Kombinatorik

Karl-Heinz Fieseler

Uppsala 2016

Contents

1 **Enumeration** **2**

2 **Rekursion** **13**

3 **Genererande funktioner** **21**

4 **Inklusion och Exklusion** **29**

1 Enumeration

Referens: Jf. Cameron, Ch.3 och 10; se också SK, Kap.2.1 och Kap.3. Den lilla utflykten till Ramseys sats i en förenklad version är tänkt för rolighetens skull: Den är inte tentamensrelevant.

Ett spel: Vi börjar med ett spel med två spelare: Man har en mängd $M \subset \mathbb{R}^2$ av n punkter i planet, sådant att inga tre punkter i M ligger på en linje. Omväxlande drar varje spelare förbindningslinjen mellan två punkter i M, den ena med en röd, den andra med en blå penna, varvid en förut dragen linje inte kan dras på nytt. Den som är först tvungen att fullborda en triangel (med hörn i M) i sin egen färg har förlorat. Frågan är nu om det kan hända att spelet slutar oavgjort. Vi påstår att det inte kan hända om $n \geq 6$: Annars slutar spelet med följande läge: Alla förbindningslinjer är dragna, de är röda eller blå och det finns ingen triangel vars kanter har samma färg. Numrera punkterna 1,2, ...,n, och skriv ij för förbindningslinjen från punkt i till punkt j. Titta nu på punkten 1. Det finns sträckorna $12, 13, ..., 1n$ utgående från 1. Eftersom $n \geq 6$ handlar det om minst fem stycken, och det blir åtminstone tre av samma färg; låt oss säga 12, 13, 14 är röda. Då är sträckorna 23, 34 och 42=24 blå och bildar en enfärgad triangel: Motsägelse!

Remark 1.1. I Th. 1.17 ska vi se att ovanstående resonemang kan generaliseras från trianglar till "ℓ-anglar". Här menas med en ℓ-angel en figur bestående av ℓ punkter samt sträckorna bland dem, t.ex. en tetrangel kan tänkas som kanterna till en kvadrat samt dess diagonaler. Men vi måste ersätta talet 6 genom ett tal $R(\ell)$, vars optimala värde inte alls är lätt att hitta. I själva verket visar vi bara, att ett sådant tal finns och anger en algoritm att beräkna ett inte nödvändigtvis optimalt värde för $R(\ell)$.

Fast det inte var mycket teori som använts i ovanstående argument ska vi diskutera några begrepp förknippade med det:

Definition 1.2. 1. Potensmängden $\mathcal{P}(M)$ till en mängd M är mängden av alla delmängder till M, dvs.

$$\mathcal{P}(M) := \{A; A \subset M\}.$$

2. För $k \in \mathbb{N}$ sätter vi

$$\mathcal{P}_k(M) := \{A; A \subset M, |A| = k\},$$

mängden av alla delmängder till M med k element. De kallas också för k-(del)mängder. I synnerhet kallas 2-delmängderna ibland också mängden M's kanter.

Example 1.3. 1. För $M = \emptyset$ har vi $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

2. För $|M| = 1$ har vi $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M\}$.

3. För $|M| = 2$, låt oss säga $M = \{x, y\}$, har vi $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, M\}$.

4. $\mathcal{P}_0(M) = \{\emptyset\}$, och $\mathcal{P}_n(M) = \{M\}$, om $|M| = n < \infty$.

5. Om $|M| = n < \infty$, så får vi en disjunkt uppdelning

$$\mathcal{P}(M) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(M).$$

Remark 1.4. I situationen av vårt spel kan sträckan $ij, i \neq j$, identifieras med 2-delmängden (kanten) $\{i, j\} \in \mathcal{P}_2(M)$.

Definition 1.5. En färgläggning av elementen i en mängd A är en avbildning

$$\chi : A \longrightarrow F,$$

där elementen i mängden $F = \{c_1, ..., c_r\}$ kallas för *färgar*.

Example 1.6. Ovan har vi tittat på färgläggningar

$$\chi : A := \mathcal{P}_2(M) \longrightarrow F := \{b = \text{blå}, r = \text{röd}\},$$

och sett att för $|M| \geq 6$ finns det en 3-delmängd $T \subset M$, vars kanter har samma färg.

Remark 1.7. Mängden av alla färgläggningar av elementen i M med färgar i $F = \{c_1, ..., c_r\}$ betecknas F^M. Om M är en ändlig mängd med n element, har vi

$$|F^M| = r^n,$$

eftersom för att skapa en färgläggning

$$\chi : M = \{a_1, ..., a_n\} \longrightarrow F = \{c_1, ..., c_r\}$$

får man plocka $\chi(a_i) \in F$ oberoende från varandra, och då blir det de r möjligheterna $c_1, ..., c_r$ för varje $i, 1 \leq i \leq n$.

Proposition 1.8. *För* $|M| = n$ *har vi*

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^n.$$

Proof. Ta $F := \{0, 1\}$. Vi skapar en bijektion

$$\Phi : \mathcal{P}(M) \longrightarrow F^M,$$

som skickar $A \in \mathcal{P}(M)$ till $\chi_A \in F^M$ med

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & , \quad \text{om } x \in A \\ 0, & , \quad \text{om } x \notin A \end{cases},$$

alltså

$$\Phi(A) = \chi_A.$$

Funktionen χ_A kallas också den karakteristiska funktionen (eller indikatorfunktionen) till $A \subset M$. Avbildningen Φ har den inversa avbildningen

$$\Phi^{-1} : F^M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$$

med

$$\Phi^{-1}(\chi) = \{x \in M; \chi(x) = 1\} \in \mathcal{P}(M).$$

Således

$$|\mathcal{P}(M)| = |F^M| = 2^n.$$

□

För nästa resultat påminner vi om fakulteterna: Vi har

$$0! := 1, n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$$

Proposition 1.9. *För en mängd M med n element gäller:*

$$|\mathcal{P}_k(M)| = \binom{n}{k}$$

med binomialkoefficienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ 0 \leq k \leq n.$$

