Z := W \cup S_{\ell_\lambda} .$$

Il suffit alors de montrer que l'homomorphisme de restriction

$$\rho : \mathrm{Hom}\,((f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_Z, \mathcal{IC}^\bullet_Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,((f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_W, \mathcal{IC}^\bullet_W)$$

[8] Le problème d'une telle généralisation est bien plus complexe dans le cas des plongements fermés; nous ne le discuterons pas ici.

est un isomorphisme. D'après la construction du complexe de Deligne, nous avons $\mathcal{IC}^\bullet_Z \cong \tau_{\leq q-1}\mathbf{R}i_*\mathcal{IC}^\bullet_W$, où i désigne l'inclusion de W dans Z et $q = \operatorname{codim}_X S_{\ell_\lambda}$. De façon analogue, le morphisme naturel $\tau_{\leq k-1}\mathcal{IC}^\bullet_{V_{k+1}} \to \mathcal{IC}^\bullet_{V_{k+1}}$ est un quasi-isomorphisme, il en est de même de $\tau_{\leq k-1}f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_Z \to f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_Z$ puisque le foncteur f^* est exact. On en déduit que ρ est un isomorphisme en appliquant la partie (ii) du lemme d'extension à $\mathcal{A}^\bullet := (f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_Z$, $\mathcal{B}^\bullet := \mathcal{IC}^\bullet_Z$, $a := k-1$ et $b := q-1$, puisque nous avons $q \geq k$. □

(3.4) *Le cas d'un plongement fermé: Réductions préliminaires.* Rappelons que, dans le cas d'un plongement $f : X \hookrightarrow Y$, l'image réciproque $f^*\mathcal{B}$ d'un faisceau $\mathcal{B}$ sur Y n'est rien d'autre que la restriction $\mathcal{B}|_X$.

Il suffit de considérer le cas où X et Y sont irréductibles: En effet, faisons l'hypothèse que μ^f existe pour les variétés irréductibles. Supposons d'abord que X est une composante irréductible de Y et désignons par Z la réunion des autres composantes. On a alors une décomposition

$$\mathcal{IC}^\bullet_Y \cong (\mathcal{IC}^\bullet_X)^Y \oplus (\mathcal{IC}^\bullet_Z)^Y,$$

où $(-)^Y$ dénote le prolongement par zero des faisceaux à Y tout entier, et nous définissons μ^f comme la projection

$$\mu^f : \mathcal{IC}^\bullet_Y|_X \cong \mathcal{IC}^\bullet_X \oplus (\mathcal{IC}^\bullet_Z)^Y|_X \;\to\; \mathcal{IC}^\bullet_X\,.$$

Maintenant, si X est une sous-variété irréductible arbitraire de Y, l'inclusion f admet une factorisation $X \overset{g}{\hookrightarrow} Y_0 \overset{h}{\hookrightarrow} Y$, où Y_0 est une composante irréductible de Y. Comme μ^g existe par hypothèse et μ^h par le cas particulier précédent, on en déduit l'existence de μ^f grâce au lemme de composition. Finalement, si X est réductible, soit $\bigcup_{i=1}^r X_i$ sa décomposition en composantes irréductibles. En notant f_i la restriction de f à X_i, nous pouvons donc supposer que des morphismes μ^{f_i} existent et nous définissons μ^f comme la composition:

$$\mu^f : f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y \xrightarrow{\;\psi\;} \bigoplus_{i=1}^r (f_i^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)^X \xrightarrow{\;\chi\;} \bigoplus_{i=1}^r (\mathcal{IC}^\bullet_{X_i})^X \cong \mathcal{IC}^\bullet_X,$$

où $\psi := (\psi_i)$ est donné par les morphismes naturels

$$\psi_i : f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y \;\to\; ((f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_{X_i})^X = (f_i^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)^X,$$

et χ par les morphismes μ^{f_i}. Il est évident que tous les morphismes μ^f ainsi obtenus rendent commutatifs le diagramme (D^μ).

Il suffit de considérer le cas où X est de codimension 1 dans Y: En effet, il existe une chaîne de sous-variétés irréductibles fermées intermédiaires

$$X = X_m \hookrightarrow X_{m+1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_n = Y$$

où chaque X_j est de codimension 1 dans X_{j+1}; de nouveau on applique le lemme de composition.

(3.5) *Construction de μ^f pour un plongement (fermé) irréductible en codimension 1.* Nous commençons la récurrence en construisant un morphisme μ^f sur la strate ouverte partout dense de X. Nous le prolongeons ensuite successivement sur les strates, à l'aide du lemme d'extension et par passage dans le cadre arithmétique.

Construction de μ^f sur la strate ouverte partout dense de X: En considérant, si nécessaire, des stratifications plus fines, nous pouvons supposer que chaque strate non vide S_i de X est une réunion de composantes connexes de la strate correspondante T_i de Y et est donc de dimension i. Alors X est une composante irréductible du fermé $Y \setminus V_1$ et les ouverts $U_k = V_k \cap X$ de X sont contenus dans $V_k \setminus V_1$; par conséquent, U_1 est vide, U_2 est la strate ouverte partout dense S_m de X, et le fermé complémentaire S_{n-k} de U_k est de codimension $k-1$ dans U_{k+1} ou vide.

Afin de montrer l'existence d'un morphisme μ_2 associé au plongement $U_2 \hookrightarrow V_2$, nous considérons la normalisation $\pi : \widetilde{Y} \to Y$. Rappelons que nous avons $\mathcal{IC}^\bullet_Y \cong \pi_* \mathcal{IC}^\bullet_{\widetilde{Y}}$ et donc $\mathcal{IC}^\bullet_{V_2} \cong \pi_* \mathbb{Q}_{\widetilde{V_2}}$ puisque l'ouvert $\widetilde{V_2} := \pi^{-1}(V_2)$ est lisse (cf. 3.1). En posant $\widetilde{U_2} := \pi^{-1}(U_2)$, il vient alors

$$(f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y)|_{U_2} = \mathcal{IC}^\bullet_{V_2}|_{U_2} \cong (\pi_*\mathbb{Q}_{\widetilde{V_2}})|_{U_2} = \pi_*(\mathbb{Q}_{\widetilde{V_2}}|_{\widetilde{U_2}}) = \pi_*\mathbb{Q}_{\widetilde{U_2}} \ .$$

En tenant compte du quasi-isomorphisme $\mathcal{IC}^\bullet_{U_2} \cong \mathbb{Q}_{U_2}$, nous cherchons donc un morphisme μ_2 tel que le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \pi_*(\mathbb{Q}_{\widetilde{U_2}}) \arrow[r, "\mu_2"] & \mathbb{Q}_{U_2} \\ \mathbb{Q}_{U_2} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "="'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Comme le morphisme $\pi|_{\widetilde{U_2}}$ est non ramifié, on a un homomorphisme *trace* $\mathrm{tr} : \pi_*(\mathbb{Q}_{\widetilde{U_2}}) \to \mathbb{Q}_{U_2}$ défini de la manière suivante : Pour tout ouvert U de U_2, une section $\sigma \in \pi_*(\mathbb{Q}_{\widetilde{U_2}})(U)$ s'interprète comme fonction localement constante à valeurs rationnelles sur $\pi^{-1}(U)$. Sa trace est la section $\mathrm{tr}\,\sigma \in \mathbb{Q}_{U_2}(U)$, donnée par

$$(\mathrm{tr}\,\sigma)(x) \ = \sum_{\widetilde{x} \in \pi^{-1}(x)} \sigma(\widetilde{x})$$

pour $x \in U$. Alors le morphisme $\mathrm{tr} \circ \alpha$ est la multiplication par le degré r de $\pi|_{\widetilde{U_2}}$, bien défini puisque U_2 est connexe; nous obtenons donc un morphisme μ_2 en posant

$$\mu_2 \ := \ \frac{1}{r} \cdot \mathrm{tr} \ ,$$

où le facteur $1/r$ existe à coefficients rationnels. D'autre part, ce choix de μ_2, bien qu'il soit naturel, n'est pas le seul possible si $\widetilde{U_2}$ n'est pas connexe (voir 3.6).

