

En inledning till
GEOMETRI

Lars-Åke Lindahl

© Lars-Åke Lindahl

Matematiska institutionen,
Uppsala universitet
2004

Innehåll

Förord	iii
Symbolista	iv
GEOMETRINS UTVECKLING OCH HISTORIA	1
1.1 Geometrins ursprung	1
1.2 Den deduktiva geometrins uppkomst	3
1.3 Eudoxos proportionalitetsdefinicion	4
1.4 Elementa	7
1.5 Infinitesimala metoder och uttömningsmetoden	11
1.6 Tre klassiska problem	15
1.7 Geometrins utveckling efter storhetstiden	17
1.8 Parallellpostulatet	19
NEUTRAL GEOMETRI	22
2.1 Incidensaxiomen	23
2.2 Modellbegreppet, motsägelsefrihet, oberoende	24
2.3 Ordningsaxiomen	28
2.4 Strålar, halvplan och vinklar	33
2.5 Polygoner	37
2.6 Kongruensaxiomen	47
2.7 Kongruensfallen	50
2.8 Parallella linjer, mittpunkter, bisektriser och räta vinklar	54
2.9 Längdmått och vinkelmått	60
2.10 Triangelns sidor och vinklar	66
2.11 Kontinuitetsaxiomet	71
2.12 Cirklar	79
2.13 Triangelns vinkelsumma och parallellaxiomet	84
EUKLIDISK GEOMETRI	96
3.1 Det euklidiska parallellaxiomet	96
3.2 Likformighet	98
3.3 Delningsförhållande	105
3.4 Cevas och Menelaos satser	109
3.5 Dubbelförhållande	115
3.6 Analytisk geometri	121
3.7 Motsägelsefrihet och kategoricitet	123
3.8 Cirklar	124
3.9 Ortogonala cirklar	129
3.10 Inversion	133
3.11 Mohr–Mascheronis sats	139

Appendix	144
Personregister	149
Sakregister	150

Förord

Det här kompendiet är avsett för en första kurs i geometri på universitetsnivå. En sådan kurs bör enligt min mening presentera någon axiomatisk framställning av euklidisk geometri samt innehålla en historisk översikt över geometrins utveckling. Dessutom bör förstås mycket tid ägnas åt problemlösning.

Kompendiet startar följaktligen med en kortfattad historisk översikt, och därefter presenteras neutral och euklidisk geometri axiomatiskt. (Neutral geometri brukar vanligen kallas absolut geometri, men då detta namn kan ge intryck av att absolut geometri i någon mening skulle vara absolut sann, har jag föredragit namnet neutral geometri; den neutrala geometrin är neutral i förhållande till parallellaxiomen.)

Vid valet av axiomsystem föreligger naturligtvis många goda alternativ. Huvudvalet står mellan att presentera något system i Euklides anda eller att basera geometrin på transformationer. Jag har valt det förstnämnda och utgår närmare bestämt från Hilberts axiomsystem för plan geometri. De primitiva begreppen och axiomen i Hilberts system har nämligen en omedelbar intuitiv apell och ansluter dessutom väl till Euklides ursprungliga system.

Materialet i kompendiet torde gott och väl räcka till en 5-poängskurs. Om man önskar skära, kan man t ex läsa kapitel 2 översiktligt samt utesluta de tre sista avsnitten i kapitel 3. En lämplig kurs kan således bestå av kapitel 1 och avsnitten 2.1–2.4, 2.6–2.8, 2.10, 2.12, 3.1–3.8. Kapitel 3 kan också läsas oberoende av kapitel 2.

Kompendiet skrevs ursprungligen för en kurs i geometri som jag höll höstterminen 1985. I samband med att jag nu gjort en elektronisk version av kompendiet har jag redigerat om det ursprungliga materialet en smula.

Uppsala den 11 februari 2004
LARS-ÅKE LINDAHL

Symbollista

I kompendiet används följande symboler och beteckningar, som definieras eller införs på angiven sida.

		sid
AB	sträckan mellan punkterna A och B	29
$[AB]$	den slutna sträckan mellan A och B	37
\overline{AB}	linjen genom punkterna A och B	23
\overrightarrow{AB}	strålen från punkten A genom punkten B	34
$ AB $	längden av sträckan AB	60
$A - B - C$	B ligger mellan punkterna A och C	28
$\triangle ABC$	triangeln med hörn i A , B och C	29
$A_1A_2 \dots A_n$	polygonen med hörn i A_1, A_2, \dots, A_n	37
$\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$	sträcktåget $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$	37
$\angle(r, s)$	vinkeln mellan strålarna r och s	34
$\angle ABC$	vinkeln vid hörnet B i triangeln $\triangle ABC$	35
$\angle(r, s)^\circ$	storleken av vinkel $\angle(r, s)$	62
\mathbf{R}	storleken av den räta vinkeln (dvs 90°)	62
α^c	supplementvinkeln till α ($= 2\mathbf{R} - \alpha$)	62
$[r, A, B, s]$	biangel	90
$\mathcal{C}(O; r)$	cirkeln med medelpunkt O och radie r	79
$\mathcal{C}(O; A)$	cirkeln genom A med medelpunkt i O	140
\widehat{APB}	cirkelbågen mellan A och B genom P	80
$\mu(P; A, B)$	delningsförhållande	106
$(A, B; C, D)$	dubbelförhållande av punkter på en linje eller cirkel	115, 128
$(a, b; c, d)$	dubbelförhållande av linjer ur ett linjeknippe	119
vinkelsum(π)	vinkelsumman hos polygonen π	85
def(π)	defekten hos polygonen π	86
inre(π)	det inre av polygonen π	39
yttre(π)	det yttre av polygonen π	39
$\partial\pi$	randen till polygonen π	38
$\overline{\pi}$	det slutna polygonområdet till π	44
\parallel	är parallell eller sammanfaller med	58
\perp	är vinkelrät mot	58
\equiv	är kongruent med	47, 50
\sim	är likformig med	100
ssa	ligger på samma sida om linjen a som	33
ssO	ligger på samma sida om punkten O som	33
\mathcal{P}	mängden av alla punkter	23
\mathcal{L}	mängden av alla linjer	23
\mathcal{S}	mängden av alla ekvivalensklasser av kongruenta sträckor	60
\mathcal{V}	mängden av alla ekvivalensklasser av kongruenta vinklar	62
\mathcal{V}_g	mängden av alla generaliserade vinkelmått	64
$\infty, \infty_{\mathcal{K}}$	oändlighetspunkter	107, 133
ℓ_∞	oändlighetslinjen	107

1 *Geometrins utveckling och historia*

När mänskligheten först började tänka i abstrakta banor om sådant som vi idag kallar matematik, var algebra, talteori och geometri oskiljbara syskon. Av olika anledningar kom emellertid geometri att bli den gren av matematiken som först utvecklades till en deduktiv vetenskap. Detta skedde naturligtvis inte över en natt utan utvecklingen tog ett par hundra år och kan sägas vara fullbordad i och med att Euklides skrev sitt berömda verk *Elementa* för ca 2300 år sedan. Detta arbete är onekligen en viktig milstolpe i det mänskliga tänkandets historia.

En annan viktig landvinning är upptäckten av icke-euklidiska geometrier i början av 1800-talet. Dessförinnan var all matematik resultat av olika försök att beskriva den "objektiva verkligheten". Upptäckten av icke-euklidiska geometrier initierade ett intresse för formella axiomsystem och abstrakta matematiska teorier utan direkt anknytning till verkligheten.

Geometrin har naturligtvis påverkat utvecklingen inom andra grenar av matematiken och inom andra vetenskaper. Under en lång tid accepterades t ex endast geometriska metoder inom algebra och talteori, och detta kom snart att verka hämmande på utvecklingen inom dessa områden. Mekaniken hade under 1500- och 1600-talen geometrin som förebild; exempelvis är Newtons *Principia* tydligt modellerad efter *Elementa* med definitioner, postulat, sats och bevis. Längre ingick geometriska studier i all högre utbildning så geometri har också haft en kulturell betydelse som sträcker sig långt utanför matematikens och naturvetenskapens gränser.

I en kortfattad redogörelse för geometrins historia måste man nödvändigtvis nöja sig med att beskriva huvuddragen. Här behandlas i första hand idéer och problem som spelat en viktig roll för geometrins utveckling. Mycket av det som vi idag betraktar som självklart och oproblematiskt visar sig vara resultatet av en lång och mödosam utvecklingsprocess. Denna insikt är kanske den viktigaste lärdomen av ett studium av geometrins historia.

1.1 Geometrins ursprung

Människan måste redan i tidernas gryning ha haft en intuitiv uppfattning om sådana geometriska begrepp som förekommer i den naturliga omgivningen på ett påtagligt sätt, t ex avstånd och symmetri. Hon har säkert tidigt i utvecklingen fascinerats av geometriska former och använt sig av geometriska mönster för dekorativa ändamål och i rituella sammanhang.

Under årtusenden stannade de geometriska insikterna på ett undermedvetet plan, men allteftersom samhällen började organiseras i fastare former uppstod ett behov av mer avancerade kunskaper i praktisk geometri för beräkning av areor, volymer och vinklar. Sådana kunskaper behövs då man skall uppföra större byggnader, staka ut land, bygga

bevattningsanläggningar, göra astronomiska observationer, osv. Det är därför ingen tillfällighet att geometri som begynnande vetenskap uppvisar en parallell utveckling i de stora flodkulturerna kring Nilen, Eufrat och Tigris, Indus och Ganges, samt Huang-ho och Yang-tsi-kiang.

Ordet geometri är av grekiskt ursprung och är bildat av *geo* (jord) och *metrein* (mäta). Den grekiske historikern HERODOTUS (ca 485–425 f Kr) berättar att farao Ramses II beskattade egyptierna efter storleken på deras jordlotter och att det därför var nödvändigt att göra årliga mätningar av de områden som bortspolades av Nilen. Enligt hans mening uppstod geometri som vetenskap just hos de egyptiska lantmätnarna.

Våra kunskaper om egyptisk geometri bygger främst på de s k Moskva- och Rhind-papyrusarna från ca 1850 och 1650 f Kr, vilka tillsammans innehåller 110 matematiska problem av vilka 26 är geometriska. De flesta av dessa handlar om area- och volymberäkningar och visar att egyptierna korrekt kunde beräkna arean av rektanglar och rätvinkliga trianglar samt volymen av räta cylindrar och stympade pyramider. Arean av en cirkel sattes lika med kvadraten på $8/9$ av diametern, vilket svarar mot närmevärdet $(16/9)^2 \approx 3,16$ för π . Egyptierna visste att en triangel med sidorna 3, 4 och 5 är rätvinklig men tycks däremot inte ha känt till Pythagoras sats. I en gravskrift förekommer den felaktiga formeln $A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ för arean av en godtycklig fyrhörning med sidorna a, b, c, d .

Den babyloniska matematiken från tiden 2000–1600 f Kr var överlägsen den egyptiska inom områdena algebra och talteori men jämbördig inom geometri. Babylonierna kunde beräkna arean av rektanglar, rätvinkliga, likbenta och troligen också allmänna trianglar samt speciella parallelltrapetser. Omkretsen och arean av cirklar beräknades med formler som svarar mot att π är 3 eller $3\frac{1}{8}$. Volymen av räta cylindrar och prismor beräknades korrekt som produkten av basen och höjden, medan däremot volymen av stympade koner och pyramider felaktigt beräknades som produkten av höjden och basytornas medelvärde. Ovannämnda felaktiga formel för arean av fyrhörningar har också förekommit. Babylonierna kände i motsats till egyptierna till Pythagoras sats. De visste också att en i en halvcirkel inskriven vinkel är rät.

Den äldsta indiska matematiken är känd genom *Sulvasūtras*, som är hinduiska anvisningar för altarkonstruktioner från perioden 500–200 f Kr. Anvisningarna innehåller detaljerade geometriska konstruktioner och visar att indierna kände till Pythagoras sats och också kunde generera pythagoreiska taltriplar (dvs heltalslösningar x, y, z till ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$).

Den kinesiska problemsamlingen *Nio kapitel om den matematiska konsten* från Hanperioden (206 f Kr – 221 e Kr) innehåller ett kapitel om rätvinkliga trianglar, i vilket bl a inskrivna cirkelns radie beräknas. Vidare innehåller samlingen area- och volymberäkningar.

Gemensamt för geometrin i ovannämnda kulturer är att den till största delen var empirisk, dvs kunskaperna var sammanfattade i enkla tumregler utan några försök att inordna dem under en större sammanhängande teori.

Upptäckter som gjorts helt nyligen har fått några matematiska historiker att tro på ett gemensamt ursprung för den egyptiska, babyloniska, indiska och kinesiska matematiken. De första matematiska upptäckterna anses ha gjorts av en indoeuropeisk kultur i Väst-europa under den neolitiska stenåldern. Matematikern van der Waerden argumenterar för att Pythagoras sats och konstruktionen av pythagoreiska taltriplar upptäcktes i denna kultur under perioden 4000–3000 f Kr. Som stöd för dessa åsikter anförs dels de stora likheter som den egyptiska, babyloniska, indiska och kinesiska matematiken uppvisar, dels de pythagoreiska samband i form av relationer mellan vissa kritiska sträckor, som finns i ett antal megalitiska monument (s k "henges", av vilka Stonehenge väl är den mest kända).

ÖVNINGAR

- 1.1 Låt a , b , c , d vara sidorna i fyrhörningen $ABCD$ tagna i ordning. Visa att fyrhörningens area är $\leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ och att likhet råder om och endast om fyrhörningen är en rektangel. [Ledning: Uttryck areorna av de fyra trianglarna $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ och $\triangle DAB$ med hjälp av fyrhörningens sidor och vinklar, samt addera dessa areor.]
- 1.2 Beräkna volymen av en stympad pyramid, vars höjd och basareor är h resp. B_1 och B_2 . Formeln $V = \frac{1}{3}Bh$ för volymen av en pyramid med basarea B och höjd h förutsätts vara bekant.

1.2 Den deduktiva geometrins uppkomst

En viktig vändpunkt i geometrins och hela matematikens utveckling inträffade i Grekland på 500-talet f Kr. Filosofen THALES från Miletos (ca 624–546) skall enligt traditionen ha kommit i kontakt med den egyptiska geometrin under en resa till Egypten. Thales gjorde sedan några egna enkla geometriska upptäckter, men hans revolutionerande insats bestod i att han inte nöjde sig med frågan "Hur förhåller det sig?" utan även ställde frågan "Varför förhåller det sig så?". Han försökte med andra ord förse sina geometriska påståenden med logiska argument och lyckades också härleda några enkla påståenden ur andra. Därmed inleddes en helt ny fas i geometrin – omvandlingen från empirisk till *deduktiv* vetenskap.

Utvecklingen fortsattes av PYTHAGORAS (ca 572–497) och den av honom grundade pythagoreiska skolan, ett brödraskap som ägnade sig åt mystik, matematik och naturvetenskap. Pythagoréerna var inom matematiken främst intresserade av algebra och talteori, men de gjorde också viktiga insatser inom geometrin. De studerade egenskaper hos parallella linjer och använde dessa för att bevisa satsen om en triangels vinkelsumma, utvecklade den geometriska algebran, studerade geometriska konstruktioner och skapade en proportionalitets- och likformighetslära. Pythagoréerna stod också för upptäckten av inkommensurabla sträckor. Fram emot slutet av 400-talet hade man erhållit en imponerande uppsättning av geometriska resultat även om just upptäckten av inkommensurabla storheter vållade dem stora bekymmer när det gällde att bygga upp en tillfredsställande teori för likformighet.

Allteftersom beviskedjorna blev allt längre och det ena resultatet fogades till det andra, måste så småningom idén ha uppstått att ordna alla resultat i en enda lång logisk kedja. En ansats till en sådan framställning av geometrin gjordes omkring mitten av 400-talet f Kr av HIPPOKRATES från Chios.

Eftersom inga ämnen var främmande för de grekiska filosofernas intresse är det naturligt att också vetenskapens metoder kom att bli föremål för deras undersökningar. Speciellt PLATON (427–347) och ARISTOTELES (384–322) har ägnat sig åt vetenskapliga metodfrågor. Båda var väl insatta i den samtida matematiken och har klart tagit intryck av detta.

För Aristoteles var de deduktiva vetenskaperna de förnämsta bland vetenskaper. För att en vetenskap eller teori skall kallas deduktiv måste enligt Aristoteles vissa villkor vara uppfyllda. Dessa villkor gäller dels den logiska uppbyggnaden, dels den kunskapsteoretiska kvalitén hos vetenskapens utsagor. Ett nödvändigt villkor är att teorin är *axiomatiserad*, och detta innebär i korthet att teorin är uppbyggd enligt följande program.

1. Först införs vissa grundläggande tekniska termer, s k *primitiva begrepp*, som inte definieras med hjälp av några andra termer. Att definiera allting är nämligen omöjligt om man vill undvika cirkeldefinitioner. Detta hindrar naturligtvis inte att man i vanligt språk kan försöka beskriva de primitiva begreppen så att det framgår

vad teorin avser att handla om. För Aristoteles har de primitiva begreppen en bestämd motsvarighet i verkligheten.

2. Vissa påståenden om de grundläggande begreppen noteras utan bevis. Dessa påståenden kallas teorins *axiom* eller *postulat*. (Aristoteles gör en distinktion mellan axiom och postulat, men den är oväsentlig i sammanhanget.) Axiomen bevisas inte, ty det är omöjligt att bevisa någonting från ingenting.
3. Alla andra tekniska termer definieras med hjälp av de primitiva begreppen och redan definierade termer. Varje teknisk term i teorin kan således i princip ersättas med en kombination av primitiva begrepp, men av praktiska skäl är det bekvämt att använda definierade begrepp.
4. Alla påståenden inom teorin härleds logiskt ur axiomen och tidigare härledda påståenden. De så erhållna påståendena kallas teorins *teorem* eller *satser*. Alla satser är således ytterst konsekvenser av axiomen.

Beträffande de kunskapsteoretiska aspekterna ansåg Aristoteles att axiomen skulle vara sanna och evidenta, dvs uppenbara för var och en (som reflekterar över dem). Av de logiska slutledningsreglerna följer då speciellt att alla satser inom teorin också är sanna, och eftersom detta gäller oberoende av vilka empiriska förhållanden som råder, kan man enligt Aristoteles vara helt förvissad om att alla satser är sanna. Däremot behöver förstås inte alla satser vara evidenta utan det är ju ofta tvärtom så att många satser är överraskande.

Den moderna synen på en axiomatiserad teori skiljer sig inte från Aristoteles' vad beträffar den logiska uppbyggnaden enligt punkterna 1–4. Däremot har man idag andra synpunkter på det kunskapsteoretiska innehållet. Sanningskravet har ersatts av kravet på att axiomen skall vara motsägelsefria, och begreppet sanning har en teknisk innebörd som är knuten till begreppet *modell*.

Aristoteles tillämpade själv sitt program på den av honom skapade syllogismläran, som därför är den äldsta kända axiomatiserade teorin. Däremot gjorde han inga direkta insatser inom geometrin.

Det definitiva genombrottet för den axiomatiska metoden skedde omkring 300 f Kr när EUKLIDES fullbordade det epokgörande arbetet *Elementa*, som innehåller 465 påståenden av geometrisk, talteoretisk och algebraisk karaktär arrangerade i logisk följd och härledda ur några få axiom.

Elementa kom att bli en normgivande lärobok under mer än 2000 år och ansågs länge som ett mönster för intellektuell klarhet i allmänhet och matematisk framställning i synnerhet. Dess kulturella betydelse har därför varit stor.

Euklides mästerverk reducerade alla tidigare geometriska arbeten till historiska kuriositeter, vilket är beklagansvärt för den historiska forskningen, ty därigenom kom de med tiden att utplånas. Endast mindre fragment återstår nu av arbetena före *Elementa*. Det mesta av vad som är känt om grekisk matematik före Euklides är därför endast känt indirekt genom kommentarer hos t ex Platon, Aristoteles, Arkimedes och senare matematiker.

1.3 Eudoxos proportionalitetsdefinition

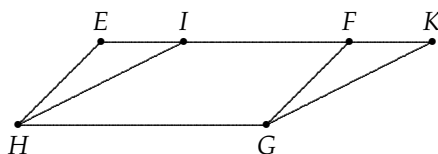
Pythagoréerna lyckades aldrig skapa en tillfredsställande teori för proportionalitet och likformighet. Deras teori baserades nämligen på antagandet att två sträckor alltid är *kommensurabla*, dvs att det för varje par a , b av sträckor alltid finns en tredje sträcka c så att a och b är heltalsmultipler av c (eller med andra ord att förhållandet a/b alltid är

rationellt). Teorin raserades därför delvis av pythagoréernas egen upptäckt av inkommensurabla sträckor.

Vi skall illustrera hur kommensurabilitetsantagandet utnyttjas i ett tidigt pythagoreiskt bevis för följande sats.

Sats Om i trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ höjderna mot baserna AB och $A'B'$ är lika, så förhåller sig triangelarnas areor $\text{area}(\triangle ABC)$ och $\text{area}(\triangle A'B'C')$ till varandra som motsvarande baser AB och $A'B'$.

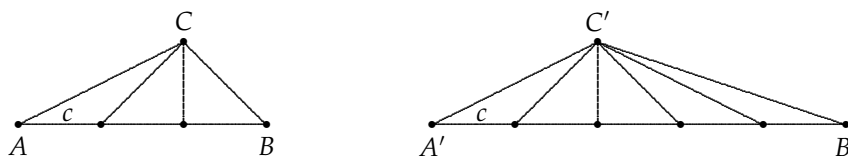
Pythagoréerna visar först att trianglar med samma bas och samma höjd har samma area – detta följer lätt ur motsvarande resultat för parallelogrammer, som också är lätt att visa. Jfr fig.1.1.



Figur 1.1

Parallelogrammerna $EFGH$ och $IKGH$ har samma area, ty $HIFG$ är en gemensam del och triangelarna $\triangle EIH$ och $\triangle FKG$ är kongruenta.

Det pythagoreiska "beviset" för satsen fortsätter nu så här. Antag att sträckorna $a = AB$ och $a' = A'B'$ är kommensurabla med sträckan c som gemensam måttstock, dvs att det finns naturliga tal m och n så att $a = mc$ och $a' = nc$. Dela sträckan AB i m lika delar c och sträckan a' i n lika delar c . Se fig. 1.2.