Proof. Sätt

$$\tau_k(n) := |\mathcal{P}_k(M)|.$$

Vi visar med induktion följande n att

$$\tau_k(n) = \binom{n}{k}.$$

För $n = 1$ är saken klar. Om det är sant för n, så också för $n+1$: Låt $|M| = n+1$. Först konstaterar vi $\tau_0(n+1) = 1 = \binom{n+1}{0}$. Låt nu $k > 0$. Plocka ett element $b \in M$ och sätt $M^* := M \setminus \{b\}$. Sedan har vi en disjunkt union

$$\mathcal{P}_k(M) = \mathcal{P}_k(M^*) \cup \{B \cup \{b\}; B \in \mathcal{P}_{k-1}(M^*)\},$$

och således gäller

$$\tau_k(n+1) = \tau_k(n) + \tau_{k-1}(n) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = n!\left(\frac{n-k+1}{k!(n-k+1)!} + \frac{k}{k!(n-k+1)!}\right)$$

$$n! \cdot \frac{n+1}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

□

Remark 1.10. 1. Pascals triangel: Binomialkoefficienterna kan arrangeras så här:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array},$$

där i n-te raden står binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}, 0 \leq k \leq n$. Pga. rekursionsformeln är varje tal i triangeln summan av de två talen ovanför till höger och vänster.

2. Ett bevisalternativ till Prop.1.9: För att skapa en delmängd $A \in \mathcal{P}_k(M)$ plockar man ett element $a_1 \in M$, sedan ett element $a_2 \in M \setminus \{a_1\}$ och generellt, om $a_1, ..., a_\nu, \nu < k$, är hittade, så plockar man $a_{\nu+1} \in M \setminus \{a_1, ..., a_\nu\}$. Slutligen om $\nu = k$, så är man klar med plockandet och $A = \{a_1, ..., a_k\}$. I första steget finns det n möjligheter, i andra steget $n-1$ möjligheter, osv. Således finns det

$$n(n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

olika möjligheter att skapa följden(!) $(a_1, ..., a_k)$. Men det kan ju hända att $A = \{b_1, ..., b_k\}$ med en annan följd $(b_1, ..., b_k)$. Sedan definierar

$$\pi : A \longrightarrow A, a_\nu \mapsto b_\nu,$$

en bijektion från A till sig själv. Således

$$\tau_k(n) = \frac{1}{|\mathbb{S}(A)|} \cdot \frac{n!}{(n-k)!},$$

där $\mathbb{S}(A)$ betecknar mängden av alla bijektioner $A \longrightarrow A$ av en delmängd $A \subset M$ med k element. Använd nu Prop. 1.13.

Definition 1.11. En bijektiv avbildning

$$\pi : M \longrightarrow M$$

från en mängd M till sig själv kallas en permutation av M. Mängden av dessa permutationer betecknas så här:

$$\mathbb{S}(M) := \{\pi : M \longrightarrow M \text{ bijektiv}\}.$$

I synnerhet hittar man

$$\mathbb{S}_n := \mathbb{S}(M_n)$$

med

$$M_n := \{1, ..., n\}$$

och kallar $\mathbb{S}_n$ den "symmetriska gruppen på n bokstäver" (fast det egentligen handlar om tal).

Remark 1.12. Vi har två avbildningar förknippade med permutationer. Den första

$$\mathbb{S}(M) \times \mathbb{S}(M) \longrightarrow \mathbb{S}(M), (g, f) \mapsto g \circ f,$$

tillordnar två permutationer deras sammansättning; den andra

$$\mathbb{S}(M) \longrightarrow \mathbb{S}(M), f \mapsto f^{-1},$$

tillordnar en permutation dess inversa avbildning. Allmänt kallar man en mängd G (i stället för $\mathbb{S}(M)$) utrustad med två avbildningar $G \times G \longrightarrow G$ och $G \longrightarrow G$ en grupp, ifall de ”beter sig” som ovanstående avbildningar för $\mathbb{S}(M)$ gör.

Proposition 1.13. *Låt* $|M|$=*n. Sedan* $|\mathbb{S}(M)| = n!$

Proof. Övning! □

Theorem 1.14. *(Binomialsats)*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Proof. Ta $M = \{1, .., n\}$. En delmängd $A \subset M$ tillordnar vi produkten

$$p_A := p_1 \cdot ... \cdot p_n,$$

där

$$p_i := \begin{cases} x, & , \text{ om } i \in A \\ y, & , \text{ om } i \notin A \end{cases} .$$

Uppenbarligen

$$p_A := x^{|A|} y^{n-|A|}.$$

Således

$$(x+y)^n = \sum_{A \in \mathcal{P}(M)} p_A = \sum_{A \in \mathcal{P}(M)} x^{|A|} y^{n-|A|} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{A \in \mathcal{P}_k(M)} x^k y^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_k(M)| x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

□

Proposition 1.15. *Låt $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$. Antalet möjligheter att lägga k identiska kulor i lådorna $L_1, ..., L_n$ är*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Proof. Ett sätt att lägga k kulor i våra lådor bestäms av en funktion

$$\chi_A : M := \{1, ..., n+k-1\} \longrightarrow F := \{0,1\}, A \in \mathcal{P}_k(M),$$

dvs. bland följden $a_j = \chi_A(j)$ finns k ettor och $n-1$ nollor. Sedan är motsvarande kulofördelning följande: I L_i finns det lika många kulor som ettor före den i-te nollan och efter den $(i-1)$-te nollan ifall $1 < i < n$, medan för $i = 1$ resp. n gäller det ettor före den första nollan resp. efter den sista. Men enligt Prop. 1.9 vet vi

$$|\mathcal{P}_k(M)| = \binom{n+k-1}{k}.$$

□

Remark 1.16. Det finns ytterligare tolkningar av uttrycket $\binom{n+k-1}{k}$.