Prolongement de l'ouvert U_k à U_{k+1} (unicité et condition d'existence): Supposons que nous ayons déjà trouvé une extension $\mu_k : \mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_k} \to \mathcal{IC}^\bullet_{U_k}$ de μ_2 à l'ouvert U_k avec $k \geq 2$. Afin de montrer que nous pouvons la prolonger à U_{k+1}, nous allons appliquer le lemme d'extension avec $Z := U_{k+1}$, $W := U_k$, $S := S_{n-k}$, $\mathcal{A}^\bullet := \mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_{k+1}}$ et $\mathcal{B}^\bullet := \mathcal{IC}^\bullet_{U_{k+1}}$.

Remarquons d'abord l'unicité de l'extension, une fois μ_2 construit. En effet, d'après la construction du complexe de Deligne, on a $\mathcal{A}^\bullet \cong \tau_{\leq k-1}\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet \xrightarrow[\sigma]{\cong} \tau_{\leq k-2}\mathbf{R}i_*i^*\mathcal{B}^\bullet$, en rappelant que S_{n-k} est de codimension $k-1$ dans U_{k+1} (ou vide) puisque X est de codimension 1 dans Y. De la partie (ii) du lemme d'extension, on déduit que l'homomorphisme de restriction

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_{k+1}}, \mathcal{IC}^\bullet_{U_{k+1}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_k}, \mathcal{IC}^\bullet_{U_k})$$

est injectif. Par conséquent, le prolongement du morphisme μ_k de U_k à U_{k+1}, dont l'existence est démontrée ci-dessous, est unique. On en déduit par récurrence que l'extension $\mu = \mu^f$ du morphisme μ_2 à X tout entier ne dépend que du choix de μ_2.

D'après la partie (i) du lemme d'extension, l'existence du prolongement cherché est équivalente à l'annulation du morphisme:

$$\delta\,(\iota(\mu_k)) \;:\; \mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_{k+1}} \;\longrightarrow\; j_!j^!\mathcal{IC}^\bullet_{U_{k+1}}[1]\,.$$

Pour montrer cette assertion, nous allons nous placer dans le cadre arithmétique, ce qui permet d'utiliser de résultats d'annulation appropriés, basés sur la notion de poids. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ci-dessous le formalisme et les résultats essentiels dont nous allons nous servir.[9]

Passage dans le cadre arithmétique et notion de poids (indications et rappels): Tout d'abord, notons que la construction du complexe de Deligne $\mathcal{IC}^\bullet_Z$ se traduit immédiatement dans toute situation pour laquelle on dispose du formalisme des stratifications *raisonnables* et des foncteurs *image directe* et *troncation* dans une catégorie dérivée convenable. Si la traduction de la situation complexe dans le nouveau cadre est effectuée par un foncteur pleinement fidèle, alors on peut, de façon réciproque, déduire d'un résultat d'annulation valable dans cette situation un résultat analogue pour le cas complexe.

Dans le cas des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos $\mathbf{F}$, on dispose de ce formalisme si l'on se place dans le cadre de la *cohomologie étale et des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux constructibles, où ℓ est un nombre premier* différent de la caractéristique de $\mathbf{F}$. Pour une telle variété Z, de dimension

[9]Pour plus de détails, nous renvoyons, par exemple, à [2], [7], [9], [10], [18], etc.

pure d, on obtient donc le complexe de Deligne ℓ-adique, noté $\mathcal{IC}^\bullet_Z(\mathbb{Q}_\ell)$, à cohomologie constructible bornée. Ce complexe est auto-dual à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z = \mathcal{D}^\bullet_Z[-2d](-d)$.

Pour que l'on dispose de la notion de poids et des résultats d'annulation qui en résultent, il faut passer des variétés algébriques complexes à des variétés définies sur un corps $\mathbf{F}$ qui est la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbf{F}_q$. Ce passage peut se justifier de la façon suivante: Comme une variété algébrique complexe est *de présentation finie*, elle est définie sur un sous-anneau $A \subset \mathbb{C}$ de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors, étant donné un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, son corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ est un corps fini $\mathbf{F}_q$, et on obtient donc une réduction Z_0 de la variété considérée sur $\mathbf{F}_q$, ainsi qu'une variété $Z = Z_0 \otimes_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}$ sur $\mathbf{F}$. Les détails de ce passage *de* $\mathbf{F}$ *à* $\mathbb{C}$ et vice versa, simultanément pour une collection finie de variétés, de morphismes et de faisceaux constructibles, par des foncteurs pleinement fidèles (pour un choix convenable de A et $\mathfrak{m}$) sont explicités dans [2, 6.1].

Soit alors Z une telle variété algébrique sur $\mathbf{F}$, provenant d'une variété algébrique Z_0 sur $\mathbf{F}_q$ par extension des scalaires. La substitution de Frobenius $x \mapsto x^q$ induit l'endomorphisme $\varphi_0 : Z_0 \to Z_0$, d'où l'endomorphisme $\varphi := \varphi_0 \otimes_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}$ de Z par extension de scalaires. En outre, soit $\mathcal{G}$ un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau constructible sur Z qui provient d'un objet analogue sur Z_0. Alors on a un isomorphisme naturel $F : \varphi^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}$, et ceci induit, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout point fixe z de φ^k dans Z, une opération linéaire F^k_z sur la fibre de $\mathcal{G}$ au point z, celle-ci étant un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$. Alors, pour un entier w, on dit que $\mathcal{G}$ est *pur de poids ponctuels* w si pour tout entier $k \geq 1$, et pour tout point fixe z de φ^k, toutes les valeurs propres de cette opération sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $q^{kw/2}$. Plus généralement, $\mathcal{G}$ est dit *mixte de poids ponctuels* $\leq w$ s'il admet une filtration croissante finie dont tous les quotients successifs sont purs de poids ponctuels $\leq w$. Considérons maintenant un complexe $\mathcal{A}^\bullet$ de $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux sur Z, définis sur $\mathbf{F}_q$, à cohomologie constructible bornée. On dit qu'il est *mixte de poids* $\leq w$ si, pour tout entier j, son faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^j\mathcal{A}^\bullet$ est mixte de poids $\leq w+j$, et *mixte de poids* $\geq w$ si son dual de Verdier $\mathbf{D}_Z\mathcal{A}^\bullet$ est mixte de poids $\leq -w$. Finalement, le complexe $\mathcal{A}^\bullet$ est dit *pur de poids* w s'il est à la fois mixte de poids $\leq w$ et mixte de poids $\geq w$.