Figur 1.2

Triangelarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ delas då i m resp. n deltrianglar, och alla deltrianglar har samma bas c och samma höjd, och därför också samma area k . Det följer att $\text{area}(\triangle ABC) = mk$ och $\text{area}(\triangle A'B'C') = nk$, dvs

$$\text{area}(\triangle ABC)/\text{area}(\triangle A'B'C') = m/n = AB/A'B'.$$

Satsen är därmed bevisad för trianglar med kommensurabla baser. \square

Mycket talar för att pythagoréerna redan under den första hälften av 400-talet f Kr upptäckte att $\sqrt{2}$ är irrationellt, dvs att sidan och diagonalen i en kvadrat är inkommensurabla, och att deras bevis var det traditionella motsägelsebevis som förekommer i våra dagars läroböcker. Just detta bevis finns i varje fall skisserat hos Aristoteles. Upptäckten betraktades av pythagoréerna som en veritabel logisk skandal, ty den stred för det första

mot deras allmänna filosofi att allt kan uttryckas med (naturliga) tal, och den gjorde för det andra många av deras likformighetsbevis ofullständiga.

Upptäckten av inkommensurabla storheter och det därmed sammanhängande problemet att formulera en tillfredsställande proportionalitetslära kan sägas utgöra den första verkliga krisen inom matematiken. Problemet var inte lätt att lösa, och det dröjde ca 100 år innan EUDOXOS (ca 408–355) kom på en genial definition av begreppet proportionalitet som fungerar oberoende av om de ingående storheterna är kkommensurabla eller ej.

Eudoxos definition lyder i princip så här:

Låt a och b resp. c och d vara jämförbara storheter (*t ex sträckor eller areor*). Då är

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

om och endast om följande ekvivalens gäller för alla naturliga tal m och n

$$(1) \quad mb < na \Leftrightarrow md < nc.$$

Poängen med Eudoxos definition är att den definierar likhet mellan två förhållanden utan att först definiera själva förhållandena. Detta var mycket listigt av Eudoxos, ty för att allmänt definiera a/b som ett tal behövs ju begreppet *reellt* tal, och detta begrepp var och förblev okänt för grekerna.

Med vår moderna begreppsapparat, som inkluderar reella tal, kan vi lätt övertyga oss om att Eudoxos definition är sund. Ekvivalensen (1) kan ju skrivas

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{m}{n} < \frac{c}{d},$$

så hans definition uttrycker bara det faktum att två reella tal är lika, om och endast om alla rationella tal som är mindre än det ena reella talet också är mindre än det andra och tvärtom. Eudoxos definition föregriper därmed den definition av reella tal som Dedekind gav i slutet av 1800-talet.

Med hjälp av Eudoxos definition är det lätt att täta luckorna i den pythagoreiska proportionalitets- och likformighetsläran. Låt oss se hur ett korrekt bevis i Eudoxos stil ser ut för ovanstående sats.

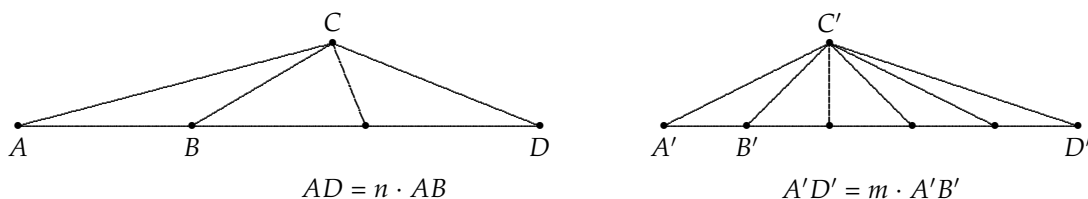
Vi skall visa att

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{area}(\triangle ABC)}{\text{area}(\triangle A'B'C')}$$

dvs att

$$m \cdot A'B' < n \cdot AB \Leftrightarrow m \cdot \text{area}(\triangle A'B'C') < n \cdot \text{area}(\triangle ABC).$$

Antag därför att $m \cdot A'B' < n \cdot AB$, och konstruera trianglarna $\triangle ADC$ och $\triangle A'D'C'$ med baserna $AD = n \cdot AB$ och $A'D' = m \cdot A'B'$. Jfr fig. 1.3.



Figur 1.3

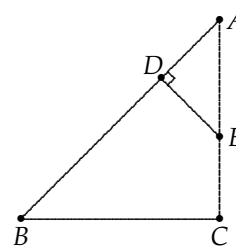
Eftersom trianglarna $\triangle ADC$ och $\triangle A'D'C'$ har samma höjd men $A'D'$ är kortare än AD , är det klart att $\text{area}(\triangle A'D'C') < \text{area}(\triangle ADC)$. Triangeln $\triangle ADC$ består av n deltrianglar med samma area som $\triangle ABC$, varför $\text{area}(\triangle ADC) = n \cdot \text{area}(\triangle ABC)$, och på motsvarande sätt är $\text{area}(\triangle A'D'C') = m \cdot \text{area}(\triangle A'B'C')$. Det följer därför att $m \cdot \text{area}(\triangle A'B'C') < n \cdot \text{area}(\triangle ABC)$, dvs vi har visat implikationen

$$m \cdot A'B' < n \cdot AB \Rightarrow m \cdot \text{area}(\triangle A'B'C') < n \cdot \text{area}(\triangle ABC).$$

På exakt samma sätt visas motsvarande implikation med $<$ ersatt med $>$ eller med $=$ på båda ställena. Därmed är också ekvivalensen bevisad. \square

ÖVNINGAR

- 1.3 Fyll i detaljerna i följande motsägelsebevis för att hypotenusan AB och kateten BC i en likbent rätvinklig triangel $\triangle ABC$ är inkommensurabla: Välj punkten D på sidan AB så att $BD = BC$, och E på sidan AC så att DE blir vinkelrät mot AB . Då är $\triangle ADE$ en ny likbent rätvinklig triangel med katet $AD = AB - BC$ och hypotenusan $AE = 2 \cdot BC - AB$. Det följer att om BC och AB båda är multipler av en sträcka c , så är också AD och AE multipler av samma sträcka. Eftersom $AD < \frac{1}{2} \cdot BC$ kan vi genom att upprepa konstruktionen ett antal gånger finna en likbent rätvinklig triangel så att dels kateten och hypotenusan är multipler av c och dels kateten är kortare än c . Detta är förstas en motsägelse.



Figur 1.4

1.4 Elementa

Om Euklides som person vet man i stort sett inte mer än att han var verksam omkring år 300 f Kr vid det nygrundade universitetet i Alexandria, och att han förmodligen hade erhållit sin matematiska utbildning vid Platons akademi i Aten.

I Elementa sammanfattar Euklides sin tids kunskaper inom geometri, algebra och talteori. De flesta satserna i Elementa härrör från andra matematiker, så Euklides stora insats består i att han lyckas inordna resultaten under den axiomatiska metoden.

Arbetet är uppdelat på 13 band eller böcker. Bok I innehåller 48 satser om trianglar (bl a de välbekanta kongruensfallen), parallella linjer och parallelogrammer. Den första satsen handlar om möjligheten att konstruera en liksidig triangel med en given sträcka som sida, och de två avslutande satserna är Pythagoras sats med omvändning. En fullständig lista över satserna i Bok I ges i slutet av det här avsnittet. Bok II behandlar geometrisk algebra och innehåller geometriska bevis för olika algebraiska identiteter, exempelvis kvadreringsregeln $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, samt geometriska lösningar till andragradsekvationer. Bok III tar upp cirkelns geometri och innehåller de välbekanta satserna om kordor, tangenter och inskrivna vinklar. I Bok IV konstrueras regelbundna polygoner med passare och linjal som hjälpmedel. Bok V ägnas åt Eudoxos proportionalitetslära och i Bok VI tillämpas denna på likformighetsläran. Böckerna VII, VIII och IX behandlar talteori, och där återfinns t ex Euklides algoritm för bestämmande av den största gemensamma delaren till två tal, aritmetikens fundamentalsats om faktorisering av tal i primtal, samt beviset för att det finns oändligt många primtal. I Bok X behandlas vissa irrationella förhållanden. Böckerna XI, XII och XIII ägnas åt rymdgeometri. Där visas bl a att cirkelns area är proportionell mot kvadraten på radien och att volymen av

en pyramid är $1/3$ av volymen av ett prisma med samma basyta och samma höjd. Vidare konstrueras de fem regelbundna platonska kropparna.

Bok I inleds med att vissa grundläggande begrepp, t ex punkt och linje, införs med "definitioner" eller förklaringar som har till syfte att meddela den empiriska motsvarigheten till begreppen. Med utgångspunkt från de primitiva begreppen definieras så nya begrepp såsom t ex vinkel, rät vinkel och parallellitet. Sedan följer en lista över axiomen. Dessa är indelade i två grupper, allmänna axiom och postulat. De allmänna axiomen är påståenden om sådana förhållanden som är allmängiltiga medan postulaten är speciella för den teori som studeras, dvs i det här fallet geometri.

Euklides axiom i Bok I har följande lydelse.

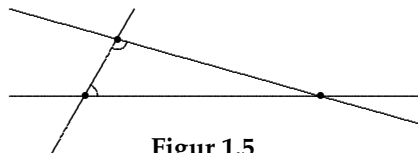
Allmänna axiom

1. Storheter som är lika med en och samma storhet är också inbördes lika.
2. Om lika storheter adderas till lika storheter så är summorna lika.
3. Om lika storheter subtraheras från lika storheter så är skillnaderna lika.
4. Storheter som sammanfaller med varandra är lika.
5. Det hela är större än sina delar.

Storheter syftar i Elementa på t ex sträckor, vinklar och trianglar, och likhet används bl a i betydelsen kongruens.

Postulat

1. Man kan dra en (unik) sträcka mellan varje par av punkter.
2. Varje sträcka kan (på ett unikt sätt) förlängas till en linje.
3. Man kan beskriva en cirkel med godtycklig medelpunkt och godtycklig radie.
4. Alla räta vinklar är lika.
5. Om en linje skär två linjer så att summan av två inre vinklar på samma sida om den skärande linjen är mindre än två rätta vinklar, så skär de två linjerna varandra på den sida där de båda vinklarna ligger.



Figur 1.5

Postulaten 1, 2 och 3 specificerar de enda tillåtna geometriska grundkonstruktionerna: att dra en linje genom två givna punkter, och att dra en cirkel genom en given punkt med en given punkt som medelpunkt. Motsvarande praktiska verktyg är förstas *linjalen* och *passaren*, men observera att den "euklidiska linjalen" endast får användas för att dra linjer och inte för att mäta och avsätta sträckor, och att den "euklidiska passaren" endast får användas för att konstruera en cirkel med *en given medelpunkt och genom en given punkt*. Vi kan med andra ord inte direkt använda passaren för att konstruera två cirklar med samma radie och olika medelpunkter eller för att avsätta sträckor. Skänk-larna på den euklidiska passaren är alltså inte "läsbara", utan de faller samman så snart passaren "lyfts från papperet". Redan i påstående 2 visar emellertid Euklides att samtliga konstruktioner som är utförbara med en "modern läsbar" passare också kan utföras med den euklidiska passaren.

Euklides femte postulat är det berömda *parallellpostulatet*. Det är lätt att visa att följande utsaga är ekvivalent med postulatet.

- 5'. Genom varje punkt utanför en given linje går det högst en parallell linje.

Å andra sidan följer ur postulaten 1–4 att det finns minst en parallell linje genom varje punkt utanför en given linje. Även följande påstående är därför ekvivalent med parallellpostulatet.

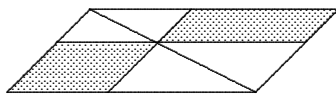
5". Genom varje punkt utanför en given linje går det exakt en parallell linje.

En kritisk granskning av Elementa ger vid handen att Euklides inte helt lyckades med sin föresats att härleda alla satsar ur ovanstående axiom. Vid åtskilliga tillfällen utnyttjas egenskaper som inte följer ur axiomen. Detta inträffar faktiskt redan i beviset för påstående 1, då Euklides använder sig av att två cirklar med en gemensam sträcka som radie skär varandra. Att så är fallet förefaller naturligtvis "uppenbart", men det följer inte ur axiomen. Det är emellertid relativt enkelt att reparera Euklides små förbiseenden genom att utvidga listan över axiom. Misstagen rubbar inte helhetsintrycket av Elementa som en mästerlig komposition.

De 48 påståendena i Bok I

1. Att konstruera en liksidig triangel med en given sträcka som bas (är möjligt).
2. Att konstruera en sträcka lika med en given sträcka och med en given punkt som ändpunkt.
3. Att avskära en sträcka som är lika med en given sträcka från en given längre sträcka.
4. Om i två trianglar två sidor och mellanliggande vinkel i den ena triangeln är lika med två sidor och mellanliggande vinkel i den andra triangeln, så är också den tredje sidan och motsvarande övriga vinklar lika i de båda trianglarna, och trianglarna är lika.
5. I en likbent triangel är basvinklarna lika och de båda yttervinklarna vid basen är lika.
6. Om i en triangel två vinklar är lika, så är också motstående sidor lika.
7. Givet en triangel $\triangle ABC$ så finns det inte någon annan punkt C' än C på samma sida om linjen genom A och B så att AC' är lika med AC och BC' är lika med BC .
8. Om motsvarande sidor i två trianglar är lika, så är också motsvarande vinklar lika.
9. Att tudela en given vinkel.
10. Att tudela en given sträcka.
11. Att från en punkt på en given linje dra en vinkelrät linje.
12. Att från en punkt utanför en given linje dra en vinkelrät linje.
13. De två vinklar, som en sträcka dragen från en punkt på en linje bildar med linjen, är antingen två räta vinklar eller också utgör deras summa två räta vinklar.
14. Om två sträckor, dragna från ändpunkten av en given sträcka och på olika sidor om denna, bildar två vinklar vars summa är två räta vinklar, så ligger de båda förstnämnda sträckorna i linje.
15. Om två sträckor skär varandra så är vertikalvinklarna lika.
16. I varje triangel är yttervinkeln vid ett hörn större än var och en av de motstående inre vinklarna.
17. I varje triangel är summan av två vinklar, vilka som helst, mindre än två räta vinklar.
18. I varje triangel står den större sidan mot den större vinkeln.
19. I varje triangel står den större vinkeln mot den större sidan.
20. I varje triangel är summan av två sidor, vilka som helst, större än den återstående sidan.
21. Om två sträckor, dragna från ändpunkterna av en sida i en triangel, möts i en punkt inuti triangeln, så är dessa sträckor sammantagna mindre än summan av de återstående sidorna i triangeln, men de bildar en större vinkel än de två sidorna.
22. Att konstruera en triangel av tre givna sträckor, av vilka två tagna tillsammans i godtycklig ordning är större än den återstående.
23. Att med en given punkt på en given sträcka som spets resp. ben konstruera en vinkel som är lika med en given vinkel.
24. Om två sidor i en triangel är lika med respektive två sidor i en annan triangel, men om mellanliggande vinkel i den första triangeln är större än mellanliggande vinkel i den andra, så är också motstående sida i den första triangeln större än motstående sida i den andra triangeln.
25. Om två sidor i en triangel är lika med respektive två sidor i en annan triangel, men om den återstående sidan i den första triangeln är större än den återstående sidan i den andra, så

- är också mellanliggande vinkel i den första triangeln större än mellanliggande vinkel i den andra.
26. Om i två trianglar två vinklar i den ena är lika med två vinklar i den andra, och en sida i den ena är lika med en sida i den andra, nämligen antingen sidan som förenar vinklarna eller också den som står mot en av de lika vinklarna, så är också återstående respektive sidor och återstående vinklar lika.
 27. Om två linjer skärs av en linje under lika alternatvinklar så är de båda linjerna parallella.
 28. Om två linjer skärs av en tredje linje så att likbelägna vinklar är lika eller så att de inre vinklarna på samma sida om den sistnämnda linjen sammantagna är två räta vinklar, så är de båda linjerna parallella.
 29. Om två parallella linjer skärs av en linje så är alternatvinklar lika, likbelägna vinklar lika, och summan av inre vinklar på samma sida om den skärande linjen är lika med två räta vinklar.
 30. Linjer som är parallella med en och samma linje är inbördes parallella.
 31. Att genom en given punkt dra en linje parallell med en given linje.
 32. I varje triangel är yttervinkeln vid ett hörn lika med summan av de två motstående inre vinklarna, och de tre inre vinklarna är tillsammans två räta vinklar.
 33. De sträckor som förbinder ändpunkterna på två lika och parallella sträckor i samma riktning, är själva lika och parallella.
 34. I en parallelogram är motstående sidor och motstående vinklar lika, och diagonalerna tudelar parallelogrammen.
 35. Parallelogrammer med samma bas och på samma parallella linjer (dvs med lika höjd) har lika area.
 36. Parallelogrammer med lika bas och på samma parallella linjer har lika area.
 37. Trianglar med samma bas och motstående hörn på samma med basen parallella linje har lika area.
 38. Trianglar vars baser är lika och ligger i linje och vars återstående hörn ligger på samma parallella linje, har lika area.
 39. Trianglar med lika area på samma bas och på samma sida om baslinjen har återstående hörn på samma med basen parallella linje.
 40. Trianglar med lika area, lika bas på gemensam linje och på samma sida om linjen, har återstående hörn på samma parallella linje.
 41. Om en parallelogram har samma bas som en triangel och ligger inom samma parallell (dvs har lika höjd), så är parallelogrammens area dubbelt triangelns area.
 42. Att konstruera en parallelogram med en given vinkel och med arean lika med en given triangelns area.
 43. I varje parallelogram är komplementen till parallelogrammerna kring diagonalen lika till arean. (Innebörden i detta påstående är att de båda skuggade parallelogrammerna i fig. 1.6 har samma area.)
 44. Att konstruera en parallelogram med en given vinkel, en given sträcka som bas, och vars area är lika med en given triangelns area.
 45. Att konstruera en parallelogram med en given vinkel och vars area är lika med en given plan månghörnings area.
 46. Att konstruera en kvadrat med en given sträcka som sida.
 47. I en rätvinklig triangel är kvadraten på sidan mot den räta vinkeln lika med summan av kvadraterna på de övriga sidorna.
 48. Om i en triangel kvadraten på en av sidorna är lika med summan av kvadraterna på de återstående sidorna, så är vinkeln mellan dessa två sidor rät.



Figur 1.6
Illustration till påstående 43.

ÖVNINGAR

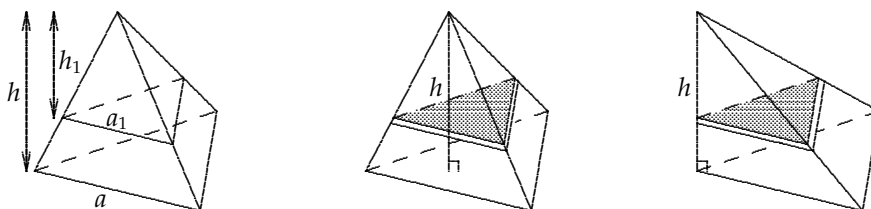
- 1.4 Utför konstruktionen i påstående 1 med euklidisk passare och linjal.
- 1.5 Påstående 2 är ekvivalent med att konstruera en cirkel med en given punkt O som medelpunkt och en given sträcka AB som radie. Detta är naturligtvis inget problem med en låsbar passare men kräver lite fiffighet med en euklidisk passare. Genomför en sådan konstruktion.
- 1.6 Genomför följande konstruktioner med hjälp av låsbar passare och linjal. (Övning 1.5 visar att dessa konstruktioner då också kan utföras med euklidisk passare och linjal.)
- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) Påstående 9 | b) Påstående 10 | c) Påstående 11 |
| d) Påstående 12 | e) Påstående 22 | f) Påstående 23 |
| g) Påstående 31 | h) Påstående 42 | i) Påstående 44 |
| j) Påstående 45 | k) Påstående 46 | |
- 1.7 Bevisa påstående 21: Om D ligger inuti triangeln $\triangle ABC$, så är $AD + DB < AC + CB$ och $\angle ADB > \angle ACB$.
[Ledning: Visa först motsvarande påstående då D ligger på sidan AC . Påståendena 20 och 16 är relevanta i sammanhanget.]
- 1.8 Bevisa påstående 30 med hjälp av påståendena 27 och 29.
- 1.9 Bevisa påstående 43.
- 1.10 Bevisa påstående 48, dvs omvändningen till Pythagoras sats.

1.5 Infinitesimala metoder och uttömningsmetoden

För att beräkna areor och volymer använder vi idag integrationsteknik. Det är en barnlek att beräkna t ex arean av ett parabelsegment eller volymen av en kon, men utan hjälp av integralkalkyl är det svårt att ens gissa t ex formeln för volymen av en sfär. För grekerna, som inte förfogade över gränsvärdes- och integralbegreppen, var det därför förenat med stora svårigheter att finna arean och volymen av andra områden och kroppar än polygoner och prismor. Väsentliga framsteg förutsatte ett åtminstone intuitivt utnyttjande av infinitesimala metoder.

Arkimedes tillskriver atomisten DEMOKRITOS (ca 460–370) upptäckten av formeln $V = \frac{1}{3}Bh$ för volymen av en pyramid eller kon med bas B och höjd h . Det är troligt att Demokritos resonerade på ungefär följande sätt när han gjorde sin upptäckt.

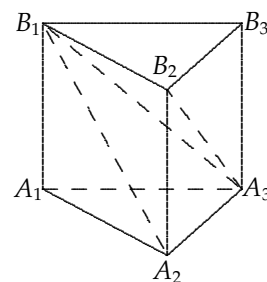
Om en tetraeder skärs av ett plan parallellt med basytan så är snittytan likformig med basytan, och motsvarande sidor i basytan och snittytan förhåller sig till varandra som tetraederns höjd förhåller sig till snittytans avstånd från toppen. Härav följer att om två tetraedrar med kongruenta basytor och samma höjd står på samma plan och skärs av ett med basplanet parallellt plan, så är också snittytorna kongruenta. Jfr fig. 1.7. Genom att uppfatta snittytorna som "oändligt tunna" skivor och tetraedrarna som sammansatta av sådana skivor, inser man att de två tetraedrarna har samma volym. (Ett strikt bevis för den sistnämnda slutsatsen kräver naturligtvis integrationsteknik.)