1. Det är antalet funktioner $f : M_n \longrightarrow \mathbb{N}$ med $\sum_{i \in M_n} f(i) = k$. Värdet $f(i)$ är då ingenting annat än antalet kulor i lådan L_i.
2. Det är antalet möjligheter att ta k kulor ur ett förråd med kulor av n olika färger $c_1, ..., c_n$. Om $f(i)$ är antalet borttagna kulor av färg c_i, så har vi ju $\sum_{i \in M_n} f(i) = k$.

Slutligen återkommer vi till frågan vi har diskuterat i början och vill nu veta vad som händer när man ersätter trianglar genom "ℓ-anglar":

Fråga: Låt $\ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$. Vad måste vi kräva för $|M|$, för att varje färgläggning $\chi : \mathcal{P}_2(M) \longrightarrow F = \{r, b\}$ med två färgar har en monokromatisk ℓ-delmängd $A \subset M$, dvs.

$$\chi|_{\mathcal{P}_2(A)} \equiv c$$

med $c = b$ eller $c = r$?

Vi ger inte något explicit svar, utan visar att det i alla fall finns någon lägre gräns för $|M|$:

Theorem 1.17 (Ramsey's Theorem, förenklat)**.** *För varje* $\ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$*, finns det ett tal* $R = R(\ell)$ *sådant att varje färgläggning*

$$\chi : \mathcal{P}_2(M) \longrightarrow F = \{b, r\}$$

av en mängd M *med åtminstone* R *element har en monokromatisk* ℓ*-delmängd* $A \subset M$*.*

Remark 1.18. I synnerhet: Om man färglägger kanterna till en oändlig mängd M, så finns det godtyckligt stora ändliga delmängder $A \subset M$ med kanter av samma färg. Det råder alltså inte "totalt kaos"! I själva verket finns det t.o.m. en oändlig monokromatisk delmängd $A \subset M$, se Th.1.22.

Example 1.19. Om man väljer $R(\ell)$ som det minimala talet R som uppfyller kraven i Th.1.17, så har vi: $R(3) = 6$.

Utsagan i Th.1.17 går enklare att visa, om vi förfinar den lite grann sådant att den handlar om varje färg för sig. Den lyder då så här:

Theorem 1.20. *För varje par* (ℓ_1, ℓ_2) *av naturliga tal* $\ell_i \geq 2$ *finns det* $R = R(\ell_1, \ell_2)$ *sådant att varje färgläggning*

$$\chi : \mathcal{P}_2(M) \longrightarrow F = \{b, r\} = \{c_1, c_2\}$$

av en mängd M *med åtminstone* R *element har en blå* ℓ_1*-delmängd eller en röd* ℓ_2*-delmängd.*

Remark 1.21. $R(\ell) = R(\ell, \ell)$.

Proof. Vi gör induktion följande $\ell := \ell_1 + \ell_2$.

1. Vi kan ta $R(2, \ell_2) = \ell_2, R(\ell_1, 2) = \ell_1$. ($R = 2$ duger ju inte, eftersom de konstanta färgläggningarna också är med.)

2. Nu antar vi $\ell_1 > 2, \ell_2 > 2$. Sedan ta

$$L_1 = R(\ell_1 - 1, \ell_2), L_2 = R(\ell_1, \ell_2 - 1).$$

Talen är väldefinierade enligt induktionshypotesen. Slutligen

$$R := L_1 + L_2.$$

Låt nu M vara en mängd med $|M| \geq R$ och

$$\chi : \mathcal{P}_2(M) \longrightarrow F$$

en färgläggning; ytterligare $M^* := M \setminus \{b\}$ med något $b \in M$. Vi definierar

$$\chi^* : M^* \longrightarrow F, a \mapsto \chi(\{a, b\}).$$

Låt n_i vara antalet punkter i M^* av färg c_i. Eftersom $n_1 + n_2 = |M^*| \geq L_1 + L_2 - 1$, gäller $n_1 \geq L_1$ eller $n_2 \geq L_2$ – annars hade vi ju $n_1 < L_1, n_2 < L_2$ och således $n_1 + n_2 \leq L_1 + L_2 - 2$. Låt oss säga $n_1 \geq L_1$, låt $M_1^* \subset M^*$ vara punkterna av färg c_1. Enligt val av L_1 hittar vi då

(a) en $(\ell_1 - 1)$-mängd $C \subset M_1^*$ med $\chi|_{\mathcal{P}_2(C)} \equiv c_1$
eller

(b) en ℓ_2-mängd $A \subset M_1^*$, sådant att $\chi|_{\mathcal{P}_2(A)} \equiv c_2$.

I fall (b) har vi lyckats, i fall (a) tar vi $A = C \cup \{b\}$.

□

För nöjets skull visar vi:

Theorem 1.22. *Låt*

$$\chi : \mathcal{P}_2(M) \longrightarrow F = \{b, r\}$$

vara en färgläggning av kanterna till en oändlig mängd M. Då finns det en oändlig monokromatisk delmängd $A \subset M$.

Proof. Beviset bygger inte på Th.1.20 eller dess bevis; det utnyttjar systematiskt $|M| = \infty$ och är inte konstruktivt:

Man skapar induktivt en följd $(x_n) \subset M$, sådant att kanterna $\{x_n, x_j\}$ har samma färg $c_n \in F$ för alla $j > n$. Eftersom det ju bara finns två färger hittar vi en oändlig delmängd $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ sådant att $c_n \equiv c \in F$ för alla $n \in \mathbb{N}_0$ och ta

$$A := \{x_n; n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tillsammans med följden (x_n) skapar man en avstigande följd av oändliga delmängder $M_n \subset M$ med $x_n \in M_n$. Man börjar med ett godtyckligt $x_0 \in$

$M_0 := M$. Om x_n, M_n har hittats, ta $M_n^* := M_n \setminus \{x_n\}$. Sedan har vi $M_n^* = R \cup B$, där R resp. B består av punkterna i M_n^*, sådant att kanterna $\{x_n, x\}$ är röda resp. blåa. Åtminstone en av dem är oändlig och den blir då M_{n+1}. Ta sedan ett godtyckligt $x_{n+1} \in M_{n+1}$. $\square$

Multinomialkoefficienter: En delmängd $A \subset M$ ger upphov till en disjunkt uppdelning

$$M = A \cup (M \setminus A).$$

Vi tittar nu på uppdelningar i fler än två delmängder. För det behövs lite förenklad notation:

Definition 1.23. Låt $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_r) \in \mathbb{C}^r, \mathbf{k} = (k_1, ..., k_r) \in \mathbb{N}^r$.