Propriétés de stabilité et d'annulation et pureté du complexe $\mathcal{IC}^\bullet(\mathbb{Q}_\ell)$ *(rappels)*: Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans la catégorie de variétés algébriques (sur $\mathbf{F}$) définies sur $\mathbf{F}_q$, i.e. provenant d'un morphisme $f_0 : X_0 \to Y_0$ sur $\mathbf{F}_q$, il commute à l'action du morphisme de Frobenius φ sur chaque côté. On dispose des foncteurs $\mathbf{R}f_*$, f^*, $\mathbf{R}f_!$ et $f^!$ comme dans le cas complexe. En notant $D_{\leq w}(Z)$ et $D_{\geq w}(Z)$ les catégories dérivées des complexes à cohomologie constructible bornée qui sont mixtes de poids $\leq w$ et $\geq w$, respectivement, on a les résultats suivants ([7, 0.3.1] et [2, 5.1.14/15]): Les foncteurs f^* et $\mathbf{R}f_!$ respectent $D_{\leq w}$, les foncteurs $\mathbf{R}f_*$ et $f^!$ respectent $D_{\geq w}$, et, pour le module des morphismes invariants par l'opération du morphisme de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}(D_{\leq w}, D_{\geq w+1})^F = 0 \ .$$

En d'autres termes, pour deux complexes $\mathcal{A}^\bullet$ dans $D_{\leq 0}(Z)$ et $\mathcal{B}^\bullet$ dans $D_{\geq 1}(Z)$, tout morphisme $\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ qui respecte les isomorphismes correspondants $\varphi^*(\mathcal{A}^\bullet) \to \mathcal{A}^\bullet$ et $\varphi^*(\mathcal{B}^\bullet) \to \mathcal{B}^\bullet$ s'annule.

Pour une variété $Z = Z_0 \otimes_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}$, de dimension pure d, munie d'une stratification définie sur $\mathbf{F}_q$, le complexe de Deligne ℓ-adique $\mathcal{IC}^\bullet_Z(\mathbb{Q}_\ell)$ est de même défini sur $\mathbf{F}_q$. Avec les notations de ([2, 2.1.11] ou [7, 2.2.6]), celui-ci n'est autre que le *prolongement intermédiaire* ou *image directe intermédiaire*[10] $(i_{!*}(\mathbb{Q}_\ell)_W[d])[-d]$, où i est l'inclusion de la strate ouverte dense $W = W_0 \otimes_{\mathbf{F}_q} \mathbf{F}$ dans Z. D'après le Théorème de Pureté [13], le foncteur $i_{!*}$ transforme les complexes pervers et purs de poids w sur W en complexes purs de même poids sur Z. Le complexe $(\mathbb{Q}_\ell)_W$ étant pur de poids $w = 0$, il en est donc de même pour le complexe $\mathcal{IC}^\bullet_Z(\mathbb{Q}_\ell)$.

Le lemme clef: Après ces rappels, nous passons finalement à la démonstration de l'existence du prolongement. Par passage *de* $\mathbf{F}$ *à* $\mathbb{C}$, il suffit de vérifier que l'extension successive d'un morphisme associé μ^f à un plongement (fermé) irréductible de codimension 1 est possible dans le cadre des variétés stratifiées définies sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ et des complexes de Deligne ℓ-adiques. Notons d'abord que le lemme d'extension reste valable dans cette situation. En gardant les notations du cas complexe, nous remplaçons donc les variétés et sous-variétés par leurs analogues définis sur $\mathbf{F}_q$, et de même les complexes $\mathcal{IC}^\bullet_Z$ par leurs analogues ℓ-adiques $\mathcal{IC}^\bullet_Z(\mathbb{Q}_\ell)$. Il suffit alors de montrer l'assertion suivante:

LEMME 3.3 (Lemme clef). *Soit* $\mathbf{F}$ *la clôture algébrique d'un corps fini* $\mathbf{F}_p$ *et soit* $X \hookrightarrow Y$ *un plongement fermé, irréductible et de codimension* 1, *de variétés algébriques sur* $\mathbf{F}$, *munies de bonnes stratifications comme dans* (3.1). *Soit* q *une puissance suffisamment grande de* p *telle que tous les donnés soient définies sur* $\mathbf{F}_q$. *Alors, pour tout nombre premier* ℓ *différent de* p, *on a les résultats suivants*:

i) *Les extensions* $\mu_k : \mathcal{IC}^\bullet_Y(\mathbb{Q}_\ell)|_{U_k} \longrightarrow \mathcal{IC}^\bullet_{U_k}(\mathbb{Q}_\ell)$ *associées aux inclusions* $U_k \hookrightarrow V_k$ *sont invariantes par l'opération du morphisme de Frobenius* F;

ii) *Pour tout* $k \geq 2$, *le morphisme*

$$\delta\left(\iota(\mu_k)\right) \ : \ \mathcal{IC}^\bullet_Y(\mathbb{Q}_\ell)|_{U_{k+1}} \ \longrightarrow \ j_!j^!\mathcal{IC}^\bullet_{U_{k+1}}(\mathbb{Q}_\ell)[1]$$

s'annule.

[10] Pour le cas *classique*, voir [2, 2.1.18]. Notons qu'il y a un décalage entre notre choix, suivant [3, V], des degrés du complexe $\mathcal{IC}^\bullet_Z$, et celui de [2, p. 11]: Nous considérons le complexe $(i_{!*}\mathbb{Q}_W[d])[-d]$, tandis que dans [loc.cit.], on considère $i_{!*}\mathbb{Q}_W[d]$.

Preuve. Notons d'abord que, étant donné notre choix de q, le morphisme μ_2 est invariant par l'opération du Frobenius F puisque les composantes géométriques irréductibles de $\widetilde{U_2} = \pi^{-1}(U_2)$ sont rationnelles sur $\mathbf{F}_q$. L'invariance de chaque prolongement μ_k vient alors de son unicité.

La partie ii) résulte du Théorème de Pureté et des propriétés de stabilité et d'annulation rappelées ci-dessus: Le complexe $\mathcal{IC}^\bullet_Y(\mathbb{Q}_\ell)|_{U_{k+1}}$ est mixte de poids ≤ 0, et $j_! j^! \mathcal{IC}^\bullet_{U_{k+1}}(\mathbb{Q}_\ell)[1]$ est mixte de poids ≥ 1, vue l'égalité des foncteurs $j_* = j_!$. D'autre part, μ_k étant invariant par l'opération de F, le morphisme $\delta(\iota(\mu_k))$ l'est aussi et, d'après le résultat d'annulation, est donc nul.