Figur 1.7

På grund av likformighet är $a_1 : a = h_1 : h$. I tetraedrar med kongruenta basytor och samma höjd blir därför snittytor på samma avstånd från toppen också kongruenta med varandra.

För att visa att en tetraeders volym är $1/3$ av volymen av ett prisma med samma basyta och samma höjd, räcker det därför att betrakta tetraedrar vars topp ligger rakt över ett av hörnen i basytan. Låt $A_1A_2A_3B_1$ vara en sådan tetraeder med toppen B_1 rakt över hörnet A_1 , och betrakta prismet $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$, där topptriangeln $\triangle B_1B_2B_3$ är kongruent och parallell med bastriangeln $\triangle A_1A_2A_3$. Se fig. 1.8. Prismat kan uppdelas i tre tetraedrar $A_1A_2A_3B_1$, $B_1B_2B_3A_3$ och $B_1A_2A_3B_2$. De två förstnämnda har uppenbarligen kongruenta basytor och lika höjd ($A_1B_1 = B_3A_3$), och i den första och tredje befinner sig hörnen A_1 resp. B_2 på samma avstånd från den gemensamma sidoytan $\triangle B_1A_2A_3$. Det följer att de tre tetraedrarna har samma volym, dvs $1/3$ av prismats. \square



Figur 1.8

Därmed är Demokritos resultat verifierat för tetraedrar. En godtycklig pyramid kan på ett uppenbart sätt delas upp i ett ändligt antal tetraedrar med gemensam höjd, och för koner följer resultatet genom gränsövergång.

Pythagoréerna visste att areorna av två likformiga polygoner förhåller sig som kvadraterna på motsvarande sidor. (Vi bortser då från deras problem med inkommensurabla storheter.) HIPPOKRATES (400-talet f Kr) generaliserade detta resultat till cirklar och visade att areorna av två cirklar förhåller sig som kvadraterna på radierna, eller anorlunda uttryckt, att arean av en cirkel är proportionell mot radiens kvadrat. Han har förmodligen resonerat på följande vis.

Låt C och C' vara två cirklar med radier r och r' , och skriv in regelbundna n -hörningar M_n och M'_n i C resp. C' . Då är förstas M_n och M'_n likformiga och förhållandet mellan motsvarande sidor är r/r' , varför

$$\text{area } M_n / \text{area } M'_n = (r/r')^2.$$

Då n ökar närmar sig M_n och M'_n alltmer cirklarna C och C' . Följaktligen är

$$\text{area } C / \text{area } C' = (r/r')^2.$$

För att göra Demokritos och Hippokrates resonemang till strikta bevis fordras en teori för hur man skall handskas med oändliga processer. De grekiska matematikerna var emellertid mycket skeptiska mot sådana. Huvudorsaken till denna inställning var de paradoxer om rörelse som ZENON från Elea hade formulerat omkring 450 f Kr. (Paradoxen om Akilles och sköldpaddan är säkert välbekant för de flesta.) Zenons paradoxer var visserligen inte alls riktade mot matematiken utan var avsedda som ett försvar för filosofen Parmenides metafysiska teorier, men de kom ändå av matematikerna att uppfattas som en varning mot att göra gränsövergångar och att summera infinitesimala storheter.

Eudoxos hittade på ett sätt att ersätta gränsövergång med motsägelsebevis. Metoden kallas *uttömningsmetoden*, och den användes av Eudoxos för att ge strikta bevis för bl a ovannämnda resultat av Demokritos och Hippokrates. Den förutsätter att man vet svaret på det som skall beräknas och kan alltså inte användas för att härleda nya resultat.

Uttömningsmetoden fungerar på följande vis. Antag att vi skall bevisa att arean av ett område D är lika med a . Vi visar då att antagandet $\text{area } D < a$ är orimligt genom att konstruera ett område $D' \subset D$ med $\text{area } D' > \text{area } D$. Analogt visas att antagandet $\text{area } D > a$ leder till en motsägelse genom att man konstruerar ett område $D'' \supset D$ med $\text{area } D'' < \text{area } D$.

Ett bevis med hjälp av uttömningsmetoden för Hippokrates resultat om arean av cirklar ser ut så här. Antag att

$$\text{area } C / \text{area } C' \neq (r/r')^2.$$

Då gäller olikhet åt något håll och vi kan utan inskränkning anta att

$$\text{area } C > \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \text{area } C'.$$

(Låt annars C och C' byta plats.)

Låt D_n beteckna en regelbunden 2^n -månghörning inskriven i C . Då vi övergår från D_n till D_{n+1} genom att fördubbla antalet hörn så blir arean av området mellan C och D_{n+1} mindre än halva arean av området mellan C och D_n . Se fig. 1.9.



Figur 1.9

Vid varje fördubbling av antalet hörn i den inskrivna månghörningen mer än halveras således området mellan cirkeln och månghörningen. Det följer att efter ett ändligt antal steg är

$$\text{area } C - \text{area } D_n < \text{area } C - \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \text{area } C',$$

dvs

$$\text{area } D_n > \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \text{area } C'.$$

Låt nu D'_n beteckna motsvarande i C' inskrivna 2^n -hörning. Eftersom

$$\text{area } D'_n / \text{area } D_n = (r'/r)^2,$$

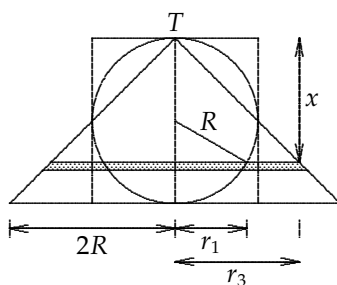
är på grund av olikheten ovan

$$\text{area } D'_n = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \text{area } D_n > \text{area } C',$$

vilket är en motsägelse. □

Den som nådde längst med hjälp av intuitiva infinitesimalresonemang var antikens störste matematiker, ARKIMEDES (287–212). I arbetet *Metoden* beskriver Arkimedes hur han med hjälp av ett sådant betraktelsesätt och mekaniska argument har kommit fram till formeln $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ för volymen av en sfär med radie R .

Arkimedes resonemang kan sammanfattas på följande sätt. Betrakta en kring sfären S omskriven cylinder C och en kon K med basradie $2R$ och höjd $2R$ och vars axel sammanfaller med cylinderns axel. Dela sfären, cylindern och konen i tunna skivor med snitt som är vinkelräta mot cylinderns axel. Se fig. 1.10.



Figur 1.10

Låt S_x , C_x och K_x beteckna skivorna i sfären, cylindern och konen på avståndet x från konens topp T . För skivornas radier r_1 , r_2 och r_3 gäller

$$r_1^2 = R^2 - (x - R)^2 = 2xR - x^2, \quad r_2 = R \quad \text{och} \quad r_3 = x$$

Om skivornas tjocklek är Δx , så gäller därför approximativt för deras volymer att

$$\text{Vol } S_x = \pi r_1^2 \Delta x = \pi(2xR - x^2) \Delta x,$$

$$\text{Vol } C_x = \pi R^2 \Delta x,$$

$$\text{Vol } K_x = \pi r_3^2 \Delta x = \pi x^2 \Delta x.$$

Genom att addera skivorna i sfären och i konen erhåller vi sambandet

$$\text{Vol } S + \text{Vol } K = \sum \pi(2xR - x^2) \Delta x + \sum \pi x^2 \Delta x = \sum 2\pi R x \Delta x.$$

Multiplikation med R ger

$$(1) \quad R \cdot (\text{Vol } S + \text{Vol } K) = 2 \sum \pi R^2 \Delta x \cdot x = 2 \sum x \cdot \text{Vol } C_x.$$

Den sista summan kan uppfattas som cylinderns vridmoment kring punkten T . Av symmetriskäl är detta vridmoment lika med vridmomentet kring mittpunkten på cylinderns basyta, dvs.

$$\sum x \cdot \text{Vol } C_x = \sum (2R - x) \cdot \text{Vol } C_x,$$

varav följer att

$$2 \sum x \cdot \text{Vol } C_x = 2R \cdot \sum \text{Vol } C_x = 2R \cdot \text{Vol } C.$$

Insättning i (1) och division med R ger därför

$$\text{Vol } S + \text{Vol } K = 2 \cdot \text{Vol } C,$$

varur sfärens volym kan beräknas eftersom konens och cylinderns volymer är kända sedan tidigare. \square

Med liknande resonemang beräknade Arkimedes bl a arean av parabelsegment och arean av områden som begränsas av Arkimedes spiral (en spiral med ekvationen $r = a\theta$ i polära koordinater) och en stråle från spiralens centrum. Han godtog emellertid inte resonemangen som matematiska bevis utan bevisade resultaten med hjälp av Eudoxos uttömningsmetod.

I uttömningsbeviset för att cirkelarean är proportionell mot kvadraten på radien utnyttjade vi följande resultat på en avgörande punkt:

Om en följd a_1, a_2, a_3, \dots av storheter har egenskapen att $a_n < \frac{1}{2}a_{n-1}$ för alla n , så finns det för varje storhet $\epsilon > 0$ ett N så att $a_N < \epsilon$.

Eftersom $a_n < a_1 \cdot 2^{-(n-1)}$, följer påståendet ovan av att $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$. Euklides ansåg uppenbarligen inte påståendet vara självklart, ty han har tagit med det som sitt första påstående i Bok XII. Euklides baserar sitt bevis för påståendet på följande obevisade utsaga:

A: *Givet två sträckor a och b finns det ett heltal n så att $na > b$.*

I Arkimedes skrift *Om sfären och cylindern* är påståendet A ett av axiomen, och det brukar därför gå under namnet *Arkimedes axiom*. Arkimedes själv tillskriver emellertid Eudoxos äran att ha upptäckt detta axioms fundamentala betydelse. I modern matematik har man intresserat sig för geometrier i vilka det arkimediska axiomet inte gäller, s k *icke-arkimediska geometrier*.

ÖVNINGAR

1.11 Beräkna med hjälp av integralkalkyl:

- längden av Arkimedes spiral $r = a\theta$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$;
- arean av området $0 \leq r \leq a\theta$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, där $0 < \theta_0 \leq 2\pi$;
- volymen av en sfär med radie R , samt volymen av en kon med basarea B och höjd h .

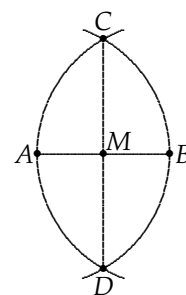
1.6 Tre klassiska problem

Tre speciella geometriska konstruktionsproblem har fascinerat matematiker, professionella såväl som amatörer, ända fram till vår tid, och arbetet med dem har genererat en mängd betydelsefull matematik. De tre problemen går under namnen *cirkelns kvadratur*, *kubens fördubbling* och *vinkelns tredelning*, och de går ut på att konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel, en kub med dubbelt så stor volym som en given kub, samt en vinkel som är en tredjedel av en godtyckligt given vinkel.

Naturligtvis måste man specificera vad som menas med en *geometrisk konstruktion*. I en *klassisk* konstruktion tillåts endast den euklidiska passaren och den euklidiska linjalen som hjälpmedel. De punkter och linjer som kan konstrueras med utgångspunkt från ett antal givna punkter och linjer är de som kan erhållas genom att följande regler tillämpas ett ändligt antal gånger:

- De givna punkterna och linjerna är konstruerbara.
- Om två punkter är konstruerbara, så är också linjen mellan dem konstruerbar.
- Om två konstruerbara linjer skär varandra, så är också skärningspunkten konstruerbar.
- Om a är en konstruerbar linje och O och A är två konstruerbara punkter, och om a skär eller tangerar cirkeln med medelpunkt i O och radie OA , så är också skärningspunkterna (resp. tangeringspunkten) konstruerbara.
- Om O_1, A_1, O_2, A_2 är konstruerbara punkter och om cirkeln med medelpunkt i O_1 och radie O_1A_1 skär eller tangerar cirkeln med medelpunkt i O_2 och radie O_2A_2 , så är också skärningspunkterna (tangeringspunkten) konstruerbara.

EXEMPEL. Mittpunkten M på en given sträcka AB är konstruerbar. Vi börjar med att konstruera linjen a genom A och B (regel 2). Därefter konstruerar vi de båda skärningspunkterna C och D mellan cirkelarna med medelpunkter i A och B och sträckan AB som gemensam radie (regel 5). Linjen b genom C och D är nu konstruerbar (regel 2), och denna skär a i en konstruerbar punkt M (regel 3), som visar sig vara sträckans mittpunkt. \square



Figur 1.11

Grekerna lyckades inte hitta någon klassisk lösning på något av de tre ovannämnda konstruktionsproblemen. Att de misslyckades hade en mycket naturlig orsak; problemen är nämligen omöjliga att lösa med de klassiska hjälpmedlen. Detta visade man med algebraiska metoder under 1800-talet, och en kortfattad skiss över omöjlighetsbevisen följer nu.

Problemet med cirkelns kvadratur är ekvivalent med att med utgångspunkt från en given enhetssträcka konstruera en sträcka av längd $\sqrt{\pi}$, och detta är i sin tur ekvivalent

med att konstruera en sträcka av längd π , ty roten ur (och kvadraten på) en given sträcka kan alltid konstrueras med hjälp av passare och linjal.

Sidan i en fördubblad enhetskub är förstas $\sqrt[3]{2}$, så kubens fördubbling kräver att vi konstruerar en sträcka av denna längd.

En vinkel ϕ kan konstrueras om och endast om sträckan $\cos \phi$ kan konstrueras. Det trigonometriska sambandet

$$4 \cos^3 \frac{\phi}{3} - 3 \cos \frac{\phi}{3} = \cos \phi$$

visar därför att vinkels tredelning är ekvivalent med att för varje tal $a (= \cos \phi)$ i intervallet $[0, 1]$ konstruera en sträcka av längd $x (= \cos \frac{\phi}{3})$ som uppfyller $4x^3 - 3x = a$.

Första steget i olöslighetsbevisen består i att översätta de tillåtna konstruktionerna till algebraisk form. Vi fixerar därför ett koordinatsystem i planet. En linje blir då detsamma som en linjär ekvation $ax + by + c = 0$, och cirklar svarar mot andragradsekvationer av typen $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Att konstruera punkter enligt reglerna 3, 4 och 5 ovan svarar därför algebraiskt mot att lösa ekvationssystem bestående av två ekvationer av ovanstående slag. Lösningen till ett linjärt ekvationssystem kan alltid erhållas ur ekvationernas koefficienter med hjälp av de fyra räknesätten $+$, $-$, \cdot och $/$, medan lösningen av de system som svarar mot två cirklar eller mot en cirkel och en linje förutom de fyra räknesätten i allmänhet också kräver kvadratrotutdragning. Härav följer att de sträckor som vi kan erhålla ur en given sträcka genom att använda passare och linjal ett ändligt antal gånger, svarar mot de tal som vi kan erhålla ur talet 1 genom att successivt använda de fem operationerna $+$, $-$, \cdot , $/$ och $\sqrt{\quad}$. Sådana tal kallas algebraiska av grad 2^n över den rationella talkroppen \mathbf{Q} .

Det är nu ganska enkelt att visa att $\sqrt[3]{2}$ och att rötterna till tredjegrads ekvationen $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ (vilken motsvarar tredelning av vinkeln 60° eftersom $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) är algebraiska tal av grad 3 och således ej av grad 2^n för något n . Detta faktum bevisar att kuben inte kan fördubblas och att en godtycklig vinkel (t ex en 60° -vinkel) inte kan tredelas med hjälp av klassiska konstruktioner. Talet π är överhuvudtaget inte algebraiskt utan transcendent. Problemet att kvadrera cirkeln är således också omöjligt att lösa klassiskt.

Om man utvidgar arsenalen av tillåtna hjälpmedel till att omfatta t ex andragradskurvor och andra givna kurvor, så kan man naturligtvis lösa uppgifterna. Grekerna gav prov på många olika sådana lösningar, men vi skall här endast diskutera den lösning på problemet med kubens fördubbling som ledde fram till kägelsnitten.

Att bestämma $\sqrt{2}$ är naturligtvis detsamma som att lösa ekvationen

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{2}.$$

Hippokrates kom på att man på liknande sätt kan erhålla $\sqrt[3]{2}$ genom att lösa ekvationssystemet

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}.$$

Elimination av y ger nämligen $x = \sqrt[3]{2}$. Systemet kan också skrivas på formen

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = 2x \\ xy = 2 \end{cases}$$

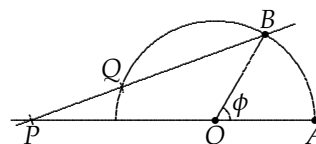
där naturligtvis ekvationerna inte är oberoende av varandra utan varje ekvation följer ur övriga två. Vi igenkänner här ekvationerna för två parabler och en hyperbel. MENAECHEMUS (ca 350 f Kr) studerade dessa ekvationer och upptäckte att de svarar mot skärningskurvor mellan koner och plan. Han initierade på så sätt studiet av kägelsnitt.

Teorin för kägelsnitt fulländades senare av APOLLONIUS (ca 260–200) som skrev ett omfattande arbete i åtta delar om ämnet.

Nära släkt med problemet om cirkelns kvadratur är problemet att bestämma goda approximationer till π . Genom att in- och omskriva regelbundna 96-hörningar till en cirkel erhöll Arkimedes uppskattningen $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

ÖVNINGAR

- 1.12 Ge en uppskattning av π genom att utnyttja in- och omskrivna regelbundna 12-hörningar till en cirkel.
- 1.13 Lös följande konstruktionsuppgifter med passare och linjal.
- Konstruera en sträcka av längd $\sqrt{2}$ givet en enhetssträcka.
 - Sträckorna a och b är givna. Konstruera sträckan \sqrt{ab} .
 - En enhetssträcka och sträckan a , $a < 1$, är given. Konstruera den vinkel θ i intervallet $0 < \theta < 90$ som uppfyller $\cos \theta = a$.
- 1.14 a) Låt $\triangle ABC$ vara en likbent triangel med bas $BC = 1$ och basvinklar $\angle B = \angle C = 72^\circ$. Bestäm sidan AC .
[Ledning: Låt D vara skärningspunkten mellan sidan AC och bisektrisen till vinkeln $\angle ABC$. Utnyttja likformighet för att bestämma DC .]
b) Beräkna $\cos 72^\circ$ med hjälp av resultaten i a).
c) Utnyttja b) och föregående övning för att visa att vinkeln 72° kan konstrueras med passare och linjal.
d) Visa att man kan konstruera en regelbunden femhörning med en given sida med hjälp av passare och linjal. Utför konstruktionen!
- 1.15 Vilka av följande vinklar kan konstrueras klassiskt?
a) 36° b) 18° c) 15° d) 3° e) 2° f) 1°
- 1.16 Med passare och *märkt* linjal kan man tredela en godtycklig vinkel! Arkimedes har anvisat följande konstruktion. Bevisa att den fungerar.
Låt ϕ vara en given vinkel med spets O . Välj O som medelpunkt för en cirkel som skär vinkelbenen i A och B . Märk linjalen med två streck P och Q så att $PQ = OA$. Lägg därefter linjalen så att den går genom B och så att P ligger på den förlängda diametern genom A och på motsatt sida om medelpunkten O , samt så att Q hamnar på cirkeln och mellan P och B . Då är $\angle APB$ en tredjedel av vinkeln $\phi = \angle AOB$.



Figur 1.12

1.7 Geometrins utveckling efter storhetstiden

Guldåldern i grekisk geometri inföll under två sekler mellan år 400 och år 200 f Kr med Eudoxos, Euklides, Arkimedes och Apollonius som de största namnen. Vid slutet av den perioden hade geometrin nått den punkt där vidare utveckling var praktiskt taget omöjlig med hänsyn till de begränsade metoder som stod till buds för grekerna. Vad som främst hindrade utvecklingen var avsaknaden av koordinatsystem och moderna algebraiska metoder. Grekerna kunde endast handskas med ekvationer i vilka de ingående storheterna var sträckor, areor och volymer, och deras lösningsmetoder var geometriska

och inte algebraiska. Man gjorde inga operationer med allmänna algebraiska kvantiteter, som kunde representera än det ena än det andra, och saknade symboler för sådana kvantiteter. Irrationella tal existerade endast som sträckor, och produkten av två sådana tal kunde därför bara representeras som en rektangel, osv.

Geometrin befann sig således i en återvändsgränd och det återstod endast för de efterkommande matematikerna att finputsa de erhållna resultaten och att vända sig mot geometris tillämpningsområden. Ett sådant tillämpningsområde var plan och sfärisk trigonometri som behövdes inom astronomin, ett annat var area- och volymlberäkningar.

Trigonometrin utvecklades av HIPPARCOS (ca 150 f Kr), MENELAOS (ca 100 e Kr) och PTOLEMAIOS (ca 150 e Kr). Ptolemaios utgav ett omfattande astronomiskt verk som blivit känt under sitt arabiska namn *Almagest*. Detta innehåller också trigonometri, bl a formler som motsvarar additionsformlerna för sinus och cosinus och en tabell över kordor i en given cirkel hörande till olika vinklar. Denna tabell är i princip en sinustabell för vinklar mellan 0° och 90° med en halv grads steglängd.

HERON från Alexandria (ca 100 e Kr) gjorde betydelsefulla insatser inom det andra av de ovanstående tillämpningsområdena. (Den med hans namn förknippade formeln för arean av en triangel upptäcktes dock av Arkimedes.)

Under de första århundradena efter Kristus upphörde i stort sett studiet av högre geometri. PAPPUS (ca 300 e Kr) försökte återuppväcka intresset för den klassiska grekiska geometrin genom att ge ut en omfattande handbok i geometri, men efter honom avtog intresset snart. Universitetet i Alexandria upphörde att existera i början av 400-talet och Platons akademi i Aten stängdes år 529. Därmed sattes den definitiva slutpunkten för en tusenårig period av grekisk vetenskaplig verksamhet. Vetenskapen lyckades emellertid övervintra hos en skola av arabiska vetenskapsmän, som omsorgsfullt översatte och kopierade de grekiska klassikerna. På 1100-talet gjordes den första latinska översättningen av *Elementa* från arabiska, och Euklides, Arkimedes, Apollonius och andra började så småningom att studeras vid de europeiska universitet som grundades under samma period.

Det skulle dock dröja in på 1600-talet innan geometrin uppnådde den standard som den en gång haft. Då lade RENÉ DESCARTES (1596–1650) och PIERRE DE FERMAT (1601–1665) grunden till den analytiska geometrin, och GERARD DÉSARGUES (1593–1662) och BLAISE PASCAL (1623–1662) uppfann den projektiva geometrin.