1. $|\mathbf{k}| = k_1 + ... + k_r$,
2. $\mathbf{k}! := k_1! \cdot ... \cdot k_r!$,
3. $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_r^{k_r}$.

Proposition 1.24. *Låt $n = k_1 + ... + k_r$. Antalet disjunkta uppdelningar*

$$M = M_1 \cup ... \cup M_r$$

av en mängd M med n element i delmängder $M_i, i = 1, ..., r$ av ordning $|M_i| = k_i$ är multinomialkoefficienten

$$\binom{n}{\mathbf{k}} := \frac{n!}{\mathbf{k}!},$$

där $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_r)$

Proof. En uppdelning fås fram från en följd $(a_1, ..., a_n)$ som tömmer ut M, dvs. $M = \{a_1, ..., a_n\}$, genom att dela upp den i r bitar av längd $k_1, ..., k_r$. Mängden M_i består då av elementen i den i-te biten. Den tillhörande uppdelningen är den samma för följden $(b_1, ..., b_n)$, om permutationen $\pi : M \longrightarrow M, a_i \mapsto b_i$, bevarar delmängderna M_i. Nu motsvarar sådana permutationer r-tipplar

$$(\pi_1, ..., \pi_r) \in \mathbb{S}(M_1) \times ... \times \mathbb{S}(M_r).$$

Eftersom det finns $\mathbf{k}! = k_1! \cdot ... \cdot k_r!$ sådana r-tipplar och $n!$ följder $(a_1, ..., a_n)$ följer påståendet. $\square$

Definition 1.25. Givet ett alfabet $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_r\}$ och $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_r)$ betecknar vi med

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})$$

mängden av alla $\mathcal{A}$-ord, där bokstaven a_i förekommer k_i-gånger.

Theorem 1.26. *Låt $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_r\}$ vara ett alfabet med r bokstäver, $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_r)$ med $|\mathbf{k}| = n$. Sedan*

$$|\mathcal{A}(\mathbf{k})| = \binom{n}{\mathbf{k}}.$$

Proof. Märk bokstäverna i alfabetet $\mathcal{A}$, dvs. titta på alfabetet

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(a_i, j); 1 \leq j \leq k_i\}.$$

Sedan

$$|\mathcal{A}(\mathbf{k})| = \frac{|\tilde{\mathcal{A}}(\overbrace{1, ..., 1}^{n\times})|}{\mathbf{k}!} = \frac{n!}{\mathbf{k}!}.$$

□

Example 1.27.

1. Hur många ord kan bildas från ordet MISSISSIPPI genom omkastning av bokstäver? Lösning: Vi tittar på situationen

$$\mathcal{A} = \{M, I, S, P\}, \mathbf{k} := (1, 4, 4, 2)$$

och får svaret

$$|\mathcal{A}(\mathbf{k})| = \binom{11}{\mathbf{k}} = 34650.$$

2. Hur många av dessa ord innehåller ordet SPIS? Lösning: Vi tar

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{M, I, S, P, A\}, \tilde{\mathbf{k}} = (1, 3, 2, 1, 1)$$

och tittar på avbildningen

$$F : \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{k}}) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbf{k}),$$

där $F(O)$ erhålls av O genom att bokstaven A ersätts genom bokstavsföljden SPIS. Vi har

$$|\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{k}})| = \binom{8}{\mathbf{k}} = 3360.$$

Avbildningen F är uppenbarligen surjektiv, men tyvärr inte injektiv: Det finns högst två SPISar: Antingen är SPISarna disjunkta, t.ex.

$$MISPISIA \xrightarrow{F} MISPISISPIS \xleftarrow{F} MIAISPIS.$$

eller de överlappar varandra så här (SPI[S)PIS], t.ex.

$$MISISPIA \xrightarrow{F} MISISPISPIS \xleftarrow{F} MISIAPIS.$$

Så vi måste subtrahera antalet ord där det ena eller det andra fenomenet dyker upp:

(a) Räkna antalet ord med 5 bokstäver i alfabetet $\{M, I, A\}$ med $\mathbf{k} = (1, 2, 2)$; det blir 30 stycken,

(b) räkna antalet ord med 5 bokstäver i alfabetet $\{M, I, S, B\}$ med $\mathbf{k} = (1, 2, 1, 1)$ - bokstaven B står för $SPISPIS$; det blir 60 stycken.

Det slutgiltiga resultatet är således $3360 - 30 - 60 = 3270$.

Theorem 1.28. *Multinomialsatsen:*

$$(x_1 + ... + x_r)^n = \sum_{|\mathbf{k}|=n} \binom{n}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}.$$

2 Rekursion

Att räkna träd: Ett trädliv:

1. I dess första år bär det ingen frukt.
2. I varje år därpå bär det en frukt.
3. Frukten ramlar ner och under nästa år uppstår ett nytt träd.
4. Träden dör aldrig.

Anta nu att en frukt stoppas ner i marken i slutet av året 0.
Problem: Beräkna antalet t_n av träd i slutet av året n.

år	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
t_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89							

Så vi hittar:

1. $t_0 = 0, t_1 = 1$.

2. $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$.

Remark 2.1. Följden $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kallas Fibonacci-följden.

Fråga: $t_n = g(n) =$? Dvs. det efterlyses ett explicit uttryck $g(n)$.