Ainsi, nous avons achevé la démonstration d'existence d'un morphisme associé à un plongement irréductible en codimension 1, et donc celle du théorème principal 2.1. □

(3.6) *Unicité et coefficients entiers dans le cas d'un plongement.* Nous discutons ici les problèmes d'unicité et du cas des coefficients entiers des morphismes μ^f associés au plongement f d'une sous-variété fermée X dans Y.

Unicité de μ^f: Dans la construction précédente interviennent plusieurs choix, en particulier celui d'une chaîne de sous-variétés irréductibles dans (3.4) et, à chaque étape de la récurrence correspondant à cette chaîne, celui d'un morphisme μ_2. Bien que notre définition de μ_2 corresponde à un choix naturel, elle n'est pas nécessairement la seule possible (quoique X soit irréductible). Ainsi, dans la situation de la section (3.5) et pour chaque réunion non vide B de composantes connexes de $\widetilde{U_2} = \pi^{-1}(U_2)$, on aurait pu choisir un morphisme μ_2^B en posant

$$\mu_2^B \;:=\; \frac{1}{r_B}\,\mathrm{tr}_B$$

où r_B et tr_B correspondent au revêtement $\pi|_B : B \longrightarrow U_2$.

Cas des coefficients entiers: Nous revenons au cas où X est de codimension 1 dans Y. Si π admet une section sur U_2, c'est-à-dire s'il existe une composante connexe B de $\widetilde{U_2}$ telle que $\pi|_B : B \longrightarrow U_2$ soit de degré 1, alors μ_2^B est évidemment défini à coefficients entiers.

Il se pose alors la question de savoir si notre méthode de prolongement fournit encore un morphisme à coefficients entiers. Supposons donc que μ_k existe à coefficients entiers. L'annulation, à coefficients rationnels, de l'homomorphisme $\delta(\iota(\mu_k))$ implique bien que, à coefficients entiers, il s'agit d'un élément de torsion. On en déduit que le morphisme

$$\tau_{\leq k-1}\mathbf{R}i_*\mu_k \;:\; \mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_{k+1}} = \tau_{\leq k-1}\mathbf{R}i_*(\mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_k}) \to \tau_{\leq k-1}\mathbf{R}i_*\mathcal{IC}^\bullet_{U_k}$$

induit par μ_k se factorise comme suit: Introduisons, pour un entier l, le foncteur $\tau^+_{\leq l}$ défini, pour tout complexe $\mathcal{A}^\bullet$, par

$$(\tau^+_{\leq l}\mathcal{A}^\bullet)^q_x := \begin{cases} 0 & \text{pour } q \geq l+2\ ; \\ \{a \in \ker \delta^{l+1}_x\ ;\ \overline{a} \in \mathcal{H}^{l+1}\mathcal{A}^\bullet_x \text{ est de torsion}\} & \text{pour } q = l+1\ ; \\ \mathcal{A}^q_x & \text{pour } q \leq l \end{cases}$$

(cf. [2, 3.3.2]), alors il existe un morphisme

$$\mu^+_{k+1} : \mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_{k+1}} \longrightarrow \tau^+_{\leq k-2}\mathbf{R}i_*\mathcal{IC}^\bullet_{U_k}$$

qui factorise $\tau_{\leq k-1}\mathbf{R}i_*\mu_k$ de la façon suivante:

$$\mathcal{IC}^\bullet_Y|_{U_{k+1}} \xrightarrow{\mu^+_{k+1}} \tau^+_{\leq k-2}\mathbf{R}i_*\mathcal{IC}^\bullet_{U_k} \longrightarrow \tau_{\leq k-1}\mathbf{R}i_*\mathcal{IC}^\bullet_{U_k}\ .$$

Avec la modification évidente dans la construction par récurrence de μ, nous obtenons ainsi un morphisme à coefficients entiers

$$\mu^+ : f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y) \to \mathcal{I}^+\mathcal{C}^\bullet_X,$$

où $\mathcal{I}^+\mathcal{C}^\bullet_X$ est le complexe défini comme $\mathcal{IC}^\bullet_X$ à partir du faisceau constant $\mathbb{Z}_{U_2}$ par troncations et images directes successives, mais en remplaçant le foncteur de troncation $\tau_{\leq l}$ par $\tau^+_{\leq l}$. Remarquons que l'application du foncteur dualisant $\widetilde{\mathbf{D}}^{\mathbb{Z}}$ (à coefficients entiers) donne un isomorphisme $\mathcal{I}^+\mathcal{C}^\bullet_X = \widetilde{\mathbf{D}}^{\mathbb{Z}}\mathcal{IC}^\bullet_X$.

4. Démonstration des énoncés globaux

Les démonstrations d'existence d'homomorphismes associés en homologie d'intersection au niveau *global* (Théorème 2.3) et de relèvements des cycles (Théorème 2.4) sont des conséquences faciles du lemme 4.1 ci-dessous.

Soient $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ des complexes bornés de faisceaux de R-modules, et Φ et Ψ, des familles de supports sur les variétés X et Y, respectivement. Notons Φ_f la famille des fermés F de X qui sont *propres sur Y par rapport à f*, i.e. tels que la restriction $f|_F : F \to Y$ soit une application propre. Alors on a le résultat suivant:

LEMME 4.1. a) *Si la famille $f^{-1}(\Psi)$ est contenue dans Φ, alors tout morphisme de complexes de faisceaux $f^*\mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ sur X induit un homomorphisme naturel en hypercohomologie*

$$\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y;\mathcal{B}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Phi(X;\mathcal{A}^\bullet)\ .$$

b) *Si la famille Φ est contenue dans $\Phi_f \cap f^{-1}(\Psi)$, alors tout morphisme de complexes de faisceaux $\mathcal{A}^\bullet \to f^!\mathcal{B}^\bullet$ sur X induit un homomorphisme naturel en hypercohomologie*

$$\mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathcal{B}^\bullet)\ .$$

On remarquera que ce lemme permet d'obtenir encore des énoncés dans le cas relatif.

Démonstration. On obtient le premier résultat en composant les homomorphismes naturels évidents

$$\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y;\mathcal{B}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{f^{-1}(\Psi)}(X;f^*\mathcal{B}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{f^{-1}(\Psi)}(X;\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Phi(X;\mathcal{A}^\bullet)\,.$$

Pour le deuxième énoncé, on compose les homomorphismes naturels

$$\mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{\Phi_f\cap f^{-1}(\Psi)}(X,\mathcal{A}^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,f_!\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathcal{B}^\bullet)\,.$$

L'existence de l'isomorphisme du milieu est montrée par une généralisation de la formule [3, V, 7.11 (2)]; pour la dernière flèche, on applique le foncteur $\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,-)$ au morphisme $f_!\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ sur Y obtenu par adjonction du morphisme $\mathcal{A}^\bullet \to f^!\mathcal{B}^\bullet$ d'après la dualité de Verdier. □

Démonstration du Théorème 2.3. Les énoncés *contravariants* du théorème d'existence global, c'est-à-dire les diagrammes $(\mathrm{D}^\mu_{\mathrm{cld}})$ et $(\mathrm{D}^\mu_{\mathrm{c}})$, sont des conséquences immédiates du diagramme (D^μ) du théorème 2.1 en appliquant la partie (a) du lemme. On prend respectivement pour Φ et Ψ ou bien la famille des fermés de X et de Y, ou bien celle des compacts, en remarquant que f est propre si et seulement si $f^{-1}(c(X)) = c(Y)$, resp. $\mathrm{cld(X)} \subset \Phi_\mathrm{f} = \Phi_\mathrm{f} \cap \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{cld(Y)})$.