En verklig blomstringsperiod inföll så under slutet av 1700-talet och på 1800-talet med namn såsom GASPARD MONGÉ, VICTOR PONCELET, JOSEPH GERGONNE, JACOB STEINER och CHRISTIAN VON STAUDT inom projektiv geometri, JEAN BAPTISE BIOT inom analytisk geometri, AUGUST FERDINAND MÖBIUS, JULIUS PLÜCKER, MICHEL CHASLES, ARTHUR CAYLEY och HERMANN GRASSMAN inom algebraisk geometri, och BERNHARD RIEMANN inom differentialgeometri. FELIX KLEIN formulerade sitt berömda geometriska program i vilket olika geometrier betraktades som gruppvarianter. En beskrivning av ovanstående geometris insatser faller emellertid utanför ramen för den här framställningen. Vi skall nöja oss med att betrakta en fåra i utvecklingen, den som ledde fram till upptäckten av icke-euklidisk geometri.

ÖVNINGAR

1.17 En sats av Ptolemaios lyder: Om $ABCD$ är en cirkelfyrhörning (dvs en i en cirkel inskrivbar fyrhörning), så är

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

a) Betrakta det specialfall av denna sats som fås då AC är en diameter i den omskrivna cirkeln och sätt $a = BC$, $b = CD$ och $c = BD$. Visa att

$$2c = a(4 - b^2)^{1/2} + b(4 - a^2)^{1/2}.$$

b) Härled formeln $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ ur föregående likhet.

c) Bevisa Ptolemaios sats.

1.8 Parallellpostulatet

Ett av de krav som Aristoteles ställde på axiomen i ett deduktivt system var att de skulle vara evidenta. Parallellpostulatet kom snart att kritiseras för att inte uppfylla detta krav, och man kan av Euklides sätt att disponera *Elementa* sluta att han själv inte var tillfreds med att behöva inlemma det bland sina axiom. Han avstod nämligen i det längsta ifrån att utnyttja det. Första gången parallellpostulatet kommer till användning är i beviset för påstående 29 om alternatvinklar vid parallella linjer. Detta påstående utnyttjas sedan i sin tur exempelvis för att bevisa påstående 32 om triangelns vinkelsumma. Utan att använda parallellpostulatet har Euklides dessförinnan visat att yttervinkeln i en triangel är större än var och en av de motstående inre vinklarna (påstående 16), och att summan av två triangelvinklar är mindre än 180° (påstående 17), påståenden som är svagare än påstående 32 och som därför skulle ha utelämnats om parallellpostulatet hade använts på ett tidigare stadium. Vidare skulle beviset för påstående 26, dvs det kongruensfall som handlar om två vinklar och en sida, ha förenklats avsevärt om Euklides placerat påståendet efter påstående 32; nu tvingas han betrakta två fall beroende på om vinklarna gränsar till den givna sidan eller ej.

Det skulle göras otaliga försök att eliminera parallellpostulatet från axiomen. GEMINUS (ca 75 f Kr), PTOLEMAIOS, PROKLOS (410–485), WALLIS (1616–1703), SACCHERI (1667–1733), LEGENDRE (1752–1833) och FARKAS (WOLFGANG) BOLYAI (1775–1856) är bara några av de mera kända i raden av dem som trott sig ha lyckats bevisa postulatet. Samtliga sådana "bevis" har emellertid visat sig antingen innehålla rena misstag eller också utnyttja någon med parallellpostulatet ekvivalent princip.

Farkas Bolyai uttrycker i ett brev till sin son János, som också hade börjat intressera sig för parallellpostulatet, det missmod som många kände inför alla misslyckade försök att bevisa postulatet: "Du bör inte ge dig i kast med parallellaxiomet. Jag känner den vägen till dess ände. Jag har genomkorsat denna bottenlösa natt som har utsläckt allt ljus och all glädje i mitt liv. Jag bönfäller dig, lämna vetenskapen om paralleller i fred."

JÁNOS BOLYAI (1802–1860) skulle inte följa faderns råd, men han drog konsekvenserna av alla tidigare misslyckanden och tog som sin utgångspunkt att det är omöjligt att bevisa parallellpostulatet, och att det därför inte kan leda till någon motsägelse att ersätta det med följande antagande, som numera kallas det *hyperboliska parallellaxiomet*:

Genom varje punkt utanför en given linje går det minst två linjer som är parallella med den givna linjen.

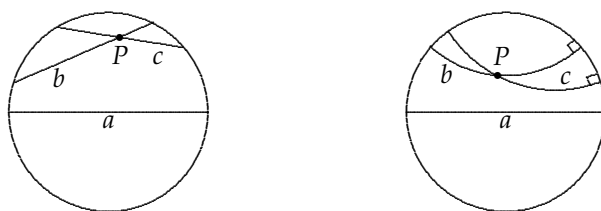
Med hjälp av de övriga euklidiska axiomen och ovanstående axiom lyckades János Bolyai bygga upp en helt ny teori, s k *hyperbolisk geometri*, som han publicerade år 1832 i ett appendix till en bok av fadern. Till sin stora besvikelse fick han senare erfara att han inte varit först med sina idéer. CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) hade varit inne på samma tankegångar redan 35 år tidigare, dock utan att publicera sina resultat, och NIKOLAI LOBACHEVSKY (1792–1856) hade utvecklat samma teori och hunnit före med publiceringen genom att publicera sina resultat i en rysk tidskrift 1829.

En del av Bolyais resultat hade faktiskt kommit fram hundra år tidigare. GIROLAMO SACCHERI och senare JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728–1777) försökte båda bevisa parallellpostulatet med motsägelsebevis som startade från antagandet att parallellaxiomet inte gäller. Möjligheten att det skulle saknas parallella linjer är utesluten på grund av påstående 31 i *Elementa*, vars bevis inte utnyttjar parallellpostulatet, så deras utgångspunkt var alltså de facto det hyperboliska parallellaxiomet. På vägen mot en hägrande

motsägelse härledde nu både Saccheri och Lambert flera viktiga satser inom hyperbolisk geometri. Saccheri tyckte sig slutligen med hjälp av ett obskyrt resonemang ha hittat en motsägelse, under det att Lambert gav upp utan att dra den rätta slutsatsen av sina mödor.

En av anledningarna till att Lambert inte vågade ifrågasätta parallellpostulatet, att Gauss inte publicerade sina resultat av rädsla att bli missförstådd, och att det dröjde till efter Gauss död innan matematiker började ta de icke-euklidiska idéerna på allvar, var den rådande filosofiska doktrinen om rummets och matematikens natur. Enligt KANT (1724–1804) har vi en på intuitionen baserad absolut säker kunskap om rummet (s k syntetisk kunskap apriori). Härav följer att det bara kan finnas en giltig beskrivning av rummet, och det föll aldrig Kant in att denna beskrivning skulle kunna vara någon annan än den euklidiska geometrins.

Varken Gauss, Bolyai eller Lobachevsky bevisade att deras icke-euklidiska geometri var motsägelsefri. Detta gjordes explicit först år 1868 av EUGENIO BELTRAMI (1835–1900), och därmed hade han också slutgiltigt bevisat att det är omöjligt att härleda det euklidiska parallellpostulatet ur övriga euklidiska axiom. Alternativa bevis gavs senare av FELIX KLEIN (1849–1925) och HENRI POINCARÉ (1854–1912). Bevisen är relativa motsägelsefrihetsbevis, dvs de visar att den hyperboliska geometrin är motsägelsefri under förutsättning att den euklidiska geometrin är det. (Omvändningen gäller också!)



Figur 1.13

I Kleins modell för hyperbolisk geometri svarar punkter mot punkter innanför en fix cirkel och linjer mot kordor i cirkeln. I Poincarés modell är punkter också punkter innanför en given cirkel, men linjer svarar mot cirkelbågar som är vinkelräta mot den givna cirkeln samt diametrar. I figuren visas två med linjen a parallella linjer b och c genom punkten P i Kleins resp. Poincarés modeller.

Upptäckten av icke-euklidisk geometri sporrade matematiker till att studera andra axiomsystem för geometri och inom matematik i största allmänhet. Den gjorde det också till en angelägen uppgift att ge en helt invändningsfri axiomatisk framställning av euklidisk geometri; Euklides egen framställning hade ju som vi tidigare nämnt en del brister. Den första dylika publicerades år 1882 av MORITZ PASCH (1843–1930). Några år senare utgav GUISEPPE PEANO (1858–1932) en axiomatisering i vilken de primitiva begreppen förvandlats till formella symboler och bevisen hade formen av algebraiska manipulationer. År 1899 kom DAVID HILBERTS (1862–1943) *Grundlagen der Geometrie*, som bl a innehåller ett axiomsystem som nära ansluter till Euklides eget. Hilberts bok fick genast en stor spridning, hade stor genomslagskraft och bidrog verksamt till en ny syn på axiomatiserade teorier. Vi skall presentera Hilberts axiom för plan geometri i de följande kapitlen.

Den icke-euklidiska geometrin spelade också en stor roll för metamatematik och för den filosofiska inställningen till matematik. Existensen av flera varandra motsägande axiomsystem för geometri gjorde det naturligtvis omöjligt att upprätthålla det aristoteliska kravet på att axiomen skall vara absoluta sanningar. Peano och Hilbert uppfattade

de primitiva begreppen i en axiomatiserad teori som formella symboler, som kan väljas helt godtyckligt och som apriori inte har någon mening. Istället för punkt, linje och plan kan vi således för att citera Hilbert substituera orden stol, bord och mugg utan att teorin förändras. Axiomen och satserna är "formler", som innehåller de primitiva och härledda begreppen som "variabler", och bevisen har en algebraisk karaktär, där strängar av symboler härleds ur andra symbolsträngar med hjälp av syntaktiska regler. Eftersom axiomen och satserna är utsagor om "meningslösa" symboler är det meningslöst att fråga sig om de är sanna eller falska. Begreppet *sanning* är istället knutet till begreppet *modell*. Vi kan ge de primitiva begreppen i en axiomatiserad teori konkret innebörd genom att *tolka* dem på ett visst sätt. Exempelvis kan vi tolka begreppet "punkt" som talpar (x, y) . Då vi gör en sådan konkret tolkning blir axiomen och satserna utsagor med konkret innehåll, och som sådana är de sanna eller falska. En tolkning som gör alla axiomen till sanna utsagor kallas en modell av axiomsystemet. I en modell blir automatiskt också alla satser sanna. Vi kommer att ge åtskilliga exempel på modellbegreppet i följande kapitel.

Litteraturanvisningar

På svenska och norska finns bl a följande böcker om matematikens historia:

Aaboe, A.: *Antikens matematik från babylonierna till Ptolemaios*. Prisma, 1969.

Brun, V.: *Alt er tall*. Universitetsforlaget, Bergen, 1964.

Struik, D.J.: *Matematikens historia*. Prisma, 1963.

Den andra boken behandlar matematikens historia från forntiden fram till medeltiden, den sistnämnda för historien fram till 1800-talet.

I van der Waerden, B.L.: *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, 1983, jämförs matematiken i de gamla civilisationerna och lanseras teorin om ett gemensamt indoeuropeiskt ursprung.

En utmärkt presentation av några viktiga händelser i matematikens utvecklingshistoria ges av H. Eves i

Eves, H.: *Great moments in mathematics*, 2 vols. The Mathematical Association of America, 1980.

Standardverket om den grekiska matematikens historia är

Heath, T.L.: *A history of Greek mathematics*, 2 vols. Dover, 1981 (Oxford, 1921).

Den bästa engelska översättningen av *Elementa* med utförliga kommentarer är

Heath, T.L.: *The thirteen books of Euclid's Elements*, 3 vols. Dover, 1956 (Cambridge, 1908).

Arkimedes arbeten är översatta av samma författare i

Heath, T.L.: *The works of Archimedes*. Dover (Cambridge, 1912).

De tidiga grekiska matematikerna var samtidigt filosofer. En utmärkt framställning av deras filosofiska insatser återfinns i

Wedberg, A.: *Filosofins historia*, del 1. Bonniers, 1959.

Matematikens grundvalar och axiomatisering diskuteras på ett lättfattligt sätt i

Wilder, R.L.: *The Foundations of Mathematics*. John Wiley, 1964.

Stora delar av Hilberts *Grundlagen der Geometrie* kan läsas utan alltför avancerade kunskaper i matematik. Den finns i engelsk översättning som

Hilbert, D.: *The Foundations of Geometry*. Open Court Publishing Company, 1971.

2 Neutral geometri

Vi skall i det här och följande kapitel presentera en axiomatisk framställning av euklidisk geometri. Som utgångspunkt väljer vi ett axiomsystem som i stort sett är Hilberts axiomsystem, ty detta ansluter nära till Euklides klassiska framställning, och axiomen är intuitivt tilltalande.

Axiomen kan på ett naturligt sätt delas in i fem grupper: *incidensaxiom*, *ordningsaxiom*, *kongruensaxiom*, *kontinuitetsaxiom* och *parallellaxiom*. De fyra förstnämnda axiomgrupperna är gemensamma för euklidisk och hyperbolisk geometri, och den teori som följer ur enbart dessa axiom kallas därför *absolut* eller *neutral* geometri. Satser i neutral geometri gäller således i såväl euklidisk som hyperbolisk geometri.

Följande fem begrepp är primitiva begrepp, dvs de definieras inte i termer av andra begrepp: *punkt*, *linje*, *ligga mellan* (en relation mellan tre punkter på en linje), *vara kongruent med* (som relation mellan sträckor), och *vara kongruent med* (som relation mellan vinklar). Att begreppen är primitiva förbjuder oss naturligtvis inte att ha en intuitiv uppfattning om vad de ska syfta på i vår konkreta omvärld – utan en sådan uppfattning skulle geometrin vara praktiskt oanvändbar.

Det här kapitlet ägnas, med undantag för avsnitt 2.2, åt neutral geometri. Vi inför en axiomgrupp i taget och studerar i anslutning till varje sådan grupp ett antal intressanta geometriska begrepp och satser.

Avsnitt 2.1 ägnas åt incidensaxiomen. I vår framställning är linjer speciella punktmängder, och incidensaxiomen ger några villkor som sådana punktmängder måste uppfylla för att vara linjer.

I avsnitt 2.2 diskuterar vi utförligt modellbegreppet samt begreppen *motsägelsefrihet*, *oberoende* och *kategoricitet*. Avsnittet är inte en del av den geometriska teori som vi är i färd med att bygga upp, utan det handlar om denna teori (och andra axiomatiska teorier). En teori som handlar om en annan teori X brukar kallas en *metateori* till X . Avsnitt 2.2 innehåller med andra ord några metaresultat.

Avsnitt 2.3 tar upp ordningsaxiomen, dvs axiomen för relationen *ligga mellan*. Med hjälp av dessa kan vi införa begreppen *sträcka*, *stråle*, *halvplan* och *vinkel*. De tre sistnämnda begreppen diskuteras utförligt i avsnitt 2.4.

I avsnitt 2.5 studerar vi polygoner och definierar bl a vad som menas med det inre och det yttre av en enkel polygon. För att underlätta läsningen har några mer tekniskt komplicerade bevis förts till ett appendix i slutet av kapitlet.

Kongruensaxiomen införs i avsnitt 2.6, och i avsnitt 2.7 bevisar vi de välbekanta kongruensfallen för trianglar.

I avsnitt 2.8 definierar vi det viktiga begreppet *rät vinkel* samt visar några viktiga satser om parallella linjer, normaler, mittpunkter och bisektriser.

I avsnitt 2.9 inför vi ett slags längd- och vinkelmåttbegrepp utan hjälp av reella tal för att kunna addera och jämföra sträckor resp. vinklar. Vi tillämpar dessa begrepp i det följande avsnittet, där vi bl a visar triangelolikheten och några satser om triangels vinklar.

Kontinuitetsaxiomen införs i avsnitt 2.11. Vi diskuterar två alternativa axiom, det ena svagare än det andra. Med hjälp av kontinuitetsaxiomen kan vi introducera reella tal i geometrin; längden av en sträcka kan exempelvis identifieras med ett reellt tal.

Avsnitt 2.12 ägnas åt cirklar, och i det avslutande avsnittet 2.13 studerar vi triangelns vinkelsumma samt ett antal påståenden som är ekvivalenta med det euklidiska parallellaxiomet.

2.1 Incidensaxiomen

Plan geometri handlar om två primitiva mängder \mathcal{P} och \mathcal{L} . Elementen i \mathcal{P} kallas *punkter* och kommer genomgående att betecknas med stora bokstäver A, B, C, \dots , medan elementen i \mathcal{L} kallas *linjer* och kommer att betecknas med små bokstäver a, b, c, \dots .

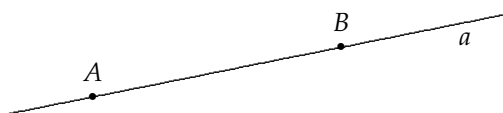
De tre s k *incidensaxiomen* definierar linjer som speciella mängder av punkter och ger villkor som sådana punktmängder måste uppfylla.

Axiom I1. *Varje linje är en delmängd till \mathcal{P} och innehåller minst två punkter.*

Om punkten A tillhör linjen a (i symboler $A \in a$) säger vi också att A *ligger på a* eller att *linjen a går genom punkten A* .

Naturligtvis vill vi så småningom kunna visa att det finns oändligt många punkter på varje linje. Detta kommer vi också att kunna göra när vi infört fler axiom än incidensaxiomen. Tills vidare nöjer vi oss med ovanstående svaga axiom.

Axiom I2. *För varje par av skilda punkter A och B finns det exakt en linje a som går genom A och B .*



Figur 2.1

Den entydigt bestämda linjen genom A och B betecknas fortsättningsvis \overline{AB} .

En punkt A som ligger på två skilda linjer a och b kallas en *skärningspunkt* till linjerna, och de båda linjerna säges *skära varandra* i punkten A .

Av axiom I2 följer omedelbart att två skilda linjer har högst en skärningspunkt. Två linjer kallas *parallella* om de saknar skärningspunkt. Vi skriver $a \parallel b$ om linjerna a och b är parallella eller identiska.

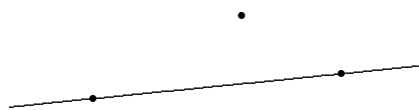
Följande sats är en enkel konsekvens av axiomen I1 och I2.

Sats 2.1.1 *Om a och b är två skilda linjer så finns det en punkt A så att $A \in a$ och $A \notin b$.*

Innan vi går vidare är det nödvändigt att precisera vårt språkbruk på en viktig punkt. När vi i fortsättningen använder uttrycket "Låt A och B vara två punkter", eller "Det finns tre linjer a, b, c ", så underförstår vi alltid att de två punkterna resp. de tre linjerna är skilda. Detta hindrar oss naturligtvis inte att ibland för tydlighets skull skriva "Låt A och B vara två skilda punkter", etc. Om vi vill betrakta ett fall där A och B kan vara två skilda punkter men också samma punkt, så skriver vi istället "Låt A och B vara punkter". Frasen " a, b, c är linjer" håller alltså möjligheten att $a = b$, $a = c$, $b = c$ eller $a = b = c$ öppen.

Nästa axiom garanterar att det finns minst tre punkter (och minst tre linjer).

Axiom I3. *Det finns minst tre punkter som inte ligger på en och samma linje.*



Figur 2.2

Ur axiom I3 följer omedelbart följande sats.

Sats 2.1.2 *För varje linje a finns det en punkt A som ligger utanför (dvs inte på) a .*

Bevis. Som A kan vi alltid välja en av de tre punkter som omnämns i axiom I3. □

ÖVNINGAR

2.1 Bevisa sats 2.1.1.

2.2 Bevisa att det finns minst tre linjer.

2.2 Modellbegreppet, motsägelsefrihet, oberoende

Namnen på de primitiva begreppen i en axiomatisk teori är naturligtvis oftast valda med en viss konkret tolkning i åtanke, men för själva teorin är det helt likgiltigt vad begreppen kallas. Vi skulle t ex lika gärna kunna kalla "punkt", "linje" och "ligga på" för "äpple", "träd" och "växa på". Axiomen i en formaliserad teori handlar således om "meningslösa" begrepp i betydelsen begrepp utan definitiv mening. Det är därför meningslöst att ställa frågan om axiomerna är sanna eller falska. Endast om vi ger de primitiva begreppen en *konkret tolkning* så att axiomerna blir utsagor med konkret innehåll kan axiomerna vara sanna eller falska.

Med en *modell* av ett axiomsystem menas en sådan konkret tolkning av de primitiva begreppen som gör samtliga axiom till sanna utsagor om de konkreta begreppen. För att specificera en modell behöver vi således upprätta ett "lexikon" som översätter varje primitivt begrepp till ett konkret begrepp.

Låt oss exemplifiera med några enkla modeller för incidensaxiomen I1–I3.

EXEMPEL 1. Betrakta följande översättningar av begreppen punkt och linje.

$$\mathcal{P} \leftrightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{L} \leftrightarrow \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}.$$

Det finns nu alltså tre "punkter", nämligen talen 1, 2 och 3, och tre "linjer", nämligen tvåtalsmängderna $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ och $\{1, 3\}$. Under dessa tolkningar övergår de tre axiomerna i sanna utsagor, ty varje tvåtalsmängd innehåller minst två tal, de tre talen 1, 2, 3 tillhör inte någon tvåtalsmängd, och varje par av de tre talen tillhör en unik tvåtalsmängd. □

EXEMPEL 2. Betrakta en triangel $\triangle ABC$ och upprätta följande lexikon som gör att en punkt svarar mot en triangelsida och en linje svarar mot ett triangelhorn (det horn där två sidor möts).

punkter \leftrightarrow de tre triangelsidorna AB , BC och CA

linjer \leftrightarrow paren $\{AB, BC\}$, $\{BC, CA\}$, $\{AB, CA\}$.

Detta är också en modell för incidensaxiomen med tre punkter och tre linjer.