Lösning: Först vill vi ha en riktig rekursion genom att skriva

$$(t_{n+2}, t_{n+1}) = F(t_n, t_{n-1}) = ...$$

eller kanske det är enklast att nöja sig med ett halvsteg

$$(t_{n+1}, t_n) = F(t_n, t_{n-1}) = (t_n + t_{n-1}, t_n).$$

På LA's språk lyder det så här:

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_n \\ t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Således:

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ är en egenvektor till A, sådant att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med ett komplext tal $\lambda \in \mathbb{C}$, så har vi

$$A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}.$$

Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är ingen egenvektor, men kanske A är diagonaliserbar och vi hittar en bas $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till A, låt oss säga $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Om vi sedan skriver

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$$

får vi

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\lambda_1^n \mathbf{v}_1 + \beta\lambda_2^n \mathbf{v}_2.$$

För att beräkna egenvärdena till A tar vi fram dess sekularpolynom

$$\chi_A = X^2 - X - 1$$

med nollställena

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

och egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix},$$

en bas till $\mathbb{R}^2$. I själva verket

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

Således

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \left[(1+\sqrt{5})^n \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} - (1-\sqrt{5})^n \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

resp.

$$t_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n).$$

Lägg märke till att i ovanstående uttryck termerna $\sqrt{5}^{2k} = 5^k$ tar ut varandra, medan $\sqrt{5}^{2k+1}/\sqrt{5} = 5^k$. Så det irrationella talet $\sqrt{5}$ behövs bara för att få en kortfattad formel.

Vi ska nu generalisera ovanstående exempel. Vi börjar med en linjär rekursionsrelation i r variabler, ett uttryck

$$L(x_1, ..., x_r) = c_1x_1 + ... + c_rx_r$$

med komplexa koefficienter $c_1, ..., c_r \in \mathbb{C}$ och är intresserade av alla följder

$$\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

som uppfyller

$$a_n = L(a_{n-1}, ..., a_{n-r})$$

för $n \geq r$. Vi får uppenbarligen anta att $c_r \neq 0$ - annars kan vi ju förkorta rekursionsrelationen. De utgör ett delrum

$$V_L \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

till vektorrummet $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ av alla komplexa följder. Följderna $\mathbf{a} \in V_L$ kallas också för L-rekursiva.

Remark 2.2. Värdena $a_0, ..., a_{r-1}$ bestämmer entydigt följden $\mathbf{a} \in V_L$, och varje vektor in $\mathbb{C}^r$ förekommer som ett begynnelsevärde. Eller med lite LA, så kan vi säga att avbildningen att

$$V_L \longrightarrow \mathbb{C}^r, \mathbf{a} \mapsto (a_0, ..., a_{r-1}),$$

är en isomorfism av komplexa vektorrum. I synnerhet gäller

$$\dim V_L = r.$$

Vi ska nu använda oss av samma strategi som i fallet av Fibonacciföljden. Vi tar fram ett komplext tal $\lambda \in \mathbb{C}$ och frågar, vad det behövs för att potensföljden

$$\underline{\lambda} := (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

är L-rekursiv. Uppenbarligen är det nödvändigt och tillräckligt att

$$\lambda^r = L(\lambda^{r-1}, \lambda^{r-1}, ..., \lambda, 1)$$

eller

$$p_L(\lambda) = 0$$

gäller med det karakteristiska polynomet

$$p_L := X^r - c_1 X^{r-1} - ... - c_{r-1} X - c_r$$

till rekursionsrelationen L. Lägg märke till att $p_L(\lambda) = 0$ innebär $\lambda \neq 0$ pga. $c_r \neq 0$. Men det finns fler möjligheter. Vi definierar

$$D : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

genom

$$D(\mathbf{a}) = (n a_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

I synnerhet gäller

$$D(\underline{\lambda}) = (n \lambda^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Theorem 2.3. *Låt* $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$ *vara nollställena till* p_L *med multipliciteterna* $r_1, ..., r_s$*, dvs:*

$$p_L = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{r_i}.$$

Sedan utgör varje av nedanstående familjer av följder

1. $D^j(\underline{\lambda_i}), i = 1, ..., s, 0 \leq j < r_i$
2. $\lambda_i^j D^j(\underline{\lambda_i}), i = 1, ..., s, 0 \leq j < r_i$
3. $(n^j \lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, i = 1, ..., s, 0 \leq j < r_i$

en bas till vektorrummet V_L *av alla L-rekursiva funktioner. I synnerhet har varje L-rekursiv följd* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_L$ *formen*

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} g_i(n) \lambda_i^n$$

med entydiga polynom $g_i(X)$ *av grad* $< r_i$*.*

Proof. Vi visar först $D^j(\underline{\lambda_i}) \in V_L$ för $i = 1, ..., s, 0 \leq j < r_i$. Vi skriver $\lambda = \lambda_i, \varrho = r_i$ och resonerar så här:

Låt $\lambda \in \mathbb{C}$ vara ett nollställe till $p = p_L$. För

$$q(X) := X^{n-r} p(X) = X^n - \sum_{i=1}^{r} c_i X^{n-i}$$

och $j < \varrho$ har vi för den j-te derivatan $q^{(j)}$ att

$$q^{(j)}(\lambda) = 0,$$

och det betyder ju helt enkelt

$$\frac{n!}{(n-j)!} \lambda^{n-j} - \sum_{i=1}^{r} c_i \left(\frac{(n-i)!}{(n-i-j)!} \lambda^{n-i-j} \right) = 0,$$

dvs.

$$b_n - \sum_{i=1}^{r} c_i b_{n-i} = 0$$

ifall $D^j(\underline{\lambda}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Så vi har visat att den första familjen består av L-rekursiva följder. Sedan är det lätt att se att de andra två familjer spänner upp samma delrum till V_L. Eftersom den tredje familjen är linjärt oberoende och

$$\dim V_L = r = \sum_{i=1}^{s} r_i,$$

följer påståendena. $\square$

Example 2.4. Vi tittar på rekursionsformeln

$$a_n = L(a_{n-1}, a_{n-2}) = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

Då har vi $p_L = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ och ser att följderna

$$(1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}$$

utgör en bas til V_L.