De la même façon, les énoncés *covariants*, c'est-à-dire les diagrammes $(\mathrm{D}^{\mathrm{c}}_\nu)$ et $(\mathrm{D}^{\mathrm{cld}}_\nu)$, proviennent du diagramme correspondant (D_ν) en appliquant la partie (b) du lemme. Si le morphisme f est propre, la factorisation $\mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_\bullet(X) \to \mathrm{IH}^{f(X)}_\bullet(Y) \to \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_\bullet(Y)$ (voir (2.2), Remarque a)) s'obtient de la même façon, en prenant pour Ψ la famille des fermés de Y contenus dans le fermé $f(X)$. □

Démonstration du Théorème de relèvement 2.4. D'après la remarque qui suit le théorème 2.3, l'homomorphisme ν_f du diagramme $(\mathrm{D}^{\mathrm{cld}}_\nu)$, associé au plongement $C \hookrightarrow Z$, admet une factorisation naturelle par $\mathrm{IH}^C_\bullet(Z)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{2m}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{IH}^{C}_{2m}(Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_{2m}(Z) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{2m}(C) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{H}^{C}_{2m}(Z) \arrow[r] & \mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{2m}(Z)\,.
\end{tikzcd}$$

On en déduit que la flèche verticale du milieu est surjective, d'où le théorème. □

Remarque. Nous avons vérifié notre résultat principal, et donc le théorème 2.4, à l'aide du théorème de pureté. Notre démonstration, aussi directe et constructive que possible, a l'avantage de mettre en évidence et de rendre contrôlables les choix qui interviennent dans la construction d'un morphisme associé. Cependant, on remarque que l'existence de *bons* relèvements de cycles algébriques en homologie d'intersection peut se démontrer à l'aide du théorème de décomposition de la façon suivante: Soit C une sous-variété d'une variété algébrique complexe Z, avec $\dim C = m$ et $\dim Z = n$; pour simplifier, supposons que C et Z soient irréductibles. Si $\pi : \hat{Z} \to Z$ est une résolution de singularités, montrons qu'il existe une sous-variété irréductible $\hat{C}$ dans $\pi^{-1}C \hookrightarrow \hat{Z}$ telle que la restriction $\pi|_{\hat{C}} : \hat{C} \to C$ soit surjective et génériquement finie: Pour cela, soit B une composante irréductible de $\pi^{-1}C$ telle que la restriction $\varphi := \pi|_B : B \to C$ soit surjective. Ce morphisme étant propre, nous pouvons appliquer l'énoncé suivant, du type *lemme de normalisation de Noether relatif* (voir [12, § 4.4, Prop. 14]): Il existe des ouverts affines partout denses V de C et $U \Subset \varphi^{-1}(V)$ de B tels que la restriction $\varphi|_U : U \to V$ se factorise par un morphisme surjectif fini ψ comme suit:

$$U \xrightarrow{\psi} V \times \mathbb{C}^s \xrightarrow{\mathrm{pr}_V} V\,.$$

Alors on prend pour $\hat{C}$ une composante irréductible de dimension maximale de l'adhérence de $\psi^{-1}(V \times \{0\})$ dans $\hat{Z}$. Toute décomposition $\mathbf{R}\pi_*(\mathcal{IC}^\bullet_{\hat{Z}}) \cong \mathcal{IC}^\bullet_Z \oplus \cdots$ nous fournit une projection $\beta : \mathbf{R}\pi_*(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}) \cong \mathbf{R}\pi_*(\mathcal{IC}^\bullet_Z) \to \mathcal{IC}^\bullet_Z$, d'où le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}\pi_*(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}) \arrow[r, "\mathbf{R}\pi_*(\delta_{\hat{Z}})", "\cong"'] \arrow[d, "\beta"] & \mathbf{R}\pi_*(\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_{\hat{Z}}) \arrow[d] \\
\mathcal{IC}^\bullet_Z \arrow[r, "\omega_Z"] & \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z
\end{tikzcd}$$

de complexes sur Z. Rappelons que $\delta_{\hat{Z}} : \mathbb{Q}_{\hat{Z}} \to \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_{\hat{Z}}$ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré au niveau des faisceaux (cf. section 0, d). La flèche verticale $\mathbf{R}\pi_*(\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_{\hat{Z}}) \to \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z$ correspond par adjonction à l'isomorphisme canonique $\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_{\hat{Z}} \xrightarrow{\cong} \pi^!\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z$, étant donnée l'égalité de foncteurs π_* et $\pi_!$ puisque le morphisme π est propre.

Pour voir que l'on peut choisir β de façon à rendre commutatif le diagramme précédent, nous considérons la restriction du diagramme au lieu régulier W de Z. Alors toutes les flèches s'identifient à des isomorphismes $\mathbb{Q}_W \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}_W$ et le diagramme devient commutatif en multipliant β par un facteur scalaire approprié. Il en résulte la commutativité sur Z: les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om(\mathbf{R}\pi_*(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}), \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z) &\cong \mathcal{H}om(\mathbf{R}\pi_!(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}), \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z) \\
&\cong \mathbf{R}\pi_*\Big(\mathcal{H}om(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}, \pi^!\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z)\Big) \cong \mathbf{R}\pi_*(\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_{\hat{Z}})
\end{aligned}$$

entre les faisceaux d'homomorphismes montrent que, au niveau global, on a des isomorphismes $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}\pi_*(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}), \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z) \cong \Gamma(\hat{Z}, \mathcal{H}^0\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z) \cong \mathbb{Q}$, et par conséquent, tout morphisme $\mathbf{R}\pi_*(\mathbb{Q}_{\hat{Z}}) \to \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Z$ est déterminé par sa restriction à l'ouvert dense lisse W. Par application du foncteur $\mathbb{H}_C^{2n-2m}(Z;-)$, on obtient le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{2n-2m}_{\pi^{-1}(C)}(\hat{Z}) & \underset{\cong}{\xrightarrow{P_{\hat{Z}}}} & \mathrm{H}_{2m}^{\pi^{-1}(C)}(\hat{Z}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ \mathrm{IH}^C_{2m}(Z) & \longrightarrow & \mathrm{H}^C_{2m}(Z) \end{array}$$

où $P_{\hat{Z}}$ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré au niveau global, et un *bon* relèvement de la classe du cycle $[C]$ nous est fourni par la classe $\gamma := \beta(P_{\hat{Z}}^{-1}(\frac{1}{r}[\hat{C}]))$, où $r \geq 1$ est le degré de $\pi|_{\hat{C}}$.