EXEMPEL 3. Låt

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &\leftrightarrow \{1, 2, 3, 4\} \\ \mathcal{L} &\leftrightarrow \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}.\end{aligned}$$

Man verifierar omedelbart att detta också är en modell för incidensaxiomen. \square

Modellerna i exemplen 1 och 2 är mycket lika; i själva verket är det fråga om "samma modell" i olika förklädning. Om vi definierar följande tillordning mellan objekten i de båda modellerna

$$\begin{aligned}1 &\leftrightarrow AB, \quad 2 \leftrightarrow BC, \quad 3 \leftrightarrow CA \\ \{1, 2\} &\leftrightarrow \{AB, BC\}, \quad \{2, 3\} \leftrightarrow \{BC, CA\}, \quad \{1, 3\} \leftrightarrow \{AB, CA\}\end{aligned}$$

så ser vi att en punkt ligger på en linje i den ena modellen om och endast om motsvarande punkt ligger på motsvarande linje i den andra modellen. Sådana modeller kallas isomorfa.

Låt allmänt \mathcal{E} och \mathcal{E}' vara två modeller till en axiomatiserad teori T . Till varje primitiv mängd i T hör en tolkad mängd i \mathcal{E} och till varje primitiv relation i T hör en tolkad relation i \mathcal{E} . Modellen \mathcal{E} består således av ett antal mängder X_1, X_2, \dots, X_n och ett antal relationer $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, och på motsvarande sätt består \mathcal{E}' av mängder X'_1, X'_2, \dots, X'_n och relationer $\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_m$. Modellerna \mathcal{E} och \mathcal{E}' kallas *isomorfa* om det finns bijektioner

$$X_i \rightarrow X'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

som är sådana att en relation ρ_j gäller mellan element i mängderna X_i om och endast om relationen ρ'_j gäller mellan motsvarande element i mängderna X'_i .

Om alla modeller till en teori är isomorfa kallas teorin *kategorisk*.

Eftersom punktmängderna i modellerna i exemplen 1 och 3 innehåller tre resp. fyra element, kan det inte finnas någon bijektion mellan dem. Modellerna är därför inte isomorfa. Incidensaxiomen ger således upphov till en icke-kategorisk teori. I kapitel 3 skall vi visa att den euklidiska teorin är kategorisk.

De logiska slutledningsreglerna (och det logiska sanningsbegreppet) är sådana att alla konsekvenser av ett antal sanna påståenden är sanna. Härav följer att i en modell för en axiomatiserad teori måste samtliga satser (dvs egentligen deras uttolkningar) vara sanna påståenden, ty satserna följer ju ytterst ur axiomen med hjälp av logiska slutledningsregler, och axiomens tolkningar är ju definitionsmissigt sanna i en modell.

En axiomatisk teori kallas *motsägelsefri* eller *konsistent* om den inte innehåller två varandra motsägande satser A och B . Ur varje motsägelse kan vi logiskt härleda varje annat påstående, så vi kan därför ekvivalent säga att en teori är motsägelsefri om och endast om det finns ett påstående som inte är en sats.

Naturligtvis är motsägelsefulla teorier totalt ointressanta, så det är därför viktigt att kunna avgöra om en teori är motsägelsefri eller ej. Med hjälp av modellbegreppet kan vi avgöra detta. Vi har nämligen följande resultat.

Metasats 1 *Om en axiomatiserad teori har en modell så är den motsägelsefri.*

Bevis. Antag att teorin har en modell \mathcal{E} men är motsägelsefull. Då innehåller teorin två satser A och icke- A som är varandras negationer. Motsvarande tolkningar i modellen \mathcal{E} är då båda sanna, men detta är orimligt, ty tolkningarna är också varandras negationer och om den ena är sann så är den andra falsk. Av denna motsägelse följer att teorin är motsägelsefri. \square

EXEMPEL 4. Vi har visat att incidensaxiomen har en modell. Följaktligen är den teori, som följer ur incidensaxiomen, motsägelsefri. \square

För att bevisa att incidensaxiomen är motsägelsefria räcker det att verifiera att översättningen i exempel 1 är en modell. Detta är ett enkelt kombinatoriskt problem som endast kräver ett fåtal verifikationer. I allmänhet är det emellertid inte lika enkelt att konstruera modeller, utan för mer komplicerade axiomsystem krävs det modeller som är uppbyggda av abstrakta byggstenar från olika delar av matematiken. För att visa att en sådan modell verkligen är en modell (dvs att axiomens tolkningar är sanna) måste vi då ofta förlita oss på att andra matematiska teorier, t ex teorin för reella tal, är motsägelsefria. Vi kan i så fall inte ur existensen av en modell för teorin T dra den absoluta slutsatsen att teorin är motsägelsefri, utan vi får nöja oss med den mer modesta relativa slutsatsen att teorin T är motsägelsefri om den teori T' , som modellen bygger på, är motsägelsefri. Man säger i så fall att T är *relativt motsägelsefri*.

I kapitel 3 skall vi ge ett sådant relativt motsägelsefrihetsbevis för euklidisk geometri genom att visa att geometrin är motsägelsefri om teorin för reella tal är motsägelsefri.

Av främst estetiska skäl vill man att ett axiomsystem för en teori inte skall innehålla flera axiom än nödvändigt. Låt oss därför precisera detta.

Låt P_1, P_2, \dots, P_n, Q vara ett antal påståenden. Man säger att Q är *oberoende* av P_1, P_2, \dots, P_n om varken Q eller dess negation icke- Q följer ur P_1, P_2, \dots, P_n (och de logiska reglerna).

Om A_1, A_2, \dots, A_n är axiom i en motsägelsefri teori, så kan givetvis inte negationen icke- A_n följa ur axiomen A_1, A_2, \dots, A_{n-1} . Axiomet A_n är därför oberoende av de övriga axiomen om och endast om A_n inte följer ur de övriga axiomen.

Den mer än 2000 år långa diskussionen om Euklides parallellaxiom gällde alltså frågan huruvida detta axiom var oberoende av Euklides övriga axiom. Anledningen till att det dröjde så länge innan problemet slutgiltigt kunde lösas var att alla utgick ifrån att axiomet är beroende och att det alltså skulle gå att bevisa detta. Allt arbete var därför inriktat på att hitta beviset. Vi vet nu att denna utgångspunkt var felaktig.

Vid första anblicken tycks det vara en svår, för att inte säga omöjlig, uppgift att bevisa att ett påstående inte följer ur ett antal givna påståenden. Problemet kan emellertid lösas med hjälp av modeller på följande sätt.

Metasats 2 Axiomet A_n i en motsägelsefri teori är oberoende av de övriga axiomen A_1, A_2, \dots, A_{n-1} om det finns en modell för de sistnämnda axiomen i vilken påståendet A_n är falskt.

Bevis. Om det finns en sådan modell, så kan inte A_n vara en logisk följd av A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , dvs en sats i motsvarande teori, ty i så fall skulle även A_n 's tolkning i modellen vara ett sant påstående. \square

EXEMPEL 5. Låt oss komplettera incidensaxiomen I1–I3 med följande tillfälliga axiom:

I4. För varje linje a och varje punkt P utanför a finns det en parallel linje b genom P .

Modellen i exempel 3 visar att axiomsystemet I1–I4 är motsägelsefritt, ty även påstående I4 är sant i den modellen. (Om t ex $a \leftrightarrow \{1, 2\}$, $P \leftrightarrow 3$ och $b \leftrightarrow \{3, 4\}$, så går (tolkningen av) b genom (tolkningen av) P utan att skära (tolkningen av) a .) Å andra sidan visar modellen i exempel 1 för axiomen I1–I3 att axiom I4 är oberoende, ty i denna modell är påstående I4 falskt. (Det finns överhuvudtaget inga parallella linjer i den modellen.) \square

Vi skall nu formulera ett antal modeller för axiomen I1–I3 som vi senare kommer att bygga vidare på.

EXEMPEL 6 (Den *intuitiva* modellen). Den euklidiska geometrins axiomsystem är i första hand gjort för att passa en viss modell, nämligen den "intuitiva" modellen, där en

punkt är en idealiserad prick på t ex ett papper, och en linje är ett idealiserat linjerat streck eller en tänkt förbindelselinje mellan ögat och ett avlägset punktformat föremål, osv. Följande lexikon ger oss den del av modellen som räcker för att tolka incidensaxiomen.

punkt \leftrightarrow prick på ett papper av "oändlig utsträckning"

linje \leftrightarrow linjerat streck med "oändlig utsträckning"

Erfarenheten, intuitionen, eller det sätt som vi är programmerade att tänka på, säger oss att axiomen I1–I3 är sanna under ovanstående tolkning. Det bör betonas att den intuitiva modellen inte är en *matematiskt* definierad modell utan en idealisering av verkligheten i stil med Platons idévärld. Alla figurer i det här kompendiet är förstås utförda i den intuitiva modellen. \square

EXEMPEL 7 (Den *Cartesianska* modellen). I analytisk geometri associerar man tal till de geometriska objekten via koordinatsystem (se kapitel 3). Därigenom blir algebraiska metoder tillgängliga inom geometrin. Man kan vända på steken och göra en algebraisk modell för (euklidisk) geometri. Vi illustrerar detta genom att ge det lexikon som behövs för incidensaxiomen:

punkt \leftrightarrow talpar $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

linje \leftrightarrow mängd $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$,

där α , β och γ är reella tal, och α och β inte båda är lika med 0. Detta ger oss en modell till axiomen I1–I3. Vi har nämligen

1. Varje ekvation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ satisfieras av minst två talpar (x, y) om $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
2. Givet två skilda talpar (x_1, y_1) och (x_2, y_2) finns det en unik "linjär mängd" som de båda talparen tillhör, nämligen mängden $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0\}$.
3. $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ är tre talpar som inte satisfierar någon linjär ekvation med nollskilda koefficienter. \square

EXEMPEL 8 (Den *konstruktiva* modellen). Vi utgår från två punkter A och B i den intuitiva modellen. Låt \mathcal{P}' vara mängden av alla punkter och \mathcal{L}' mängden av alla linjer som kan konstrueras klassiskt utifrån de givna två punkterna (jmf kapitel 1.6). Följande lexikon ger oss en modell för incidensaxiomen:

punkt \leftrightarrow punkt i \mathcal{P}'

linje \leftrightarrow mängden av alla konstruerbara punkter på en linje i \mathcal{L}'

Axiomen I1 och I2 är trivialt uppfyllda, ty varje konstruerbar linje är definitionsmässigt bestämd av två konstruerbara punkter, och axiom I3 gäller naturligtvis också. (Vi kan t ex konstruera en punkt C som tillsammans med A och B utgör hörn i en liksidig triangel.) \square

EXEMPEL 9 (Den *rationella Cartesianska* modellen). Byt ut \mathbf{R} mot \mathbf{Q} (= mängden av rationella tal) överallt i den Cartesianska modellen i exempel 7. Detta ger en tolkning, där punkter svarar mot ordnade par av rationella tal, och där linjerna nu har rationella koefficienter. Man verifierar omedelbart att tolkningen är en modell för incidensaxiomen. \square

EXEMPEL 10 (*Kleins hyperboliska* modell). Låt Γ vara en fix cirkel i den intuitiva modellen. Följande lexikon definierar en modell för incidensaxiomen:

$\mathcal{P} \leftrightarrow$ alla punkter innanför cirkeln Γ

$\mathcal{L} \leftrightarrow$ alla kordor i cirkeln Γ

Observera att det i modellen för varje linje a och varje punkt P utanför a finns oändligt många linjer genom P som är parallella med (dvs inte skär) a . \square

EXEMPEL 11 (*Elliptiska modellen*). Låt Σ vara en fix sfär i det vanliga intuitiva tredimensionella rummet. Två punkter A och A' på sfären är *antipodpunkter* om AA' är en diameter i sfären. Skärningscirkeln mellan Σ och ett plan genom sfärens medelpunkt kallas en *storcirkel*. Följande lexikon definierar en modell för incidensaxiomen:

punkt \leftrightarrow oordnat par $\{A, A'\}$ av antipodpunkter på Σ
linje \leftrightarrow storcirkel på Σ

Observera att det inte finns några parallella linjer i denna modell. \square

2.3 Ordningsaxiomen

En linje är på grund av incidensaxiomen entydigt bestämd av varje par av sina punkter. Men en intuitiv linje är mer än så – det är en *ordnad* mängd. Således är det meningsfullt att säga att en punkt ligger *mellan* två andra punkter eller *utanför* en given sträcka.

Euklides utnyttjar naturligtvis detta faktum flitigt, trots att Elementa inte innehåller några axiom för ordning. Ordningsegenskaperna har förmodligen uppfattats som så självklara att Euklides helt har förbiset behovet av axiom för att reglera dessa egenskaper. Den tyske geometern M. PASCH var den som först insåg betydelsen av ordningsaxiom.

Vi behöver ett primitivt ordningsbegrepp och väljer då begreppet *mellan*, som är en relation definierad för triplar av punkter. Vi använder beteckningen $A - C - B$ för att ange att punkten C ligger mellan punkten A och punkten B . Istället för att säga att C ligger mellan A och B så säger vi också att punkterna A , C och B ligger *i följd*.

Den intuitiva tolkningen av $A - C - B$ är förstås den självklara, nämligen att C ligger på linjen genom A och B och mellan de båda sistnämnda punkterna som i nedanstående figur.



Figur 2.3
 $A - C - B$

Vi kommer att behöva fem axiom för begreppet mellan. De fyra första handlar om punkter på en linje.

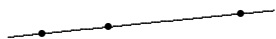
Axiom O1 Om C ligger mellan A och B , så är A , B och C skilda punkter, och C ligger på linjen genom A och B .

Axiom O2 Om C ligger mellan A och B , så ligger C också mellan B och A .

Axiom O3 Om A , B och C är tre punkter i linje, så gäller exakt ett av följande tre alternativ:

$$A - B - C, \quad B - C - A, \quad C - A - B.$$

Axiom O3 innebär att av tre punkter på en linje ligger exakt en av punkterna mellan de övriga två. Punkterna på en linje är därför ordnade som i fig. 2.4 och inte som i fig. 2.5.



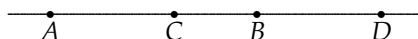
Figur 2.4



Figur 2.5

Nästa axiom garanterar att det finns en punkt mellan varje par av punkter och att varje punkt på en linje ligger mellan två andra punkter på linjen.

Axiom O4 För varje par av skilda punkter A och B finns det punkter C och D så att $A - C - B$ och $A - B - D$.



Figur 2.6

För att t ex kunna visa att en linje delar planet i två väldefinierade halvplan, behöver vi ytterligare ett ordningsaxiom för punkter som inte ligger i linje. För att kunna formulera axiomet behöver vi först införa begreppen sträcka och triangel.

Med *sträckan* AB mellan två punkter A och B menas mängden av alla punkter mellan A och B , dvs

$$AB = \{X \in \mathcal{P} \mid A - X - B\}.$$

Punkterna A och B kallas sträckans *ändpunkter*; observera att dessa inte ligger på sträckan.

Axiom O2 medför förstås att AB och BA är samma sträcka.

Varje punkt på sträckan AB ligger enligt axiom O1 på linjen \overline{AB} , som kallas sträckans *stödlinje*; vi säger också att sträckan *ligger på* (eller *utefter*) denna linje.

En linje säges *skära* en sträcka i en punkt P om P ligger på såväl sträckan som linjen.

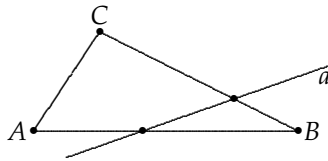
Låt A , B och C vara tre punkter som inte ligger i linje. Punkterna bestämmer tre sträckor AB , BC och CA . Den ordnade trippeln (AB, BC, CA) av dessa sträckor kallas en *triangel* och betecknas $\triangle ABC$. Punkterna A , B , C kallas triangelns *hörn*, och sträckorna AB , BC och CA är triangelns *sidor*. Hörnet A säges vara *motsatt* sidan BC , etc. Triangelns *sidolinjer* är de tre stödlinjerna till sidorna, dvs \overline{AB} , \overline{BC} och \overline{CA} .

Hörnen och sidorna i en triangel bildar tillsammans en mängd som kallas triangelns *rand* eller *periferi*. (I dagligt tal är det triangelns rand som är själva triangeln.)

Observera att vi betraktar $\triangle ABC$, $\triangle BCA$ och $\triangle BAC$ som olika trianglar trots att de har samma sidor och hörn. Att uppfatta en triangel som en ordnad trippel av sidor kommer nämligen att visa sig praktiskt när vi skall diskutera kongruens och likformighet.

Vi kan nu formulera vårt femte och sista ordningsaxiom.

Axiom O5 Låt a vara en linje som inte går genom något av hörnen i $\triangle ABC$. Om a skär sidan AB , så skär a också exakt en av de övriga två sidorna BC och CA .



Figur 2.7

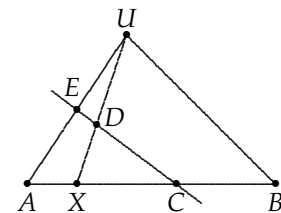
Axiomen O1–O5 är de fem ordningsaxiomen. Med hjälp av dem skall vi i nästa avsnitt definiera sådana begrepp som stråle, halvplan och vinkel. Som förberedelse visar vi några resultat för sträckor.

Sats 2.3.1 Antag att $A - C - B$. Då är

- (i) $AC \cap CB = \emptyset$, och
- (ii) $AB = AC \cup \{C\} \cup CB$.

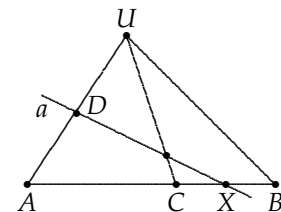
Bevis. Trots att satsen enbart handlar om punkter på en linje måste vi göra flitigt bruk av axiom O5. Vi börjar därför med att välja en punkt U utanför linjen \overline{AB} (vilket är möjligt på grund av sats 2.1.2).

(i) För att visa påstående (i) skall vi visa att ingen punkt på sträckan AC tillhör sträckan CB . Antag därför att $X \in AC$, och låt D vara en punkt på sträckan UX (axiom O4). Punkten C ligger utanför sträckan AX på grund av axiom O3, varför linjen \overline{CD} måste skära sträckan UA i en punkt E enligt axiom O5 tillämpat på $\triangle UAX$ (se fig. 2.8). Betrakta nu $\triangle UAB$; linjen \overline{CD} skär sidorna AB och UA (i C resp. E), så axiom O5 medför att linjen inte kan skära sidan UB . Låt oss slutligen betrakta $\triangle UXB$; eftersom linjen \overline{CD} skär sidan UX (i D) och inte skär sidan UB , måste den skära sidan XB . Skärningspunkten C mellan linjerna \overline{CD} och \overline{AB} tillhör med andra ord sträckan XB , men då gäller enligt axiom O3 att $X \notin CB$. Därmed är påstående (i) bevisat.



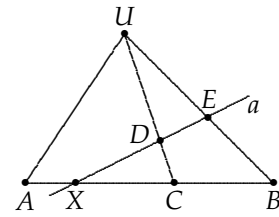
Figur 2.8

(ii) Vi visar först att $AB \subseteq AC \cup \{C\} \cup CB$. Antag därför att $X \in AB$. Om $X = C$ har vi ingenting att visa, så antag också att $X \neq C$. Välj $D \in AU$ och betrakta linjen $a = \overline{XD}$ (se fig. 2.9). På grund av axiom O5 skär inte a sidan BU i triangeln $\triangle UAB$. Om a skär sidan UC i $\triangle UCB$, så måste därför a skära sidan CB (axiom O5), vilket innebär att $X \in CB$. Om a inte skär UC , så tillämpar vi istället axiom O5 på $\triangle UAC$ och drar slutsatsen att a skär sidan AC , dvs. $X \in AC$. Under alla omständigheter gäller att $X \in AC \cup CB$, och därmed är inklusionen bevisad.



Figur 2.9

Vi skall slutligen bevisa den omvända inklusionen. Eftersom $C \in AB$ har vi att visa att $AC \subseteq AB$ och $CB \subseteq AB$ och av symmetriskäl (axiom O2) räcker det att visa den förstnämnda inklusionen. Så antag att $X \in AC$. Välj $D \in UC$ och låt a vara linjen genom X och D (jmf fig. 2.10). Enligt (i) gäller att $X \notin CB$, varför a måste skära sidan BU i $\triangle UCB$ i en punkt E . Axiom O5 tillämpat på $\triangle UAC$ ger att a inte skär sidan UA . Samma axiom tillämpat på $\triangle UAB$ medför därför att a skär sidan AB , och eftersom skärningspunkten med linjen \overline{AB} är X , måste $X \in AB$. Detta visar att $AC \subseteq AB$. \square



Figur 2.10

Vi är nu i stånd att visa att det finns oändligt många punkter på varje sträcka.

Sats 2.3.2 *Varje sträcka innehåller oändligt många punkter.*

Bevis. Låt AB vara en sträcka och sätt $B_0 = B$. På grund av axiom O4 (och induktion) kan vi välja punkter B_1, B_2, B_3, \dots så att $B_1 \in AB_0, B_2 \in AB_1, B_3 \in AB_2, \dots$, dvs så att $B_n \in AB_{n-1}$ för alla $n \geq 1$. Sats 2.3.1 medför att $AB_n \cup \{B_n\}$ är en äkta delmängd till AB_{n-1} för alla n . Om $0 \leq k < n$ är därför $AB_n \cup \{B_n\}$ en äkta delmängd till AB_k . Det följer speciellt att $B_n \neq B_k$ för $1 \leq k < n$. Punkterna B_1, B_2, B_3, \dots är därför oändligt många skilda punkter på sträckan AB . \square

Med hjälp av induktion över antalet punkter är det lätt att bevisa följande sats. Vi utelämnar beviset.

Sats 2.3.3 *n givna punkter på en linje kan numreras A_1, A_2, \dots, A_n så att*

$$A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_3 - A_4, \dots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n,$$

vilket medför att

$$A_1 A_n = A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup \dots \cup A_{n-1} A_n \cup \{A_2, A_3, \dots, A_{n-1}\},$$

där $A_i A_{i+1} \cap A_k A_{k+1} = \emptyset$ för alla $i \neq k$.

Om n punkter A_1, A_2, \dots, A_n är numrerade som i satsen, så skriver vi

$$A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - \dots - A_n.$$

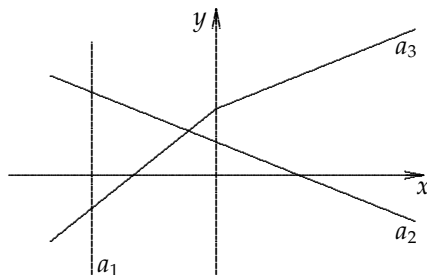
Numreringen kan naturligtvis göras på exakt två sätt, nämligen "från vänster till höger" eller från "höger till vänster".