Till sist diskuterar vi följder $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ som uppfyller en inhomogen rekursionsrelation

$$a_n = L(a_{n-1}, ..., a_{n-r}) + d_n$$

med någon följd $\mathbf{d} = (d_n)_{n\geq r}$. För att förstå lite bättre situationen tittar vi på den linjära avbildningen

$$T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \mathbf{a} \mapsto \mathbf{c} = (c_n),$$

där

$$c_n := a_{n+r} - L(a_{n+r-1}, ..., a_n),$$

så $d_{n+r} = c_n$. För $k \in \mathbb{N}$ och $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierar vi delrummet

$$E_k(\lambda) := \{\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}; a_n = q(n)\lambda^n \text{ med ett polynom } q(X) \text{ av grad } \leq k\}.$$

Uppenbarligen gäller

$$\dim E_k(\lambda) = k + 1.$$

Det är lätt att kolla att delrummen $E_k(\lambda)$ är T-invarianta, dvs.

$$T(E_k(\lambda)) \subset E_k(\lambda).$$

Vi har redan sett att

$$\ker(T) = V_L = E_{r_1-1}(\lambda_1) + ... + E_{r_s-1}(\lambda_s).$$

Det följer att T inducerar en isomorfism

$$E_k(\lambda) \xrightarrow{\cong} E_k(\lambda),$$

om $p_L(\lambda) \neq 0$. Om däremot $p_L(\lambda) = 0$ med multiplicitet ϱ, så får vi en surjektiv avbildning

$$E_{k+\varrho}(\lambda) \twoheadrightarrow E_k(\lambda).$$

med kärna $E_{\varrho-1}(\lambda)$. Vi sammanfattar

Theorem 2.5. *Låt $q(X)$ vara ett polynom av grad k samt $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ med multiplicitet ϱ som nollställe till $p_L(X)$, i synnerhet $\varrho = 0$ om $p_L(\lambda) \neq 0$*

1. *Det finns en entydig följd $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ som uppfyller*

   $$a_n = L(a_{n-1}, ..., a_{n-r}) + q(n)\lambda^n$$

   sådant att

   $$a_n = n^\varrho g(n)\lambda^n.$$

   med ett polynom $g(n)$ av grad k.

2. *Mängden av alla följder i $E(\lambda) := \bigcup_{\ell=0}^{\infty} E_\ell(\lambda)$ som uppfyller den givna rekursionsrelationen är*

   $$\mathbf{a} + E_{\varrho-1}(\lambda).$$

Example 2.6. 1. Vi vill lösa

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n.$$

Först $p_L(X) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. Med $\lambda = 2$ har vi $q(X) = 1, k = 0, \varrho = 2$ och vet enligt Th.2.5 att $(n^2 g 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ är en lösning för lämpligt $g \in \mathbb{R}$. För att bestämma g stoppa vi uttrycket in i rekursionsrelationen och får ekationen

$$g \cdot n^2 2^n = 4(n-1)^2 g 2^{n-1} - 4(n-2)^2 g 2^{n-2} + 2^n$$
$$g \cdot n^2 2^n + 0 \cdot n 2^n + (1-2g) \cdot 2^n.$$

Således $g = \frac{1}{2}$ och den allmänna lösningen i $E(2)$ har formen

$$\frac{1}{2}(n^2 2^n)_{n\in\mathbb{N}} + a(n2^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(2^n)_{n\in\mathbb{N}},\ a, b \in \mathbb{C}.$$

2. Vi letar efter följden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + \binom{n}{2}, a_0 = 0 = a_1.$$

Vi har igen $p_L(X) = (X-2)^2$ och $\lambda = 1, \varrho = 0, k = 2, q(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X)$. Först tar vi fram lösningen enligt Th.2.5, dvs. vi letar efter en följd

$$(g(n))_{n\in\mathbb{N}}$$

med ett kvadratiskt polynom $g(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Vi stoppar in i rekursionsrelationen:

$$g(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma = 4(g(n-1) - g(n-2)) + \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot n^2 + \left(8\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot n + (4\beta - 12\alpha),$$

dvs.

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{7}{2},\ \gamma = 8,$$

resp.

$$g(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{7}{2}X + 8.$$

Slutligen gäller det att bestämma $A, B \in \mathbb{C}$, sådant att

$$\mathbf{a} = (g(n))_{n\in\mathbb{N}} + A(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + B(n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

uppfyller $a_0 = 0 = a_1$. Med andra ord: $A = -8, B = 2$ och så har vi hittat:

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 8 + (n-4) \cdot 2^{n+1}.$$

3. Om vi tittar på en följd

$$q(n)\lambda^n + \tilde{q}(n)\tilde{\lambda}^n,$$

så hittar vi polynom $g, \tilde{g}$ som ovan och får lösningen

$$n^{\varrho}g(n)\lambda^n + n^{\tilde{\varrho}}\tilde{g}(n)\tilde{\lambda}^n.$$

3 Genererande funktioner

I kombinatoriken gäller det ofta att förstå en följd av tal $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, som räknar någonting man är intresserad av. Följder kan man addera, men också multiplicera. Deras multiplikation är enklast att hantera om man skriva i stället för $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en serie:

Definition 3.1. Potensserien

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$

kallas den till följden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tillhörande *genererande funktionen.*

Om det bara är ändligt många $a_n \neq 0$, så handlar det om ett polynom och man kan tolka summan som ett uttryck som beskriver en funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) := \sum_n a_n z^n.$$

Låt oss i stället titta på den enklaste oändliga serien, den geometriska serien

$$f = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots.$$

Vi vet att $f(z)$ är definierat för $|z| < 1$ och får en komplexvärd funktion

$$D_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$$

på enhetscirkelskivan $D_1(0)$. Här betecknar

$$D_r(0) := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

den öppna cirkelskivan i det komplexa planet med radien r. Men det kan lika bra hända att $f(z)$ har någon mening bara om $z = 0$, då vi har

$$f(0) = a_0.$$

T.ex. för

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} n! X^n$$

är det så. Ändå kan vi manipulera sådana serier - de kallas *för formella potensserier*. Mängden av dessa serier betecknas

$$\mathbb{C}[[X]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n ; a_n \in \mathbb{C} \right\},$$

den omfattar mängden

$$\mathbb{C}[X] = \left\{ \sum_{n=0}^{r} a_n X^n ; r \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

av alla polynom. De adderas koefficientvis

$$\sum_n a_n X^n + \sum_n b_n X^n = \sum_n (a_n + b_n) X^n,$$

medan multiplikationen bygger på likheten $X^n X^m = X^{n+m}$. Med andra ord:

$$\left(\sum_n a_n X^n \right) \cdot \left(\sum_n b_n X^n \right) = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n.$$

Example 3.2. $(1 - X) \cdot \sum_n X^n = 1$. Så vi får definiera

$$\frac{1}{1-X} := \sum_{n=0}^{\infty} X^n \in \mathbb{C}[[X]].$$

Proposition 3.3. *Om $f(0) \neq 0$, så finns det $g \in \mathbb{C}[[X]]$ med*

$$fg = 1.$$

Vi skriver då $\frac{1}{f} := g$.