Preuve de la Proposition 2.5. Fixons une structure PL sur Z, et une triangulation K compatible telle que C corresponde à un sous-complexe L de K. Soit K' la première subdivision barycentrique de K, et considérons le voisinage ouvert

$$W(K) := \bigcup_{\substack{\sigma \in K' \\ |\sigma| \cap C \neq \emptyset}} |\mathring{\sigma}|$$

de C. A la rétraction $r : W(K) \to C$ de $W(K)$ sur C le long des simplexes de K' on associe l'homotopie évidente $R : W(K) \times I \to W(K)$ entre r et $\mathrm{id}_{W(K)}$. Pour tout entier $k \geq 1$, posons $W_k := R(W(K), \frac{1}{k})$, voisinage ouvert de C, et $B_k := Z \setminus W_k$, alors, pour $k \geq 2$, on a

$$\mathbb{H}^\bullet(B_k, \mathcal{IC}_Z^\bullet) \cong \mathbb{H}^\bullet(Z \setminus C, \mathcal{IC}_Z^\bullet) \ .$$

Le lemme des cinq appliqué au diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} .. \to & \mathbb{H}^{2n-\bullet-1}(Z \setminus C, \mathcal{IC}_Z^\bullet) & \to & \mathrm{IH}^C_\bullet(Z) & \to & \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_\bullet(Z) & \to .. \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle =} & \\ .. \to & \mathbb{H}^{2n-\bullet-1}(B_k, \mathcal{IC}_Z^\bullet) & \to & \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}(Z)|W_k}_\bullet(W_k) & \to & \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_\bullet(Z) & \to .. \end{array}$$

implique que l'homomorphisme

$$\mathrm{IH}^C_\bullet(Z) \cong \mathrm{IH}^C_\bullet(W_k) \longrightarrow \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}(Z)|W_k}_\bullet(W_k)$$

est un isomorphisme.

Cette propriété est vraie pour toute triangulation K; alors en parcourant toutes les subdivisions $\widetilde{K}$ de K, on obtient un système fondamental de voisinages ouverts W de C dans Z, d'où il résulte l'isomorphisme

$$\mathrm{IH}^C_\bullet(Z) \ \cong \ \varprojlim_{C \hookrightarrow W \Subset Z} \ \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}(Z)|W}_\bullet(W) \ .$$

Dans le cas où le plongement f est normalement non-singulier, alors d'après le Théorème 5.4.1 de [14], les complexes $\mathcal{IC}_C^\bullet$ et $f^!\mathcal{IC}_Z^\bullet[2s]$ sont quasi-isomorphes (en tenant compte des différences de notations). On en déduit l'isomorphisme cherché $\mathrm{IH}^C_\bullet(Z) \cong \mathrm{IH}^{\mathrm{cld}}_\bullet(C)$. □

5. Démonstration du Théorème de Classification

La démonstration de la correspondance biunivoque entre l'ensemble des homomorphismes associés μ^f au niveau des faisceaux et l'ensemble des relèvements γ de la classe $[\Gamma_f]$ dans $\mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y)$ est basée sur l'existence d'un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{IC}_Y^\bullet, \mathcal{IC}_X^\bullet) & \cong & \mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(f^*\alpha_Y, \omega_X)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \omega_{X\times Y}} \\ \mathrm{Hom}(f^*\mathbb{Q}_Y, \widetilde{\mathcal{D}}_X) & \cong & \mathrm{H}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) \end{array}$$

où le composé de la flèche $\mathrm{Hom}(f^*\alpha_Y, \omega_X)$ et de l'isomorphisme inférieur envoie μ^f sur $[\Gamma_f]$.

Pour établir l'existence de ce diagramme, nous nous servirons de techniques analogues aux correspondances cohomologiques de [19, III]. Ainsi, nous montrons d'abord la proposition suivante, valable pour un anneau de coefficients R tel que précédemment:

PROPOSITION 5.1. *Soient $\mathcal{F}_X^\bullet$ et $\mathcal{G}_Y^\bullet$ des complexes de faisceaux cohomologiquement constructibles par rapport à des bonnes stratifications* (*telles que* [3, V, 3.3]). *Notant $p := \mathrm{pr}_X$ et $q := \mathrm{pr}_Y$ les projections canoniques, alors pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a des isomorphismes naturels*:

$$\text{a)} \quad \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}_Y^\bullet, \mathcal{F}_X^\bullet) \cong \mathbb{H}_{\Gamma_f}^{2n}(X \times Y; q^*\widetilde{\mathbf{D}}_Y\mathcal{G}_Y^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*\mathcal{F}_X^\bullet) ;$$
$$\text{b)} \quad \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_X^\bullet, f^!\mathcal{G}_Y^\bullet[2s]) \cong \mathbb{H}_{\Gamma_f}^{2n}(X \times Y; p^*\widetilde{\mathbf{D}}_X\mathcal{F}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes} q^*\mathcal{G}_Y^\bullet) .$$

COROLLAIRE 5.2. *On a des isomorphismes naturels:*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathrm{Hom}(f^*R_Y, \widetilde{\mathcal{D}}_X^\bullet) &\cong \mathrm{Hom}(R_X, f^!\widetilde{\mathcal{D}}_Y^\bullet[2s]) \\ &\cong \mathbb{H}_{\Gamma_f}^{2n}(X \times Y; \widetilde{\mathcal{D}}_{X\times Y}^\bullet) \cong \mathrm{H}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) \cong \mathrm{H}_{2m}^{\mathrm{cld}}(X) \end{aligned}$$

et, si R est un corps,

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{IC}_Y^\bullet, \mathcal{IC}_X^\bullet) &\cong \mathrm{Hom}(\mathcal{IC}_X^\bullet, f^!\mathcal{IC}_Y^\bullet[2s]) \\ &\cong \mathbb{H}_{\Gamma_f}^{2n}(X \times Y; \mathcal{IC}_{X\times Y}^\bullet) \cong \mathrm{IH}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) . \end{aligned}$$

Dans (ii), notons que le premier des isomorphismes se généralise au cas d'un anneau principal R sans diviseur de zéro si on remplace l'un des deux complexes $\mathcal{IC}_X^\bullet$ de cette formule par le complexe $\mathcal{I}^+\mathcal{C}_X^\bullet$, et de même pour $\mathcal{IC}_Y^\bullet$.