Sats 2.3.4 *Låt a_1, a_2, \dots, a_n vara linjer och låt AB vara en sträcka som inte har någon av dessa linjer som sin stöddlinje. Då finns det en punkt C på sträckan så att delsträckan AC inte innehåller någon punkt från de givna linjerna.*

Bevis. Var och en av linjerna skär sträckan AB i högst en punkt. Låt C_1, C_2, \dots, C_m vara de olika skärningspunkterna, numrerade så att $A - C_1 - C_2 - \dots - C_m - B$. Då duger $C = C_1$. (Om $m = 0$ så duger förstås varje punkt C på sträckan AB .) \square

ÖVNINGAR

- 2.3 Bevisa att det finns oändligt många linjer
- 2.4 Låt a_1, a_2, \dots, a_n vara givna linjer. Visa att det finns en punkt som inte tillhör någon av dessa linjer.
- 2.5 Verifiera att med följande tolkningar av det primitiva begreppet *mellan* blir modellerna i exemplen 7–10 i avsnitt 2.2 också modeller för ordningsaxiomen.
- a) *Cartesienska modellen*: Punkten (x, y) ligger mellan punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) om och endast om det finns ett reellt tal t så att $x = tx_1 + (1-t)x_2$, $y = ty_1 + (1-t)y_2$ och $0 < t < 1$.
- b) *Konstruktiva modellen*: Den konstruerbara punkten C ligger mellan de konstruerbara punkterna A och B om och endast om C ligger mellan A och B som punkter i den intuitiva modellen.
- c) *Rationella Cartesienska modellen*: Samma tolkning av mellan som i den Cartesienska modellen. (Talet t blir nu automatiskt rationellt.)
- d) *Kleins hyperboliska modell*: Låt A, B, C vara tre punkter innanför cirkeln Γ . C ligger mellan A och B om och endast om C ligger mellan A och B i vanlig intuitiv mening.
- 2.6 Vilka av axiomen I1–I3, O1–O5 är sanna om de primitiva begreppen ges följande tolkning: Med punkt resp. linje menas en punkt resp. linje i det intuitiva tredimensionella euklidiska rummet, och med att C ligger mellan A och B menas att punkten C ligger på den intuitiva sträckan AB .
- 2.7 Fixera ett koordinatsystem i (det intuitiva) planet och tolka de primitiva begreppen på följande sätt:
Mängden \mathcal{P} av punkter svarar mot alla punkter utom de som ligger i fjärde kvadranten. Med en linje menas den del av en vanlig linje som inte ligger i fjärde kvadranten. Av tre punkter som inte ligger i fjärde kvadranten ligger en punkt mellan de två andra om den gör det i vanlig mening.
- Vilka av axiomen I1–I3, O1–O5 är sanna under ovanstående tolkning?
- 2.8 I *Moultons modell* för axiomen I1–I3, O1–O5 svarar punktmängden \mathcal{P} mot \mathbf{R}^2 , medan linjerna svarar mot följande tre typer av delmängder till \mathbf{R}^2 :
- $\{(x, y) \mid x = b\}$, där $b \in \mathbf{R}$ är godtyckligt;
 $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$, där $a \leq 0$ och $b \in \mathbf{R}$;
 $\{(x, y) \mid y = ax + b \text{ om } x \leq 0, \text{ och } y = \frac{1}{2}ax + b \text{ om } x > 0\}$, där $a > 0, b \in \mathbf{R}$.
- (De olika linjetyperna svarar mot vanliga vertikala linjer, vanliga linjer icke-positiv lutning, och "brutna linjer".)
- Mellan ges följande tolkning: $(x_1, y_1) - (x, y) - (x_2, y_2)$ om de tre punkterna ligger på någon av modellens linjer, och x ligger mellan x_1 och x_2 , eller $x = x_1 = x_2$ och y ligger mellan y_1 och y_2 .
- Verifiera att incidens- och ordningsaxiomen är uppfyllda i Moultons modell.



Figur 2.11

Tre olika slags linjer i Moultons modell

2.4 Strålar, halvplan och vinklar

En punkt på en linje delar denna i två halvlinjer eller strålar, och en linje delar planet i två halvplan. Vi skall visa hur man definierar dessa begrepp i termer av de primitiva begreppen. Först behöver vi emellertid rekapitulera vad som menas med ekvivalensrelationer och ekvivalensklasser.

Låt X vara en godtycklig mängd. En relation \sim på X kallas en *ekvivalensrelation* om följande två villkor är uppfyllda:

- (i) $x \sim x$ för alla $x \in X$ (reflexivitet)
 (ii) $x \sim z$ och $y \sim z \Rightarrow x \sim y$ (transitivitet)

En egenskap som följer direkt ur (i) och (ii) är *symmetri*, dvs

$$y \sim x \Rightarrow x \sim y.$$

(Sätt $z = x$ i (ii) och utnyttja (i)!)

Exempel på ekvivalensrelationer är "är född samma år som" och "har samma kön som" på mängden av alla människor, samt "har samma slutsiffra (i decimalsystemet)" på mängden av alla naturliga tal.

En ekvivalensrelation \sim på X delar på ett naturligt sätt in mängden X i ett antal parvis disjunkta delmängder $X_i, i \in I$, dvs vi har

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \quad \text{där } X_i \cap X_j = \emptyset \quad \text{om } i \neq j.$$

Vi får delmängderna X_i genom att föra ihop alla inbördes ekvivalenta element till en och samma delmängd. Följaktligen gäller

$$\begin{aligned} x, y \in X_i &\Rightarrow x \sim y \\ x \in X_i, y \in X_j, i \neq j &\Rightarrow x \not\sim y. \end{aligned}$$

De erhållna delmängderna X_i kallas *ekvivalensklasser* till relationen \sim .

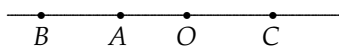
I de tre exemplen ovan är ekvivalensklasserna årsklasser, män och kvinnor, resp. naturliga tal med en given slutsiffra, dvs

$$\begin{aligned} X_i &= \{\text{alla människor födda år } i\}, \quad i = 2003, 2002, 2001, \dots; \\ X_1 &= \{\text{alla män}\}, \quad X_2 = \{\text{alla kvinnor}\}; \\ X_i &= \{\text{alla naturliga tal med slutsiffra } i\}, \quad i = 0, 1, \dots, 9. \end{aligned}$$

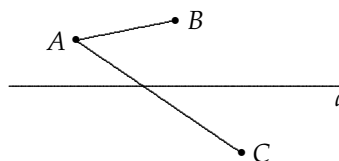
Vi kan nu återvända till geometrin och börjar med ett par definitioner.

Låt O vara en punkt på en linje a . Punkterna A och B på $a \setminus \{O\}$ ligger på samma sida om O , förkortat A ss O B , om $A = B$ eller $A \neq B$ och $O \notin AB$.

Punkterna A och B utanför linjen a ligger på samma sida om a , förkortat A ssa B , om $A = B$ eller om $A \neq B$ och a inte skär sträckan AB .



Figur 2.12 A ss O B



Figur 2.13 A ssa B

Sats 2.4.1 Låt O vara en punkt på linjen a .

- (i) Relationen ssO är en ekvivalensrelation på mängden $a \setminus \{O\}$ med två ekvivalensklasser.
- (ii) Relationen ssa är en ekvivalensrelation på mängden $\mathcal{P} \setminus a$ av alla punkter utanför linjen a med två ekvivalensklasser.

Bevis. Reflexiviteten hos de två relationerna följer direkt ur deras definitioner.

För att visa transitiviteten hos ssO antar vi att $A ssO C$ och $B ssO C$ och skall visa att detta medför att $A ssO B$. Om $A = B$, $B = C$ eller $A = C$ är saken klar, så antag därför att de tre punkterna är skilda. Ur sats 2.3.1 följer omedelbart att en punkt på a som inte är ändpunkt till någon av sträckorna AB , BC och AC antingen tillhör två eller ingen av de tre sträckorna. Enligt vårt antagande gäller $O \notin AC$ och $O \notin BC$, så därför följer också $O \notin AB$, dvs $A ssO B$.

Transitiviteten hos ssa visas analogt med hjälp av axiom O5 ifall de tre inblandade punkterna A , B och C bildar en triangel, och med hjälp av sats 2.3.1 ifall de ligger i linje.

Vi visar nu att ssO har två ekvivalensklasser. Välj först en punkt $P \neq O$ på linjen a och därefter (med hänvisning till axiom O4) en punkt Q på linjen så att $P - O - Q$, dvs så att P och Q ej ligger på samma sida om O . Sätt

$$a_1 = \{X \in a \setminus \{O\} \mid X ssO P\} \quad \text{och} \quad a_2 = \{X \in a \setminus \{O\} \mid X ssO Q\}.$$

Tydligt gäller att $P \in a_1$ och $Q \in a_2$, så det båda delmängderna a_1 och a_2 är icke-tomma.

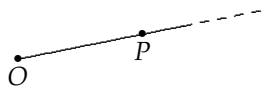
Om X är en godtycklig punkt på a , skild från O , P och Q , så är de fyra punkterna på grund av sats 2.3.3 och axiom O3 ordnade enligt precis ett av följande fyra alternativ: $X - P - O - Q$, $P - X - O - Q$, $P - O - X - Q$ och $P - O - Q - X$. Detta visar att X tillhör precis en av mängderna a_1 och a_2 , dvs $a_1 \cap a_2 = \emptyset$ och $a_1 \cup a_2 = a \setminus \{O\}$.

Analogt visas att ssa har två ekvivalensklasser. □

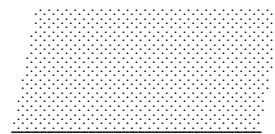
De två ekvivalensklasserna till ssO kallas *strålar* eller *halvlinjer* från O . Varje punkt O på en linje a delar med andra ord linjen i två strålar. Dessa båda strålar säges vara *motsatta*. Punkten O kallas strålarnas *ändpunkt*. Linjen a kallas *stömlinje* till strålarna; vi säger också att strålarna ligger *utefter* linjen.

Strålar kommer ofta att betecknas med bokstäverna r , s och t . Den till en stråle r motsatta strålen betecknas $-r$.

Låt O och P vara två punkter; den stråle från O utefter linjen \overline{OP} som innehåller punkten P , betecknas \overrightarrow{OP} .



Figur 2.14 Strålen \overrightarrow{OP}



Figur 2.15 Halvplan

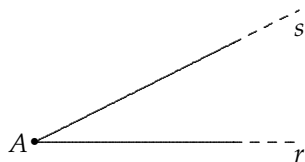
De två ekvivalensklasserna till ssa kallas *halvplan* eller *sidor* till linjen a , och linjen a kallas halvplanens *rand*. Varje linje a är med andra ord rande till två *motsatta* halvplan, som vi ibland betecknar a_+ och a_- .

De båda sidorna till stömlinjen för en sträcka eller en stråle kallas också för *sträckans* resp. *strålens* *sidor*.

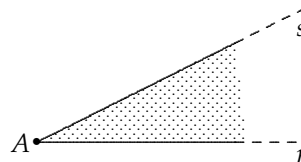
Låt r och s vara två strålar från samma punkt A men med *skilda* stömlinjer. Det oordnade paret $\{r, s\}$ kallas en *vinkel* och betecknas $\angle(r, s)$ eller $\angle(s, r)$. Punkten A är

vinkelns *spets*, r och s är dess *ben*. Spetsen bildar tillsammans med alla punkter på vinkelns ben en mängd, som vi kallar vinkelns *rand*.

Om $B \in r$ och $C \in s$, använder vi också beteckningen $\angle BAC$ eller $\angle CAB$ för vinkeln $\angle(r, s)$.



Figur 2.16 $\angle(r, s)$

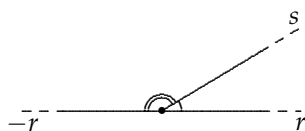


Figur 2.17 Det inre av $\angle(r, s)$

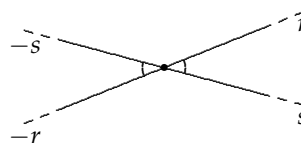
Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel, och betrakta den sida av r som innehåller s samt den sida av s som innehåller r . Snittet av dessa båda halvplan bildar en mängd som kallas *det inre av vinkeln* $\angle(r, s)$. Mängden av alla punkter i planet som inte tillhör vinkelns inre eller rand, kallas *det yttre av vinkeln*.

Låt r och s vara två strålar med olika stömlinjer från en punkt A . Strålen t från A säges *ligga mellan* strålarna r och s om t ligger i det inre av vinkeln $\angle(r, s)$.

De båda vinklarna $\angle(-r, s)$ och $\angle(r, -s)$ kallas *sidovinklar* eller *supplementvinklar* till vinkeln $\angle(r, s)$. Vinklarna $\angle(r, s)$ och $\angle(-r, -s)$ säges vara *vertikalvinklar* till varandra.

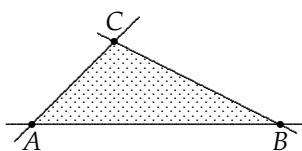


Figur 2.18 Sidovinklar



Figur 2.19 Vertikalvinklar

Betrakta en triangel $\triangle ABC$. Vinklarna $\angle CAB$, $\angle ABC$ och $\angle BCA$ kallas triangelns (*inre*) *vinklar* och betecknas kortare $\angle A$, $\angle B$ resp. $\angle C$. Sidovinklarna till $\angle A$ kallas triangelns *yttrevinklar* vid hörnet A . Med *det inre av* $\triangle ABC$ menas snittet av de tre halvplan som har triangelns sidolinjer som sina ränder och som innehåller de motsatta hörnen. Ekvivalent kan vi säga att det inre av $\triangle ABC$ är snittet av de tre triangelvinklarnas inre.



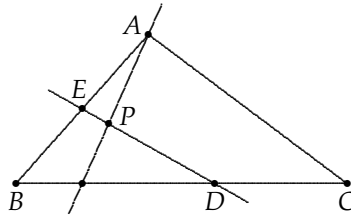
Figur 2.20
Det inre av $\triangle ABC$

En punktmängd Ω kallas *konvex* om varje sträcka, vars ändpunkter tillhör Ω , ligger helt i Ω , dvs om $A, B \in \Omega$ medför att $AB \subseteq \Omega$.

Det är uppenbart att snittet av konvexa mängder är konvext. Sträckor, strålar, linjer, halvplan och det inre av vinklar och trianglar är konvexa mängder.

Vi skall nu bevisa två resultat om linjer genom inre punkter i en triangel.

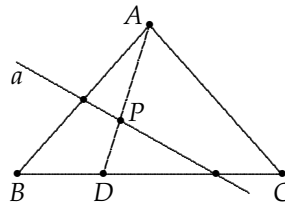
Sats 2.4.2 Om P är en punkt i det inre av $\triangle ABC$, så skär linjen \overline{AP} sidan BC .



Figur 2.21

Bevis. Låt D vara en punkt på sidan BC och betrakta linjen $a = \overline{DP}$. Om A ligger på a , så är $a = \overline{AP}$, dvs linjen \overline{AP} skär sidan BC i D . Om A inte ligger på a , så måste enligt axiom O5 tillämpat på $\triangle ABC$ linjen a skära AB eller AC i en punkt E . Vi kan utan inskränkning anta att $E \in AB$. Eftersom P är en inre punkt i triangeln, ligger P mellan E och D , och det följer nu ur axiom O5 tillämpat på $\triangle BED$ att \overline{AP} skär BD och därmed också BC . \square

Sats 2.4.3 Om P är en punkt i det inre av $\triangle ABC$ och a är en linje genom P , så går a antingen genom ett hörn i triangeln och en punkt på den motsatta sidan eller också skär a två triangelsidor.



Figur 2.22

Bevis. Om a passerar genom ett hörn, så skär a också den motsatta sidan enligt föregående sats. Antag därför att a inte passerar genom något av triangelns hörn. Linjen \overline{AP} skär enligt föregående sats sidan BC i en punkt D , och P ligger mellan A och D . Axiom O5 tillämpat på de båda triangelarna $\triangle ABD$ och $\triangle ADC$ visar att a skär AB eller BD och AC eller DC . Då det är uteslutet att a skär både BD och DC , följer det att a skär exakt två av de tre sidorna AB , BC och AC . \square

ÖVNINGAR

2.9 Bevisa att halvplan är konvexa mängder.

2.10 Bevisa att strålar är konvexa mängder.

2.11 Strålen r utgår från en punkt på linjen a och har ej a som sin stödlinje. Visa att strålen ligger helt på en sida av linjen a .

2.12 Visa att i den Cartesianska modellen har strålar och halvplan formen

$$\{(x, y) \mid x = x_0 + \alpha t, y = y_0 + \beta t, t > 0\} \quad \text{resp.}$$

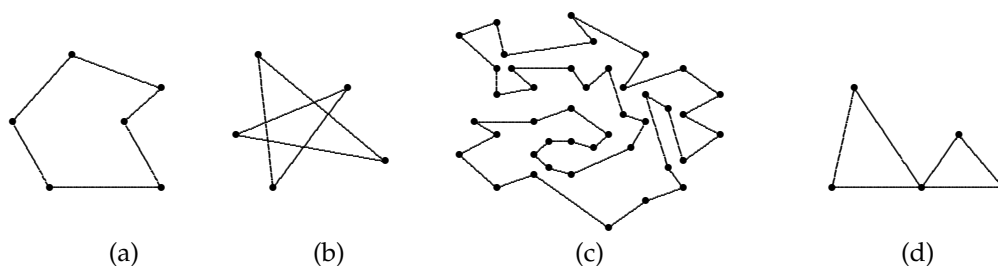
$$\{(x, y) \mid \alpha x + \beta y + \gamma > 0\},$$

där α, β, γ är reella tal och $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

2.13 Utför beviset för sats 2.4.1 (ii).

2.5 Polygoner

I det här avsnittet skall vi studera plana polygoner, dvs figurer av nedanstående slag.



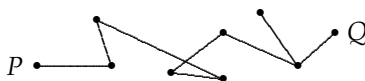
Figur 2.23

Vi börjar med ett antal definitioner.

Låt P och Q vara två punkter. Punktmängden $[PQ] = PQ \cup \{P, Q\}$ kallas den *slutna sträckan* mellan P och Q ; den slutna sträckan består alltså av sträckan PQ och de båda ändpunkterna.

Låt P_0, P_1, \dots, P_n vara en följd av punkter, och antag att $P_i \neq P_{i-1}$ för $i = 1, 2, \dots, n$. Den ordnade n -tipeln $\omega = (P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n)$ av konsekutiva sträckor $P_{i-1}P_i$ kallas ett *sträcktåg* mellan punkterna P_0 och P_n . Vi kommer att använda beteckningen $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ för detta sträcktåg. Punkterna P_0, P_1, \dots, P_n kallas för sträcktågets *hörn*, och sträckorna $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ kallas dess *sidor*.

Vi säger att ett sträcktåg ω *skär* en mängd Ω om något av sträcktågets hörn eller om någon punkt på sträcktågets sidor ligger i Ω , och vi säger att ω *ligger i* Ω (eller är ett sträcktåg *i* Ω) om alla hörn och alla punkter på sträcktågets sidor ligger i Ω .



Figur 2.24

Sträcktåg mellan P och Q med 10 hörn och 9 sidor. (Två hörn sammanfaller.)

Ett sträcktåg $\langle A_1, A_2, \dots, A_n, A_1 \rangle$, som startar och slutar i samma punkt A_1 , kallas en *polygon* med *hörn* A_1, A_2, \dots, A_n och *sidor* $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ och betecknas $A_1A_2 \dots A_n$, om följande två villkor är uppfyllda:

- (i) $n \geq 3$
- (ii) Snittet mellan två olika sidor är antingen tomt eller en punkt (dvs. aldrig en sträcka).

Villkor (ii) utesluter exempelvis ABC från att vara en polygon om de tre ingående punkterna ligger i linje.

Den punktmängd, som bildas av hörnen och sidorna i en polygon π , kallas polygonens *rand* och betecknas $\partial\pi$.

För hörnen i en polygon $A_1A_2\dots A_n$ med n hörn använder vi ibland numreringskonventionen $A_{-1} = A_n$ och $A_{n+1} = A_1$. Detta gör att vi exempelvis kan säga att polygonens sidor är A_iA_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Vårt huvudintresse kommer att riktas mot en mer restriktiv klass av polygoner. En polygon $\pi = A_1A_2\dots A_n$ kallas en *enkel polygon* om följande villkor är uppfyllda:

- (i) de n stycken hörnen A_1, A_2, \dots, A_n är skilda;
- (ii) inget hörn ligger på någon av de n sidorna $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$;
- (iii) ingen sida skär någon annan sida.

Vår definition av enkel polygon är mer generös än vad som är brukligt, eftersom den tillåter ett hörn A_i att ligga på sträckan $A_{i-1}A_{i+1}$ mellan det närmast föregående och det närmast efterkommande hörnet. Låt oss kalla ett sådant hörn för ett *rakt hörn*. Det är harmlöst att tillåta raka hörn och förenklar formuleringarna i några av de kommande bevisen. Normalt sett stryker man förstås raka hörn A_i från polygonen genom att ersätta de båda sidorna $A_{i-1}A_i$ och A_iA_{i+1} med sidan $A_{i-1}A_{i+1}$; detta ger upphov till en ny enkel polygon med samma rand men med ett hörn och en sida mindre.

Enkla polygoner med n icke-raka hörn kallas också *månghörningar* (n -hörningar). En polygon med tre hörn är automatiskt enkel och detsamma som en triangel, och ABC betecknar samma sak som $\triangle ABC$.

Av figurerna i fig. 2.23 är (a) och (c) enkla polygoner. Figurerna (b) och (d) är polygoner, men de är inte enkla polygoner – (b) beroende på att den har sidor som skär varandra, (d) beroende på att ett av hörnen ligger på en sida (alternativt att två av hörnen sammanfaller.)

Huvudresultatet i det här avsnittet är att varje enkel polygon delar resten av planet i två sammanhängande områden, ett inre och ett yttre. Det inre området kan delas upp i trianglar, vars hörn är hörn i polygonen. Vi skall därför börja med att definiera begreppet "sammanhängande" mängd ordentligt.