Proof. Skriv $f = a_0 - Xh(X)$. Vi får anta $a_0 = 1$ och tar

$$g := 1 + Xh(X) + X^2 h(X)^2 + ... = \sum_n a_n X^n$$

Summan är väldefinierad, eftersom det är bara termerna

$$X^k h(X)^k, k \leq n$$

som bidrar till a_n. Med andra ord: Den oändliga summan är koefficientvis en ändlig summa, där antalet termer som bidrar till a_n är $n + 1$. □

Example 3.4.

$$\frac{1}{1+(X-X^2)} = 1-(X-X^2)+(X-X^2)^2-(X-X^2)^3+...$$

$$1-(X-X^2)+(X^2-2X^3+X^4)-X^3+.... = 1-X-3X^3+.....$$

Definition 3.5. För $f = \sum_n a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ definierar vi dess derivata

$$f' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} X^{n-1}$$

och den n-te derivatan

$$f^{(n)} \in \mathbb{C}[[X]]$$

genom induktion:

$$f^{(0)} := f, f^{(n+1)} := (f^{(n)})'.$$

Proposition 3.6.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n.$$

Example 3.7. 1. Binomialkoefficienter: Ta $f = (1+X)^n = \sum_k a_k X^k$, där a_k är antalet möjligheter at skriva k som en summa

$$k = t_1 + ... + t_n$$

med termer $t_i \in \{0,1\}$ resp. $a_k = |\mathcal{P}_k(\{1,...,n\}|$. Enligt Taylor har vi

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Nu är

$$f^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(1+X)^{n-k},$$

dvs.

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ och } a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

2. Vi har

$$f := \left(\frac{1}{1-X}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

med $a_k =$ antalet sätt att skriva

$$k = t_1 + ... + t_n,$$

med termer $t_i \in \mathbb{N}$. Nu har vi

$$f^{(k)} = n(n+1) \cdot ... \cdot (n+k-1) \frac{1}{(1-X)^{n+k}}$$

och således

$$f^{(k)}(0) = n(n+1) \cdot ... \cdot (n+k-1)$$

resp.

$$a_k = \frac{1}{k!} n(n+1) \cdot ... \cdot (n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Vi sammanfattar

$$\left(\frac{1}{1-X}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k.$$

3. Om a_n är antalet sätt att betala n kronor med 1, 5, 10kronorsmynt, 50- och hundralappar, så har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{1}{1-X} \frac{1}{1-X^5} \frac{1}{1-X^{10}} \frac{1}{1-X^{50}} \frac{1}{1-X^{100}}.$$

Vi kommer tillbala till L-rekursiva följder:

Theorem 3.8. *Låt*

$$h(X) = X^r p_L(X^{-1}) = 1 - \sum_{i=1}^{r} c_i X^i = \prod_{i=1}^{s} (1 - \lambda_i X)^{r_i},$$

där p_L är det karakteristiska polynomet till rekusionsrelationen L av längd r. För en potensserie

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

är följande påståenden ekvivalenta:

1. *Den är den genererande funktionen till en L-rekursiv följd* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, dvs.*

$$a_n - c_1 a_{n-1} - ..... - c_r a_{n-r} = 0,\ \forall n \geq r.$$

   med $c_r \neq 0$.

2. *Vi har*

$$f(X) = \frac{g(X)}{h(X)}$$

   med ett polynom $g \in \mathbb{C}[X], \deg(g) < r$.

Example 3.9. För Fibonacciföljden $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ har vi $r = 2$ och

$$p_L(X) = X^2 - X - 1,\ h(X) = 1 - X - X^2.$$

Ansatsen

$$g(X) = c + dX$$

leder till

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} t_n X^n = (c + dX)(1 + (X + X^2) + ...) = c + (d + c)X + ...$$

dvs.

$$c = 0, d = 1.$$

Alltså

$$f = \frac{X}{1 - X - X^2}.$$

Våra resultat om L-rekursiva funktioner följer också från

Theorem 3.10. *Låt*

$$f = \frac{g}{h} \in \mathbb{C}[[X]]$$

med ett polynom $g \in \mathbb{C}[X]$ *och*

$$h(X) = \prod_{i=1}^{s} (1 - \lambda_i X)^{r_i}.$$

Sedan kan vi entydigt skriva

$$f = p(X) + \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\beta_{ij}}{(1 - \lambda_i X)^j} \right)$$

med ett polynom $p(X)$ *av grad* $\deg(g) - \deg(h)$ *och* $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$.

Corollary 3.11. *Rationella funktioner*

$$f = \frac{g}{h}, \ \deg(g) < r,$$

motsvarar bijektivt summorna

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\beta_{ij}}{(1-\lambda_i X)^j} \right), \ \beta_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Remark 3.12. Första termen p får man med hjälp av en polynomdivision

$$g = ph + r,$$

där $\deg(r) < \deg(h)$. Sedan får vi

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{h} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{h}{(1-\lambda_i X)^j} \cdot \beta_{ij} \right) \right)$$

resp.

$$r = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{h(X)}{(1-\lambda_i X)^j} \cdot \beta_{ij} \right)$$

och jämför koefficienter framför X^k på VL och HL. Det blir ett ekvationssystem i de obekanta β_{ij} med en entydig lösning.