Preuve de la proposition 5.1. Notons $j : X \cong \Gamma_f \hookrightarrow X \times Y$ le plongement du graphe de f dans $X \times Y$.

a) Nous nous servirons de l'isomorphisme [3, V, 5.17 (3)]

$$\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{G}_Y^\bullet, \mathcal{F}_X^\bullet) \cong \mathbb{H}^0(X; \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(f^*\mathcal{G}_Y^\bullet, \mathcal{F}_X^\bullet)) .$$

Par les égalités évidentes $q \circ j = f$ et $p \circ j = \mathrm{id}_X$, et donc $(p \circ j)^* = (p \circ j)^! = \mathrm{id}$, on a une suite de (quasi-)isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}\mathcal{H}om_X(f^*\mathcal{G}_Y^\bullet, \mathcal{F}_X^\bullet) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(j^*q^*\mathcal{G}_Y^\bullet, j^!p^!\mathcal{F}_X^\bullet) \\
&\underset{(\alpha)}{\cong} j^!\,\mathbf{R}\mathcal{H}om_{X\times Y}(q^*\mathcal{G}_Y^\bullet, p^!\mathcal{F}_X^\bullet) \\
&\underset{(\beta)}{\cong} j^!(q^*(\mathbf{D}_Y\mathcal{G}_Y^\bullet) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*\mathcal{F}_X^\bullet)
\end{aligned}$$

où (α) est l'isomorphisme de [3, V, 10.10], correspondant à la *formule d'induction* de [19, III, (3.2.1)], et (β) celui de [3, V, 10.25] qui correspond au *théorème du noyau* de [19, III, (3.1.1)]. En utilisant l'isomorphisme

$$\mathbb{H}^\bullet(X; j^!\mathcal{A}_{X\times Y}^\bullet) \cong \mathbb{H}_{\Gamma_f}^\bullet(X \times Y; \mathcal{A}_{X\times Y}^\bullet)$$

[3, V, 1.8 (5)], on obtient le résultat a).

b) Pour démontrer l'énoncé b), nous utilisons le foncteur dualisant. On a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}_X^\bullet, f^!\mathcal{G}_Y^\bullet[2s]) &\underset{(\gamma)}{\cong} \mathrm{Hom}_X(\widetilde{\mathbf{D}}_X f^!\mathcal{G}_Y^\bullet[2s], \widetilde{\mathbf{D}}_X\mathcal{F}_X^\bullet) \\
&\cong \mathrm{Hom}_X(f^*\widetilde{\mathbf{D}}_Y\mathcal{G}_Y^\bullet, \widetilde{\mathbf{D}}_X\mathcal{F}_X^\bullet) \\
&\underset{(\delta)}{\cong} \mathbb{H}_{\Gamma_f}^{2n}(X \times Y; \widetilde{\mathbf{D}}_X\mathcal{F}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \widetilde{\mathbf{D}}_Y\widetilde{\mathbf{D}}_Y\mathcal{G}_Y^\bullet) \\
&\cong \mathbb{H}_{\Gamma_f}^{2n}(X \times Y; \widetilde{\mathbf{D}}_X\mathcal{F}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \mathcal{G}_Y^\bullet) .
\end{aligned}$$

L'isomorphisme (γ) vient de la bidualité, et (δ) de la partie a) à l'aide de la symétrie du produit tensoriel. □

Preuve du corollaire 5.2. Grâce à la bidualité et à la relation $\mathbf{D}_X f^* = f^!\mathbf{D}_Y$, nous obtenons des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}_Y^\bullet, \mathcal{F}_X^\bullet) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{D}_X\mathcal{F}_X^\bullet, \mathbf{D}_X f^*\mathcal{G}_Y^\bullet) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{D}_X\mathcal{F}_X^\bullet, f^!\mathbf{D}_Y\mathcal{G}_Y^\bullet) .$$

Alors la partie (i) du corollaire est une conséquence immédiate de la proposition 5.1 et de l'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}_{X\times Y}^\bullet \cong \widetilde{\mathcal{D}}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \widetilde{\mathcal{D}}_Y^\bullet$ [3, V, 10.26]. Pour la deuxième partie, les isomorphismes se démontrent de la même manière en utilisant la dualité de Poincaré $\widetilde{\mathbf{D}}\mathcal{IC}^\bullet \cong \mathcal{IC}^\bullet$ et la formule de Künneth en homologie d'intersection, lesquelles nous donnent les isomorphismes

$$\widetilde{\mathbf{D}}_Y\mathcal{IC}_Y^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \mathcal{IC}_X^\bullet \cong \widetilde{\mathbf{D}}_X\mathcal{IC}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \mathcal{IC}_Y^\bullet \cong \mathcal{IC}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes} \mathcal{IC}_Y^\bullet \cong \mathcal{IC}_{X\times Y}^\bullet . \qquad \square$$

L'énoncé du corollaire va nous permettre de donner une interprétation explicite des morphismes μ^f et ν_f en homologie d'intersection. Nous commençons par considérer la situation correspondante en homologie ordinaire:

LEMME 5.3. *L'isomorphisme* (i) *du corollaire identifie le morphisme*

$$\delta_X : f^*R_Y \cong R_X \xrightarrow{\omega\circ\alpha} \widetilde{\mathcal{D}}_X^\bullet$$

avec la classe $[\Gamma_f] \in \mathrm{H}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y)$.

Preuve. Nous pouvons supposer que X est connexe. Nous nous servirons de la suite de (quasi-)isomorphismes

$$q^*\mathcal{D}_Y^\bullet \;\cong\; q^*\mathbf{D}_Y R_Y \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*R_X \;\cong\; \mathbf{R}\mathcal{H}om(q^*R_Y, p^!R_X) \;\cong\; p^!R_X\ ,$$

dont le second est un cas particulier de la version transposée de [3, V, 10.25]. Alors, avec les notations introduites dans la preuve de la proposition précédente, nous avons une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(f^*R_Y, R_X) &\cong \mathbb{H}^{2n}_{\Gamma_f}(X \times Y\,;\, q^*\widetilde{\mathcal{D}}_Y^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes} p^*R_X)\\
&\cong \mathbb{H}^{2n}_{\Gamma_f}(X \times Y\,;\, q^*\mathcal{D}_Y^\bullet[-2n])\\
&\cong \mathbb{H}^{0}_{\Gamma_f}(X \times Y\,;\, p^!R_X) \cong \mathbb{H}^0(X; j^!p^!R_X) = \mathrm{H}^0(X) \cong R\quad .
\end{aligned}$$

Par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(f^*R_Y, R_X) \cong R$ ainsi obtenu, l'isomorphisme canonique $\iota : f^*R_Y \to R_X$ correspond à l'élément unité 1 de R. En combinant ce résultat avec le premier isomorphisme du corollaire, nous obtenons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\iota & \in & \mathrm{Hom}(f^*R_Y, R_X) & \cong & \mathrm{H}^0(X) & \cong & R & \ni & 1\\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_X} & & & & \Big\downarrow\\
\delta_X & \in & \mathrm{Hom}(f^*R_Y, \widetilde{\mathcal{D}}_X^\bullet) & \cong & \mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{2m}(X) & & & \ni & [X]
\end{array}$$

qui nous donne le résultat puisque la classe $[\Gamma_f]$ correspond à $[X]$ par l'isomorphisme $\mathrm{H}_{2m}^{\Gamma_f}(X \times Y) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{cld}}_{2m}(X)$. □

Afin de montrer le théorème 2.7, nous avons besoin du résultat suivant qui se généralise au cas de l'anneau R:

PROPOSITION 5.4. *Le morphisme* μ^f, *resp.* ν_f, *rend commutatif le diagramme* (D^μ), *resp.* (D_ν), *si et seulement si le diagramme*:

$$\begin{array}{ccccc}
f^*(\mathcal{IC}_Y^\bullet) & \xrightarrow{\mu^f} & \mathcal{IC}_X^\bullet & = & \mathcal{IC}_X^\bullet\\
\Big\uparrow{\scriptstyle f^*(\alpha_Y)} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \omega_X}\\
f^*(\mathbb{Q}_Y) & \cong & \mathbb{Q}_X & \xrightarrow{\delta_X} & \widetilde{\mathcal{D}}_X\ ,
\end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{IC}^\bullet_X & = & \mathcal{IC}^\bullet_X & \xrightarrow{\nu_f} & f^!(\mathcal{IC}^\bullet_Y)[2s] \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha_X} & & & & \downarrow{\scriptstyle f^!\omega_Y[2s]} \\ \mathbb{Q}_X & \xrightarrow{\delta_X} & \widetilde{\mathcal{D}}_X & \cong & f^!(\widetilde{\mathcal{D}}_Y)[2s]\ , \end{array}$$

est commutatif.