En punktmängd Ω kallas *sammanhängande* om det för varje par av skilda punkter P och Q i Ω finns ett sträcktåg i Ω mellan P och Q .

Exempelvis är alla konvexa mängder sammanhängande, ty två punkter i en sådan mängd kan per definition förbindas med en enda sluten sträcka.

Låt nu Ω vara en godtycklig punktmängd. Vi definierar en binär relation \sim_Ω på Ω genom att sätta

$$P \sim_\Omega Q \Leftrightarrow \begin{cases} P = Q, & \text{eller} \\ P \neq Q \text{ och det finns ett sträcktåg i } \Omega \text{ mellan } P \text{ och } Q. \end{cases}$$

Sats 2.5.1 (i) \sim_Ω är en ekvivalensrelation på Ω .

(ii) Ekvivalensklasserna till \sim_Ω är sammanhängande.

(iii) Om Ω_1 och Ω_2 är sammanhängande och $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, så är även $\Omega_1 \cup \Omega_2$ sammanhängande.

Bevis. (i) Reflexiviteten är trivial. För att visa transitiviteten räcker det att betrakta det fall då P, Q och R är tre skilda punkter. Antag att $P \sim_\Omega R$ och $Q \sim_\Omega R$, dvs att det finns sträcktåg $\omega_1 = \langle P, P_1, \dots, P_{n-1}, R \rangle$ och $\omega_2 = \langle Q, Q_1, \dots, Q_{m-1}, R \rangle$ i Ω mellan P och R resp. mellan Q och R . Då är $\langle P, P_1, \dots, P_{n-1}, R, Q_{m-1}, \dots, Q_1, Q \rangle$ ett sträcktåg i Ω mellan P och Q , dvs $P \sim_\Omega Q$. Detta visar att \sim_Ω är transitiv.

(ii) Låt Ω_0 vara en ekvivalensklass till \sim_Ω , och låt P och Q vara två godtyckliga punkter i Ω_0 . Då finns det per definition ett sträcktåg ω i Ω mellan P och Q . Sträcktaget

ω måste emellertid ligga helt i Ω_0 . Ty antag att $X \in \omega$; då är en lämplig del av ω ett sträcktag i Ω mellan P och X , vilket innebär att $X \sim_{\Omega} P$, dvs att $X \in \Omega_0$. Mängden Ω_0 är således sammanhängande.

(iii) Låt $P_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Varje $P \in \Omega_i$ ($i = 1$ eller 2) kan förbindas med P_0 med hjälp av ett sträcktag i Ω_i . Speciellt kan alltså varje punkt $P \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ förbindas med P_0 med hjälp av ett sträcktag i $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Transitiviteten hos $\sim_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ medför därför att $\Omega_1 \cup \Omega_2$ är sammanhängande. \square

Ekvivalensklasserna till \sim_{Ω} kallas för Ω :s *komponenter*. Tydligt är Ω sammanhängande om och endast om Ω endast har en komponent.

För att förenkla vårt språkbruk kommer vi att tala om *komponenterna* till en polygon π och menar då alltid komponenterna till komplementet av polygonens rand, dvs komponenterna till punktmängden $\mathcal{P} \setminus \partial\pi$.

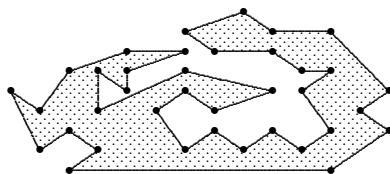
I figur 2.23 har polygonerna i (a), (b), (c) och (d) två, sju, två resp. tre komponenter.

Vi kan nu ge en precis formulering av det här avsnittets huvudresultat.

Sats 2.5.2 *Varje enkel polygon har exakt två komponenter. Den ena komponenten innehåller inte några linjer, medan den andra komponenten innehåller linjer.*

Den komponent till den enkla polygonen π som inte innehåller några linjer kallas för det *inre* av π och betecknas $\text{inre}(\pi)$, medan den andra komponenten kallas det *yttre* av π och betecknas $\text{yttre}(\pi)$. Om en punkt P tillhör det inre (resp. det yttre) säger vi också att P ligger *innanför* (resp. *utanför*) polygonen.

Sats 2.5.2 innebär att varje enkel polygon delar planet i tre parvis disjunkta mängder: det inre, randen och det yttre.



Figur 2.25

En enkel polygon har två komponenter. Den inre är här skuggad.

Eftersom trianglar är enkla polygoner har vi nu två olika definitioner av begreppen inre och yttre för trianglar, nämligen dels den gamla definitionen från avsnitt 2.4, dels den nya definitionen ovan. De båda definitionerna är förstås konsistenta.

För att kunna bevisa sats 2.5.2 behöver vi ett antal hjälpsatser av kombinatorisk natur. Även om hjälpsatserna var för sig är tämligen enkla bildar de tillsammans ett ganska långt och komplicerat bevis för sats 2.5.2, så för att inte skymma sikten har vi hänskjutit bevisen för några av dem till ett appendix i slutet av det här kompendiet.

Den första hjälpsatsen har ett visst egenintresse; för att kunna formulera den behöver vi ytterligare en definition:

Låt Ω vara en punktmängd. En punkt P_0 i Ω kallas *exponerad* (med avseende på Ω), om det finns en vinkel med spets i P_0 som innehåller mängden $\Omega \setminus \{P_0\}$ i sitt inre.

Sats 2.5.3 (i) Varje ändlig punktmängd har en exponerad punkt.

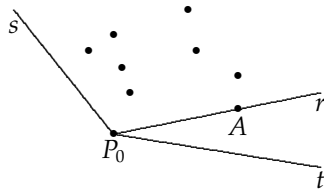
(ii) Varje ändlig punktmängd ligger i något halvplan.

(iii) Varje polygon har ett hörn som är exponerat med avseende på polygonens rand.

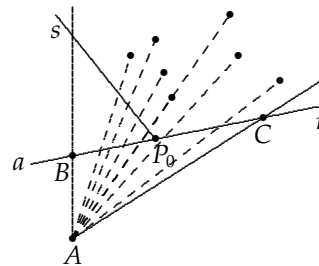
(iv) Givet ändligt många polygoner finns det ett halvplan som innehåller samtliga dessa polygoners ränder.

Bevis. (i) Vi visar påståendet med hjälp av induktion över antalet punkter i mängden. Om mängden bara består av en punkt, så är denna punkt givetvis exponerad. Antag därför att vi har visat påståendet för alla mängder med n punkter, och låt Ω vara en mängd med $n + 1$ punkter. Låt A vara en godtycklig punkt i Ω och sätt $\Omega' = \Omega \setminus \{A\}$. Då har Ω' enligt induktionsantagandet en exponerad punkt P_0 , dvs det finns en vinkel $\angle(r, s)$ med spets i P_0 så att $\Omega' \setminus \{P_0\}$ ligger i det inre av vinkeln.

Om nu A ligger i det inre av vinkeln, så är P_0 exponerad också med avseende på Ω . Om A ligger på något av vinkelbenen, r säg, och om t är en godtycklig stråle från P_0 mellan r och $-s$, så ligger $\Omega \setminus \{P_0\}$ i det inre av $\angle(s, t)$ (jmf fig. 2.26). Punkten P_0 är således exponerad med avseende på Ω även i detta fall.



Figur 2.26



Figur 2.27

Antag slutligen att A ligger i det yttre av vinkeln $\angle(r, s)$ (jmf fig. 2.27). Då ligger $\Omega' \setminus \{P_0\}$ och A på olika sidor om åtminstone ett av vinkelbenen; låt a vara detta vinkelbens stödlinje. Betrakta de n strålarna \overrightarrow{AP} , $P \in \Omega'$; varje stråle skär a i en punkt. Låt B och C vara två punkter på a så att de högst n stycken skärningspunkterna ligger mellan B och C . Då ligger strålarna \overrightarrow{AP} för alla $P \in \Omega'$ i det inre av vinkeln $\angle BAC$. Detta innebär att $\Omega' = \Omega \setminus \{A\}$ ligger i det inre av $\angle BAC$, dvs A är exponerad med avseende på Ω .

Ω har således i varje fall en exponerad punkt, och därmed är induktionssteget klart, och påstående (i) är bevisat.

(ii) Enligt (i) har varje ändlig mängd Ω en exponerad punkt P_0 . Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel med spets i P_0 som innehåller $\Omega \setminus \{P_0\}$ i sitt inre, och låt R och S vara godtyckliga punkter på $-r$ resp. $-s$. Då ligger Ω på en sida om linjen \overline{RS} , dvs Ω ligger i ett halvplan.

(iii) följer omedelbart ur (i), ty om ett hörn är exponerat med avseende på mängden av alla hörn i en polygon, så är hörnet också exponerat med avseende på polygonens rand.

(iv) följer ur (ii), ty om ett halvplan innehåller polygonernas hörn, så innehåller det också polygonernas ränder. \square

Låt π vara en godtycklig polygon. Vi kallar en linje eller stråle som inte passerar genom något hörn i polygonen *hygglig* (med avseende på π). Ett sträcktag $\omega = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ kallas *hyggligt* med avseende på polygonen π om samtliga stödlinjer $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, till sträckorna i sträcktaget är hyggliga med avseende på π .

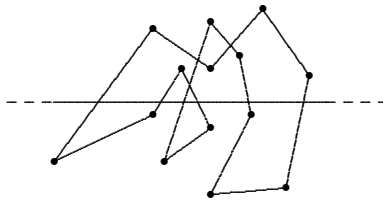
Två punkter i en polygons komponent kan per definition sammanbindas med ett sträcktåg som inte skär polygonen. Genom att vid behov modifiera sträcktåget en smula kan man alltid åstadkomma att det förbindande sträcktåget är hyggligt. Detta är innebörden av följand lemma.

Lemma 2.5.1 Låt π vara en godtycklig polygon, och antag att punkterna P och Q ligger i samma komponent Ω till π . Då finns det ett hyggligt sträcktåg i Ω mellan P och Q .

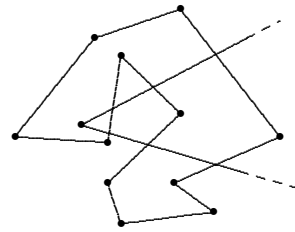
Bevis. Se appendix.

Lemma 2.5.2 Låt $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ vara en godtycklig polygon.

- (i) Varje hygglig linje a skär ett jämnt antal (eventuellt noll) av polygonens sidor.
(ii) Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel, vars ben är hyggliga och vars spets inte ligger på polygonranden $\partial\pi$. Då skär vinkelbenen ett jämnt antal (eventuellt noll) polygonsidor.



Figur 2.28



Figur 2.29

Bevis. (i) Kalla sidorna av a för a_+ och a_- , och sätt för $i = 1, 2, \dots, n$

$$f(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{om } A_i \in a_+ \\ 0 & \text{om } A_i \in a_- \end{cases}$$

Linjen a skär sidan A_iA_{i+1} om och endast om $f(A_{i+1}) - f(A_i) = \pm 1$. Antalet sidor i polygonen π som skärs av linjen a är därför lika med antalet ± 1 -termer i summan

$$(1) \quad S = \sum_{i=1}^n (f(A_{i+1}) - f(A_i)).$$

Eftersom övriga termer är 0 och

$$S = \sum_{i=1}^n f(A_{i+1}) - \sum_{i=1}^n f(A_i) = 0,$$

måste summan (1) innehålla lika många termer $+1$ som -1 , dvs totala antalet ± 1 -termer är jämnt.

(ii) Låt N_1 vara antalet sidor som skär båda vinkelbenen, och N_2 antalet sidor som skär exakt ett vinkelben. Antalet sidor som skärs av något vinkelben är då lika med $2N_1 + N_2$, så det räcker att visa att talet N_2 är jämnt. Detta följer emellertid på liknande sätt som i (i) om vi definierar

$$f(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{om } A_i \text{ är en inre punkt i } \angle(r, s) \\ 0 & \text{om } A_i \text{ är en yttre punkt till vinkeln,} \end{cases}$$

ty en sida A_iA_{i+1} skär exakt ett vinkelben om och endast om precis en av de båda punkterna A_i och A_{i+1} är en inre punkt i vinkeln. \square

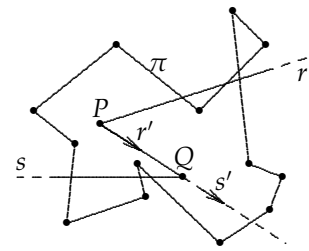
Lemma 2.5.3 Låt π vara en godtycklig polygon, låt P och Q vara punkter i samma komponent till polygonen, och låt r och s vara hyggliga strålar från P resp. Q . Då har antalet sidor i π som skärs av vinkelbenet r samma paritet som antalet sidor som skärs av vinkelbenet s (dvs antingen är båda antalen jämna eller båda antalen udda).

Bevis. Låt $N(x)$ beteckna antalet polygonsidor som skärs av strålen x . Vi observerar först att $N(r)$ och $N(s)$ har samma paritet om och endast om talet $N(r) + N(s)$ är jämnt. För att visa lemmat betraktar vi nu ett antal fall.

Fall 1. Antag först att $P = Q$. Om $r = s$, så är trivialt $N(r) = N(s)$. Om $r = -s$, så är $N(r) + N(s)$ jämnt på grund av lemma 2.5.2 (i), och om $r \neq \pm s$, så följer samma slutsats av lemma 2.5.2 (ii).

Fall 2. Antag härnäst att $P \neq Q$, att sträckan PQ inte skär randen $\partial\pi$, samt att linjen \overline{PQ} är hygglig. Sätt $r' = \overrightarrow{PQ}$ och $s' = -\overrightarrow{QP}$; då är $r' = s' \cup PQ \cup \{Q\}$, varför $N(r') = N(s')$. Enligt fall (a) har $N(r)$ och $N(r')$ samma paritet liksom $N(s)$ och $N(s')$. Följaktligen har $N(r)$ och $N(s)$ samma paritet.

Fall 3. Låt slutligen P och Q vara två godtyckliga punkter i samma komponent. Enligt lemma 2.5.1 finns det ett hyggligt sträcktag $\langle P, P_1, \dots, P_{n-1}, Q \rangle$ mellan P och Q , vilket helt ligger i komponenten. Låt r_1, r_2, \dots, r_{n-1} vara godtyckliga hyggliga strålar från respektive P_1, P_2, \dots, P_{n-1} . Enligt (b) har $N(r)$ och $N(r_1)$, $N(r_1)$ och $N(r_2)$, osv samma paritet, dvs $N(r)$ har samma paritet som $N(s)$. \square



Figur 2.30

Lemma 2.5.4 Låt P och Q vara två punkter som inte tillhör randen av den enkla polygonen $\pi = A_1A_2 \dots A_n$, och antag att sträckan PQ skär randen i exakt en punkt A . Om $A = A_i$ är ett hörn, som inte är rakt, antar vi dessutom att punkten P ligger i det inre av vinkeln $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Då tillhör P och Q olika komponenter av π .

Bevis. Se appendix.

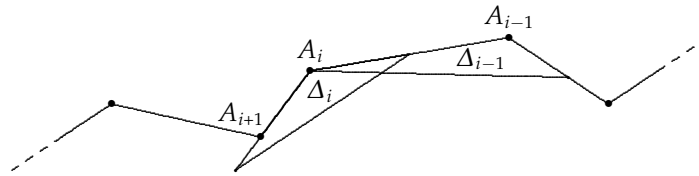
Lemma 2.5.5 Antag att A är en punkt på randen $\partial\pi$ av den enkla polygonen $\pi = A_1A_2 \dots A_n$. Då finns det två punkter P och Q så att A ligger på sträckan PQ och så att sträckan PQ bara skär randen $\partial\pi$ i punkten A . Om $A = A_i$ är ett hörn, som inte är rakt, kan vi dessutom välja punkten P i det inre av vinkeln $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

Bevis. Låt a vara en godtycklig linje genom A som inte sammanfaller med någon av stödlinjerna till polygonens sidor, och som dessutom går genom det inre av vinkeln $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ i det fall då $A = A_i$ är ett icke-rakt hörn. Eftersom a skär polygonens sidor i högst ändligt många punkter, finns det två punkter P och Q på a , en på vardera sidan om A , så att $PQ \cap \partial\pi = \{A\}$. \square

Punkterna P och Q i lemma 2.5.5 ligger på grund av föregående lemma i olika komponenter till π . Följaktligen har en enkel polygon minst två komponenter. För att visa att antalet komponenter är exakt två behöver vi införa ytterligare ett begrepp.

Antag att $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ är en polygon. En följd $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ av trianglar kallas en *triangelkedja* runt π om

- (α) $\text{inre}(\Delta_i) \cap \partial\pi = \emptyset$ för $1 \leq i \leq n$,
- (β) $\text{inre}(\Delta_{i-1}) \cap \text{inre}(\Delta_i) \neq \emptyset$ för $2 \leq i \leq n$; och
- (γ) A_iA_{i+1} är en sida eller en del av en sida i triangeln Δ_i för $1 \leq i \leq n$.



Figur 2.31

Two triangles Δ_{i-1} and Δ_i in a triangle chain

Om $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ är en triangelkedja runt π så är mängden

$$M = \bigcup_{i=1}^n \text{inre}(\Delta_i)$$

sammanhängande på grund av (iii) i sats 2.5.1. Det följer vidare av villkoret (α) ovan, att mängden M inte skär polygonranden. M är därför en delmängd av någon komponent till π .

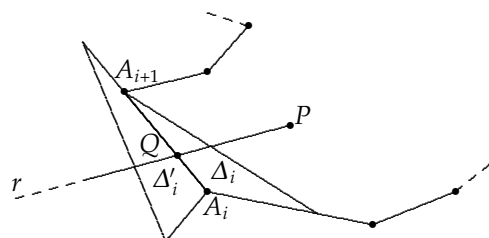
Lemma 2.5.6 Låt $\pi = A_1 A_2 \dots A_n$ vara en enkel polygon. Då finns det två triangelkedjor $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ och $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ runt π så att det inre av Δ_i och det inre av Δ'_i ligger på olika sidor om $A_i A_{i+1}$ för varje i . De båda mängderna $M = \bigcup_{i=1}^n \text{inre}(\Delta_i)$ och $M' = \bigcup_{i=1}^n \text{inre}(\Delta'_i)$ är disjunkta och ligger i olika komponenter till π .

Bevis. Se appendix.

Bevis för sats 2.5.2

Antag att π är en enkel polygon. Definiera mängderna M och M' som i lemma 2.5.6 med hjälp av två triangelkedjor $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ och $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ runt π . Låt Ω_1 och Ω_2 beteckna de två olika komponenterna till polygonen π som innehåller M resp. M' . Vi skall visa att det inte finns några andra komponenter genom att visa att varje punkt P i komplementet till randen $\partial\pi$ antingen tillhör Ω_1 eller Ω_2 .

Låt därför r vara en hygglig stråle från P som skär polygonranden $\partial\pi$. Det finns en första skärningspunkt från P räknat, dvs en punkt $Q \in r \cap \partial\pi$ så att sträckan PQ inte innehåller några randpunkter. Om Q ligger på sidan $A_i A_{i+1}$ så skär PQ en av mängderna $\text{inre}(\Delta_i)$ och $\text{inre}(\Delta'_i)$, eftersom dessa ligger på olika sidor om $A_i A_{i+1}$. Sträckan PQ skär därför den ena av komponenterna Ω_1 och Ω_2 , vilket innebär att P tillhör en av dessa komponenter.



Figur 2.32

På grund av lemma 2.5.3 kan de två komponenterna numreras så att

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{P \in \Omega \mid \text{Varje hygglig stråle från } P \text{ skär } \partial\pi \text{ ett udda antal gånger}\}, \\ \Omega_2 &= \{P \in \Omega \mid \text{Varje hygglig stråle från } P \text{ skär } \partial\pi \text{ ett jämnt antal gånger}\}.\end{aligned}$$

Om $P \in \Omega_1$ så skär därför varje stråle från P , hygglig eller ej, randen $\partial\pi$ minst en gång, och varje linje genom P skär randen i minst två punkter. Det följer speciellt att Ω_1 inte innehåller några linjer. Komponenten Ω_1 är det inre av π .

Enligt sats 2.5.3 finns det en linje a så att $\partial\pi$ ligger i ett av de halvplan som definieras av a . Detta innebär speciellt att linjen a inte skär $\partial\pi$, så linjen kan därför inte tillhöra Ω_1 utan måste ligga i Ω_2 . Detta visar att komponenten Ω_2 innehåller en linje. Ω_2 är det yttre av π . \square

Anm. Givet ändligt många enkla polygoner finns det på grund av sats 2.5.3 (iv) ett halvplan som ligger i samtliga polygoners yttre. Speciellt finns det alltså en punkt som ligger utanför alla polygonerna.

Vi skall nu angripa problemet att visa att varje enkel polygon kan sönderdelas i trianglar vars hörn är hörn i polygonen.

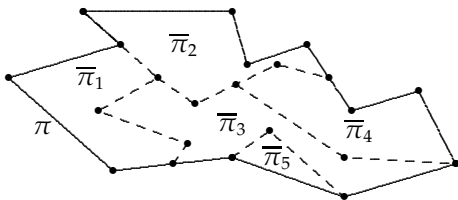
Om π är en enkel polygon sätter vi först

$$\bar{\pi} = \partial\pi \cup \text{inre}(\pi)$$

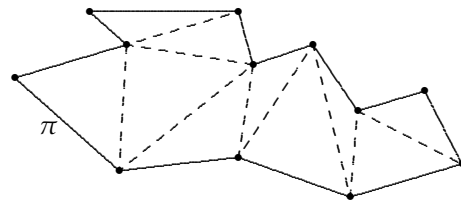
och kallar $\bar{\pi}$ ett *slutet polygonområde*.

Polygonerna $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ säges *sönderdela* den enkla polygonen π , och vi skriver $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n$, om (jmf fig. 2.33)

- polygonerna π_j alla är enkla,
- $\bar{\pi} = \bigcup_{j=1}^n \bar{\pi}_j$,
- $\text{inre}(\pi_i) \cap \text{inre}(\pi_j) = \emptyset$ för alla $i \neq j$.



Figur 2.33
Sönderdelning



Figur 2.34
Sönderdelning i trianglar

Lemma 2.5.7 Antag att $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ är en sönderdelning av den enkla polygonen π . Då gäller

- $\text{inre}(\pi_j) \subseteq \text{inre}(\pi)$, $j = 1, 2, \dots, n$; och
- $\partial\pi \subseteq \bigcup_{j=1}^n \partial\pi_j$.