Example 3.13. 1.

$$f = \frac{1}{(1-\lambda X)(1-\mu X)} = \frac{A}{1-\lambda X} + \frac{B}{1-\mu X}$$

$$= \frac{(A+B) - (B\lambda + A\mu)X}{(1-\lambda X)(1-\mu X)},$$

dvs.

$$A + B = 1, B\lambda + A\mu = 0.$$

resp.

$$A = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \ B = \frac{\mu}{\lambda - \mu}.$$

2.
$$f = \frac{1+3X}{1-3X^2+2X^3}$$

Vi har

$$1-3X^2+2X^3 = (1-X)(1+X-2X^2) = (1-X)^2(1+2X).$$

Således
$$f = \frac{A}{1-X} + \frac{B}{(1-X)^2} + \frac{C}{1+2X}.$$

Då har vi

$$C = \lim_{x\to -1/2} f(x)(1+2x) = \frac{1+3x}{(1-x)^2}\bigg|_{x=-1/2} = -\frac{2}{9}.$$

Ytterligare

$$B = \lim_{x\to 1} f(x)(1-x)^2 = \frac{1+3x}{1+2x}\bigg|_{x=1} = \frac{4}{3}.$$

Till sist får vi $A = -\frac{1}{9}$ pga. $1 = A+B+C$ - jämför den konstanta termen i täljarpolynomen.

Corollary 3.14. *Vektorrummet $V_L \subset \mathbb{C}^n$ har basen*

$$\left(\binom{j+n-1}{n}\lambda_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

där $1 \le i \le s, 1 \le j \le r_i$.

Remark 3.15. $\binom{j+n-1}{n}$ är ett polynom av grad $j-1$ i variabeln n.

Proof. Låt
$$h(X) = X^r p_L(X^{-1}) = \prod_{i=1}^{s}(1-\lambda_i X)^{r_i}.$$

Följderna $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_L$ motsvarar rationella funktioner

$$\mathbb{C}[[X]] \ni \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \frac{g(X)}{h(X)},\ \deg(g) < r = \deg(h),$$

och via partialbråksuppdelning motsvarar de summor

$$\frac{g(X)}{h(X)} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\beta_{ij}}{(1-\lambda_i X)^j} \right).$$

Men vi har redan sett att

$$\frac{1}{(1-\lambda_i X)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j+n-1}{n} \lambda_i^n X^n,$$

använd Ex.3.7.2 med j i stället för n och n i stället för k. $\square$

Definition 3.16. Potensserien

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n.$$

kallas den till följden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tillhörande *exponentiella genererande funktionen.*

Example 3.17. Låt $a_n :=$ antalet sätt att bilda ord med n bokstäver från alfabetet A, B, C med två A. Med andra ord, $a_n =$ antalet disjunkta uppdeliningar

$$\{1, ..., n\} = P_A \cup P_B \cup P_C, |P_A| \geq 2.$$

Således

$$a_n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^3, k_1\geq 2} \binom{n}{\mathbf{k}}$$

och

$$\frac{a_n}{n!} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^3, |\mathbf{k}|=n, k_1\geq 2} \frac{1}{\mathbf{k}!}.$$

Med andra ord

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^3, |\mathbf{k}|=n, k_1\geq 2} \frac{T^{|\mathbf{k}|}}{\mathbf{k}!}$$

$$= (e^X - 1 - X)e^X e^X = e^{2X}(e^X - 1 - X).$$

4 Inklusion och Exklusion

Remark 4.1. 1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Theorem 4.2. *Låt Ω vara en ändlig mängd och $A_1, ..., A_r \subset \Omega$. Ytterligare*

$$X := \bigcup_{i=1}^{r} A_i, \ Y := \Omega \setminus X,$$

medan, för $J \subset M_r := \{1, ..., r\}$ sätter vi

$$A_J := \bigcap_{i \in J} A_i.$$

Sedan

1.
$$|Y| = \sum_{J \subset M_r} (-1)^{|J|} |A_J|$$

2.
$$|X| = \sum_{\emptyset \neq J \subset M_r} (-1)^{|J|-1} |A_J|.$$

Proof. För en funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sätter vi

$$\int_\Omega f := \sum_{x \in \Omega} f(x)$$

och anmärker att
$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g.$$

och
$$\int_\Omega \chi_A = |A|.$$

Vi har
$$Y = \bigcap_{i=1}^{r} B_i$$

med $B_i := \Omega \setminus A_i$.

$$\chi_Y = \prod_{i=1}^{r} \chi_{B_i} = \prod_{i=1}^{r}(1 - \chi_{A_i})$$

$$= \sum_{J \subset M_r} (-1)^{|J|} \prod_{i \in J} \chi_{A_i} = \sum_{J \subset M_r} (-1)^{|J|} \chi_{A_J}.$$

Integration ger den första likheten. Andra likheten följer sedan från:

$$|X| = |\Omega| - |Y| = |\Omega| - |A_\emptyset| + \sum_{\emptyset \neq J \subset M_r} (-1)^{|J|-1} |A_J|.$$

□

Corollary 4.3. *Om* $|A_J|$ *bara beror av* $|J|$, *dvs.* $|A_J| = t_{|J|} \in \mathbb{N}$, *så har vi*

1.

$$|Y| = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} t_k.$$

2.

$$|X| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} t_k.$$

Example 4.4. Låt X, Y vara mängder, $m := |X| \geq n := |Y|$. Sedan är

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

antalet surjektiva funktioner $f : X \longrightarrow Y$. Vi tar

$$\Omega = Y^X$$

och för $y \in Y$ sätter vi

$$A_y := \{f \in Y^X; y \notin f(X)\}.$$

Således är

$$\Omega \setminus \bigcup_{y \in Y} A_y$$

mängden av alla surjektiva funktioner från X till Y. Men för $J \subset Y$ har vi

$$A_J = (Y \setminus J)^X$$

resp.

$$|A_J| = (n - k)^m$$

om $k = |J|$.