Preuve. Il suffit de montrer que la commutativité du diagramme implique que le morphisme composé

$$\mathbb{Q}_X = f^*\mathbb{Q}_Y \overset{f^*\alpha_Y}{\to} f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y \overset{\mu_f}{\to} \mathcal{IC}^\bullet_X$$

s'identifie au morphisme $\alpha_X : \mathbb{Q}_X \to \mathcal{IC}^\bullet_X$. Notons U la partie régulière de X, alors nous avons des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_X, \mathcal{IC}^\bullet_X) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_U, \mathcal{IC}^\bullet_U) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_U, \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_U) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_X, \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X)$$

induits par restriction [3, V, 9.2] et dont le composé est donné par $\lambda \mapsto \omega_X \circ \lambda$, d'où le résultat pour μ^f. L'énoncé pour ν_f vient par dualité. □

Démonstration du Théorème 2.7. D'après les résultats précédents, la commutativité du diagramme (D^μ), resp. (D_ν), équivaut au fait que la classe ξ_μ, resp. $\zeta_\nu \in \mathrm{IH}^{\Gamma_f}_{2m}(X \times Y)$, correspondant à l'homomorphisme $\mu = \mu^f$, resp. $\nu = \nu_f$, soit envoyée par l'homomorphisme canonique $\omega = \omega^{\Gamma_f}_{X\times Y}$ sur la classe fondamentale $[\Gamma_f] \in \mathrm{H}^{\Gamma_f}_{2m}(X \times Y)$. Cela résulte de la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{IC}^\bullet_Y, \mathcal{IC}^\bullet_X) & \cong & \mathbb{H}^{2n}_{\Gamma_f}(X \times Y, \mathcal{IC}^\bullet_{X\times Y}) & \cong & \mathrm{IH}^{\Gamma_f}_{2m}(X \times Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ \mathrm{Hom}(f^*\mathbb{Q}_Y, \widetilde{\mathcal{D}}_X) & \cong & \mathbb{H}^{2n}_{\Gamma_f}(X \times Y, \widetilde{\mathcal{D}}_{X\times Y}) & \cong & \mathrm{H}^{\Gamma_f}_{2m}(X \times Y) \end{array}$$

où $\varphi(\mu) = \omega_X \circ \mu \circ f^*\alpha_Y$, resp. du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\mathcal{IC}^\bullet_X, f^!\mathcal{IC}^\bullet_Y[2s])) & \cong & \mathbb{H}^{2n}_{\Gamma_f}(X \times Y, \mathcal{IC}^\bullet_{X\times Y}) & \cong & \mathrm{IH}^{\Gamma_f}_{2m}(X \times Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_Y, f^!\widetilde{\mathcal{D}}_Y[2s]) & \cong & \mathbb{H}^{2n}_{\Gamma_f}(X \times Y, \widetilde{\mathcal{D}}_{X\times Y}) & \cong & \mathrm{H}^{\Gamma_f}_{2m}(X \times Y), \end{array}$$

où $\psi(\nu) = f^!\omega_Y \circ \nu \circ \alpha_X$. □

Universität Konstanz, Konstanz, Germany (G.B.,K.-H.F.,L.K.)
CIRM Luminy, Marseille Cedex 9, France (J.-P.B.)
IHES, Bures-sur-Yvette, France (O.G.)

REFERENCES

[1] G. BARTHEL, J.-P. BRASSELET and K.-H. FIESELER, Classes de Chern des variétés toriques singulières. C.R. Acad. Sci. Paris, **315**, Série I (1992), 187–192.

[2] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN and P. DELIGNE, Faisceaux pervers, in *Analyse et Topologie sur les espaces singuliers*, I Astérisque **100**(1982), 1–171.

[3] A. BOREL et al., *Intersection Cohomology*, Progress in Math. vol. 50, Birkhäuser 1984, Boston etc.

[4] W. BORHO and R. MACPHERSON, Partial resolutions of nilpotent varieties, in *Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers*, II–III, Astérisque **101–102**(1982), 23–74.

[5] J.-P. BRASSELET et G. GONZALEZ-SPRINBERG, Sur l'homologie d'intersection et les classes de Chern des variétés singulières. Travaux en cours n°23, Hermann 1987, 5–11.

[6] G. BREDON, *Sheaf Theory*, MacGraw-Hill, 1967, New York etc.

[7] J.-L. BRYLINSKI, (Co-)homologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki, 1981/82, n°585.

[8] D. COHEN, M. GORESKY and L. JI, On the Künneth formula for intersection cohomology, preprint, Northeastern University, Dec. 1989.

[9] P. DELIGNE, La conjecture de Weil I, Publ. Math. IHES **43**(1973), 273–308.

[10] ———, La conjecture de Weil II, Publ. Math. IHES **52**(1980), 138–252.

[11] ———, Décomposition dans la catégorie dérivée, A paraître dans les Actes de la Conférence de Seattle sur les motifs, Juillet 1991.

[12] J. DIEUDONNÉ, *Cours de Géométrie Algébrique, t.* 2. Collection SUP, Presses Univ. de France, 1973.

[13] O. GABBER, Pureté de la cohomologie de MacPherson-Goresky, rédigé par P. Deligne, prépublication IHES/M/81/8 (Février 1981).

[14] M. GORESKY and R. MACPHERSON, Intersection homology theory II, Inv. Math. **71**(1983), 77–129.

[15] ———, Lefschetz fixed point theorem for intersection homology, Comment. Math. Helv. **60**(1985), 366–391.

[16] R. MACPHERSON, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. **100**(1974), 423–432.

[17] ———, Global questions in the topology of singular spaces, Proc. ICM, Warszawa 1983, North Holland 1984, 213–235.

[18] [SGA $4\frac{1}{2}$], *Séminaire de Géométrie Algébrique. Cohomologie Étale*, Springer Lecture Notes in Math. 569 (1977).

[19] [SGA 5], *Séminaire de Géométrie Algébrique. Cohomologie ℓ-Adique et Fonction L*, Springer Lecture Notes in Math. 589 (1977).

[20] M.-H. SCHWARTZ, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C.R. Acad. Sci. Paris **260**, Série I (1965), 3262–3264 et 3535–3537.

[21] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et Théorème de Bertini-Sard. Invent. Math. **36**(1976), 295–312.

[22] S. YOKURA, Algebraic cycles and intersection homology, Proc. A.M.S. **103**(1988), 41–45.

(Received June 3, 1993)