Bevis. För att visa båda påståendena räcker det på grund av (b) i definitionen av sönderdelning att visa att $\partial\pi \cap \text{inre}(\pi_j) = \emptyset$ för alla j .

Antag därför att $X \in \partial\pi$. Enligt lemma 2.5.5 och 2.5.4 finns det punkter P och Q , så att $PQ \cap \partial\pi = \{X\}$ och så att en av de båda punkterna, P säg, ligger i det yttre av π . Men då ligger också hela sträckan PX utanför π . På grund av villkoret (b) ligger PX utanför π_j för alla j . Punkten X kan därför inte tillhöra det inre av π_j för något j . Detta visar att $\partial\pi \cap \text{inre}(\pi_j) = \emptyset$. \square

Lemma 2.5.8 Antag att $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ är en sönderdelning av den enkla polygonen π och att $(\pi_{jk})_{k=1}^{n_j}$ är en sönderdelning av π_j för varje j . Då är $\{\pi_{jk} \mid k = 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ en sönderdelning av π .

Bevis. Enligt villkoret (b) i sönderdelningsdefinitionen gäller

$$\overline{\pi} = \bigcup_j \overline{\pi_j} = \bigcup_j \bigcup_k \overline{\pi_{jk}}.$$

Villkor (c) och lemma 2.5.7 (i) ger vidare:

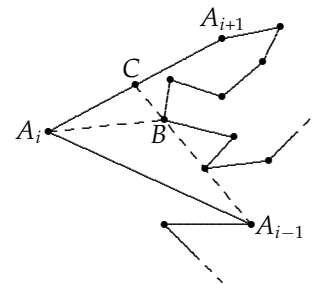
$$\begin{aligned} \text{inre}(\pi_{ik}) \cap \text{inre}(\pi_{j\ell}) &\subseteq \text{inre}(\pi_i) \cap \text{inre}(\pi_j) = \emptyset \quad \text{om } i \neq j; \\ \text{inre}(\pi_{ik}) \cap \text{inre}(\pi_{i\ell}) &= \emptyset \quad \text{om } k \neq \ell. \end{aligned} \quad \square$$

Om π är en enkel polygon och A och B är två hörn som inte är ändpunkter till en gemensam sida, kallas sträckan AB en *diagonal* i polygonen. Om dessutom sträckan AB ligger i det inre av π , kallas AB en *inre diagonal*.

Lemma 2.5.9 Varje enkel polygon med mer än tre hörn har en inre diagonal.

Bevis. Låt $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ vara en enkel polygon med $n \geq 4$. Enligt sats 2.5.3 har π ett exponerat hörn A_i . Definitionen av exponerat hörn medför att det inre av vertikalvinkeln till $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ ligger helt i det yttre av π . Om P är en punkt i det inre av $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ och om $\{P\} \cup PA_i$ inte skär $\partial\pi$, så ligger därför P och hela sträckan PA_i i det inre av π (på grund av lemma 2.5.4).

Vi har därför följande två alternativ. Antingen ligger sträckan $A_{i-1}A_{i+1}$ i det inre av π eller också finns det minst ett polygonhörn på $A_{i-1}A_{i+1}$ eller i det inre av $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. I det första fallet är förstas $A_{i-1}A_{i+1}$ en inre diagonal, och i det andra fallet finns det en punkt C på $A_iA_{i+1} \cup \{A_{i+1}\}$ så att sträckan $A_{i-1}C$ innehåller minst ett polygonhörn B och så att det inre av $\triangle A_{i-1}A_iC$ inte innehåller något hörn och därmed inte heller någon punkt från $\partial\pi$. Då är sträckan A_iB en inre diagonal i π , ty den ligger i det inre av vinkeln $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ och skär inte randen $\partial\pi$.



Figur 2.35

□

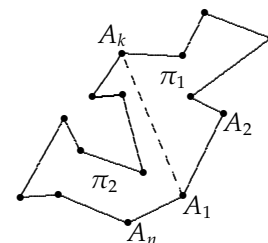
Lemma 2.5.10 Antag att $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ är en enkel polygon och att A_1A_k är en inre diagonal i polygonen. Då är $\pi_1 = A_1A_2 \dots A_k$ och $\pi_2 = A_kA_{k+1} \dots A_nA_1$ två enkla polygoner som sönderdelar π .

Bevis. Det är för det första klart att π_1 och π_2 är två enkla polygoner och att

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial\pi_1 \cup \partial\pi_2 &= \partial\pi \cup A_1A_k \subseteq \overline{\pi}, \quad \text{och} \\ \partial\pi_1 \cap \partial\pi_2 &= [A_1A_k]. \end{aligned}$$

För det andra är

$$(2) \quad \text{inre}(\pi_j) \subseteq \text{inre}(\pi), \quad j = 1, 2.$$



Figur 2.36

För att visa detta räcker det förstås av symmetriskäl att betrakta fallet $j = 1$. Antag därför att $X \in \text{inre}(\pi_1)$ och att $X \notin \text{inre}(\pi)$; vi skall visa att detta leder till en motsägelse. Välj för den skull en punkt O som ligger i det yttre av både π och π_1 och betrakta två fall.

Fall 1: $X \in \text{yttre}(\pi)$. Då finns det ett sträcktåg ω mellan O och X som ligger helt i det yttre av π . Sträcktåget skär därför inte randen $\partial\pi$ och inte heller sträckan A_1A_k . Eftersom randen $\partial\pi_1$ är en delmängd av $\partial\pi \cup AB$, skär ω inte $\partial\pi_1$. Punkterna O och X tillhör följaktligen samma komponent till polygonen π_1 , vilket är en motsägelse.

Fall 2: $X \in \partial(\pi)$. Välj med hjälp av lemma 2.5.5 en punkt P i det yttre av π så att sträckan PX inte skär randen $\partial\pi$, dvs så att PX ligger i det yttre av π . Då finns det ett sträcktåg ω i det yttre av π mellan O och P . Om vi kompletterar detta sträcktåg med sträckan PX får vi ett sträcktåg $\tilde{\omega}$ mellan O och X , som inte skär randen $\partial\pi$ eller sträckan A_1A_k i någon annan punkt än X . Eftersom X inte tillhör randen $\partial\pi_1$ innebär detta att sträcktåget $\tilde{\omega}$ inte skär randen $\partial\pi_1$. Följaktligen tillhör O och X även i detta fall samma komponent till π_1 , vilket är en motsägelse. Därmed är inklusionen (2) visad.

Ur (1) och (2) följer direkt att

$$(3) \quad \text{inre}(\pi_1) \cup \text{inre}(\pi_2) \subseteq \text{inre}(\pi) \setminus A_1A_k.$$

Vi skall nu visa den omvända inklusionen

$$(4) \quad \text{inre}(\pi) \setminus A_1A_k \subseteq \text{inre}(\pi_1) \cup \text{inre}(\pi_2)$$

samt att

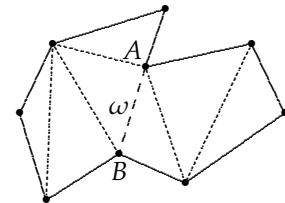
$$(5) \quad \text{inre}(\pi_1) \cap \text{inre}(\pi_2) = \emptyset.$$

För att visa (4) och (5) räcker det på grund av (3) att visa att varje $P \in \text{inre}(\pi) \setminus A_1A_k$ tillhör exakt en av mängderna $\text{inre}(\pi_1)$ och $\text{inre}(\pi_2)$. Låt därför r vara en stråle från P som inte passerar genom något hörn i π . Då är r hygglig med avseende på såväl π_1 som π_2 och π . Enligt lemma 2.5.3 skär r randen $\partial\pi$ i ett udda antal punkter. Strålen r skär därför $\omega_1 = \langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ i ett udda antal punkter och $\omega_2 = \langle A_k, A_{k+1}, \dots, A_n, A_1 \rangle$ i ett jämnt antal punkter, eller vice versa. Det följer att r skär precis en av ränderna $\partial\pi_1$ och $\partial\pi_2$, som ju består av sidorna och punkterna i sträcktågen ω_1 resp. ω_2 vardera kompletterade med sträckan A_1A_k , i ett udda antal punkter, dvs P tillhör precis en av mängderna $\text{inre}(\pi_1)$ och $\text{inre}(\pi_2)$.

(1), (3), (4) och (5) ger tillsammans att π_1 och π_2 är en sönderdelning av π . \square

Sats 2.5.4 Varje enkel polygon π med n hörn har en sönderdelning $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-2}$ bestående av $n - 2$ trianglar, vars hörn är hörn i polygonen.

Bevis. Satsen är trivialt sann för polygoner med 3 hörn. Antag induktivt att $n \geq 4$ och att satsen är sann för alla enkla polygoner med färre än n hörn, och låt π vara en enkel polygon med n hörn. Enligt lemma 2.5.9 har π en inre diagonal. Vi kan därför tillämpa lemma 2.5.10 och får på så sätt en sönderdelning av π i två enkla polygoner π_1 och π_2 med n_1 resp. n_2 hörn. Här är $n_1 < n$, $n_2 < n$, och $n_1 + n_2 = n + 2$.



Figur 2.37

Enligt induktionsantagandet existerar det sönderdelningar (Δ_{1j}) och (Δ_{2j}) av polygonerna π_1 och π_2 i $n_1 - 2$ resp. $n_2 - 2$ stycken deltrianglar, vars hörn är hörn i π_1 resp. π_2 , och tillsammans bildar dessa trianglar enligt lemma 2.5.8 en sönderdelning av π . Totala antalet trianglar i denna sönderdelning är $n_1 - 2 + n_2 - 2 = n - 2$ stycken. Därmed är induktionssteget klart. \square

ÖVNINGAR

- 2.14 Ge exempel på en enkel polygon med en yttre punkt A som har följande egenskap: Varje stråle från A skär polygonens rand.
- 2.15 Visa att om två enkla polygoner har samma inre så har de också samma rand.
- 2.16 En enkel polygon kallas *konvex* om tillslutningen $\overline{\pi}$ är en konvex mängd. Visa att följande tre påståenden är ekvivalenta:
- π är konvex.
 - $\text{inre}(\pi)$ är konvex.
 - För varje sida PQ i polygonen gäller att det inre av π ligger på en sida om motsvarande sidolinje \overline{PQ} .

2.6 Kongruensaxiomen

De begrepp och axiom som vi hittills har studerat, tillåter oss inte att jämföra sträckor eller vinklar med varandra. Vi kan exempelvis inte säga att två sträckor är lika (långa). För att åstadkomma en sådan jämförelse måste vi utvidga vårt geometriska språk, vilket kan ske på flera olika sätt. Ett sätt är att införa ett primitivt *längd*-begrepp. Detta innebär att man associerar ett positivt reellt tal till varje sträcka, och man kan då jämföra sträckor genom att jämföra deras längder, dvs reella tal. Ett annat sätt är att införa (stel) *förflyttning* som primitivt begrepp. Två sträckor är då lika om det finns en förflyttning som överför den ena sträckan på den andra. En tredje möjlighet är förstås att låta likhet vara ett odefinierat primitivt begrepp.

Vi väljer det tredje alternativet, och eftersom vi vill jämföra både sträckor och vinklar, inför vi två primitiva *likhets*- eller *kongruens*begrepp, ett för sträckor och ett för vinklar. Det första primitiva begreppet kongruens är med andra ord en relation på mängden av alla sträckor, och det andra begreppet kongruens är en relation på mängden av alla vinklar. Båda relationerna betecknas \equiv , eftersom det aldrig kan råda någon tvekan om vilken relation som avses i ett givet fall. $AB \equiv CD$ betyder således att sträckorna AB och CD är kongruenta. Inkongruens (dvs icke-kongruens) betecknas $\not\equiv$.

Vi behöver sex axiom för kongruens. De tre första handlar om sträckor.

Axiom K1 Om A och B är två punkter och r' är en stråle från punkten A' , så finns det exakt en punkt B' på r' så att $AB \equiv A'B'$.



Figur 2.38

På varje linje genom A' finns det därför exakt två punkter B' och B'' så att $AB \equiv A'B'$ och $AB \equiv A'B''$, en på vardera sidan om A' .

Axiom K2 Kongruens är en ekvivalensrelation på mängden av alla sträckor, dvs

$$AB \equiv AB, \quad \text{och} \\ AB \equiv EF \ \& \ CD \equiv EF \Rightarrow AB \equiv CD.$$

En enkel konsekvens av axiomen K1 och K2 är att $AC \not\equiv AB$ om $A - C - B$.

Axiom K3 Om $A - C - B$, $A' - C' - B'$, $AC \equiv A'C'$ och $CB \equiv C'B'$, så är $AB \equiv A'B'$.

Axiom K3 kan uppfattas som ett resultat om summan av två sträckor. Motsvarande resultat för skillnader följer som sats (se sats 2.6.2).

Axiomen K1 och K2 har direkta motsvarigheter för vinklar, nämligen

Axiom K4 Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel och låt r' vara en stråle från A' . På vardera sidan om r' finns det exakt en stråle s' från A' så att $\angle(r, s) \equiv \angle(r', s')$.



Figur 2.39

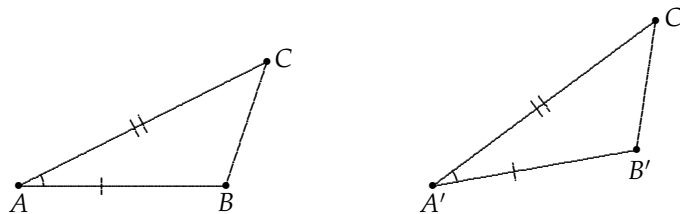
Axiom K5 Kongruens är en ekvivalensrelation på mängden av vinklar.

Däremot behöver vi inget axiom om addition av vinklar i stil med axiom K3, ty motsvarande resultat följer som sats (se sats 2.7.6). Det sista kongruensaxiomet kopplar istället ihop de två kongruensbegreppen.

Axiom K6 Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar med

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{och} \quad \angle A \equiv \angle A'.$$

Då är också $\angle B \equiv \angle B'$ och $\angle C \equiv \angle C'$.



Figur 2.40

Vi avslutar det här avsnittet med två enkla konsekvenser av kongruensaxiomen. Först behöver vi en definition.

Triangeln $\triangle ABC$ kallas *likbent* med sidan BC som *bas* och sidorna AB och AC som *ben* om $AB \equiv AC$. De båda vinklarna $\angle B$ och $\angle C$ kallas triangelns *basvinklar*.

Sats 2.6.1 (Basvinkelsatsen) I en likbent triangel är de båda basvinklarna kongruenta.

Bevis. Låt $\triangle ABC$ vara likbent med BC som bas. Eftersom $AC \equiv AB$ och $\angle A \equiv \angle A$, kan vi tillämpa axiom K6 på de båda trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ACB$ med $\angle B \equiv \angle C$ som slutsats. \square

Nästa sats handlar om skillnader av sträckor.

Sats 2.6.2 Antag $A - C - B$, $C' \in \overrightarrow{A'B'}$, $AB \equiv A'B'$ och $AC \equiv A'C'$. Då gäller att $A' - C' - B'$ och $CB \equiv C'B'$.



Figur 2.41

Bevis. Enligt axiom K1 finns det en unik punkt D' så att $A' - C' - D'$ och $CB \equiv C'D'$. Axiom K3 medför att $AB \equiv A'D'$. Det följer därför ur axiom K2 att $A'B' \equiv A'D'$, och axiom K1 ger slutligen att $D' = B'$. Därmed har vi bevisat det vi skulle. \square

ÖVNINGAR

2.17 (Cartesianska modellen; fortsättning på exempel 7 i avsnitt 2.2 och övning 2.5). \mathbf{R}^2 är ett vektorrum. I vektoralgebran uttrycks längden av vektorer och vinkeln mellan vektorer med hjälp av skalärprodukter. Standardskalärprodukten på \mathbf{R}^2 ges av uttrycket

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Längden av vektorn $v = (x, y)$ är

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

och vinkeln θ mellan vektorerna v_1 och v_2 är

$$\theta = \arccos \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1||v_2|}.$$

I den Cartesianska modellen svarar punkter mot vektorer i \mathbf{R}^2 . Vi kan därför definiera längden $|AB|$ av sträckan AB som längden $|A - B|$ av vektorn $A - B$, samt storleken av vinkeln $\angle ABC$ som vinkeln mellan vektorerna $A - B$ och $C - B$.

Vi ger nu en tolkning av begreppen kongruens i den Cartesianska modellen genom att kalla två sträckor kongruenta om och endast om de har samma längd, och två vinklar kongruenta om och endast om de har samma storlek.

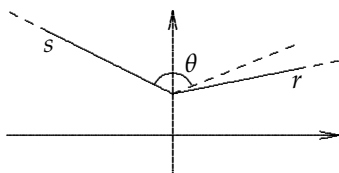
Verifiera att kongruensaxiomen K1-K6 är sanna under denna tolkning.

2.18 (Konstruktiva modellen; forts. på exempel 8 i avsnitt 2.2 och övning 2.5). Tolka begreppet kongruens i den konstruktiva modellen på samma sätt som i den Cartesianska modellen. Verifiera att axiomen K1-K6 är sanna.

2.19 (Rationella modellen; forts. på exempel 9 i avsnitt 2.2 och övning 2.5). Tolka begreppet kongruens i den rationella modellen på samma sätt som i den Cartesianska. Visa att axiom K1 är falskt.

2.20 (Moultons modell; forts. på övning 2.8). En sträcka i Moultons modell svarar i den Cartesianska modellen (och i den intuitiva modellen) mot en sträcka eller mot en brutna sträcka (med brytpunkt på y -axeln). Låt $\|AB\|$ vara den Cartesianska (intuitiva) längden av denna (eventuellt brutna) sträcka. Kalla två sträckor AB och CD i Moultons modell kongruenta om och endast om $\|AB\| = \|CD\|$.

Storleken av en vinkel $\angle(r, s)$ med spets i A definieras på följande vis. Betrakta de Moultonska strålarna r och s som punktmängder i den Cartesianska modellen; de är antingen strålar eller brutna strålar och bestämmer därför en väldefinierad Cartesiansk vinkel vid A av storlek θ . Vi låter nu θ vara storleken av $\angle(r, s)$ i Moultons modell med följande undantag: Om A ligger på y -axeln och någon av strålarna r eller s ligger i det högra halvplanet $x > 0$ utefter en linje $y = \frac{1}{2}ax + b$ med positivt a , så ersätter vi motsvarande stråle (strålar) med halvlinjen $y = ax + b$, $x > 0$, och låter storleken av den givna vinkeln vara lika med den Cartesianska vinkeln mellan de så erhållna strålarna. Vi kallar slutligen två vinklar i Moultons modell för kongruenta om och endast om de har samma storlek.



Figur 2.42
 $\theta =$ storleken av $\angle(r, s)$

- Verifiera att kongruensaxiomen K1-K5 är sanna men att K6 är falskt.
- Ge exempel på en likbent triangel med inkongruenta basvinklar.

2.7 Kongruensfallen

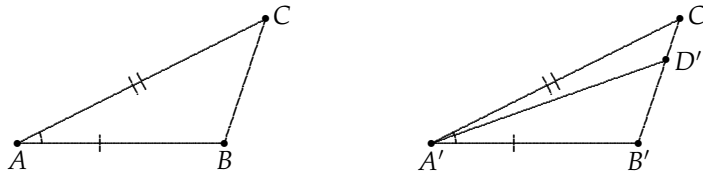
Vi kallar två polygoner π och σ *kongruenta* och skriver $\pi \equiv \sigma$ om de har lika många hörn och motsvarande sidor och vinklar är kongruenta. Om $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ och $\sigma = B_1B_2 \dots B_n$ så innebär således $\pi \equiv \sigma$ att $A_iA_{i+1} \equiv B_iB_{i+1}$ och $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} \equiv \angle B_{i-1}B_iB_{i+1}$ för $i = 1, 2, \dots, n$.

Det är uppenbart att kongruens är en ekvivalensrelation på mängden av alla polygoner.

Speciellt är två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kongruenta om och endast om $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$, $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$ och $\angle C \equiv \angle C'$.

Vi skall i det här avsnittet ge ett antal tillräckliga villkor för kongruens mellan trianglar (de s k kongruensfallen). Det första är en lätt skärpning av slutsatsen i axiom K6.

Sats 2.7.1 (Sida-Vinkel-Sida-kriteriet) *Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar och antag att $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ och $\angle A \equiv \angle A'$. Då är de båda trianglarna kongruenta.*



Figur 2.43

Bevis. På grund av axiom K6 räcker det att bevisa att $BC \equiv B'C'$. Enligt axiom K1 finns det en punkt D' på strålen $\overrightarrow{B'C'}$ så att $BC \equiv B'D'$. Axiom K6 tillämpat på $\triangle BAC$ och $\triangle B'A'D'$ ger att $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$. Enligt förutsättningarna är $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, så axiom K5 ger nu att $\angle B'A'D' \equiv \angle B'A'C'$. Det följer av axiom K4 att $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C'}$, vilket medför att $D' = C'$. Således är $BC \equiv B'C'$. \square

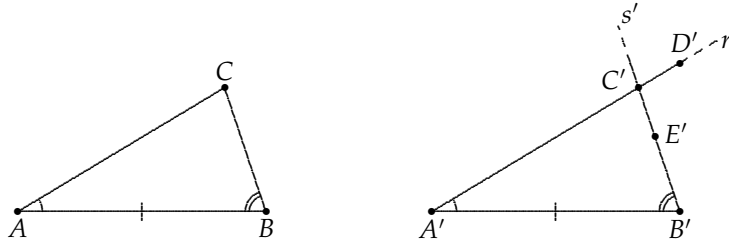
S-V-S-kriteriet tillåter oss att "flytta en triangel till ett annat läge" i följande mening:

Sats 2.7.2 *Låt $\triangle ABC$ vara en triangel och $A'B'$ en sträcka med $A'B' \equiv AB$. På vardera sidan om sträckan $A'B'$ finns det en unik punkt C' så att $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$.*

I fortsättningen uttrycker vi detta genom att säga att vi "placerar en kongruent kopia $\triangle A'B'C'$ av $\triangle ABC$ på sträckan $A'B'$ ".

Bevis. Enligt sats 2.7.1 är $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$ om och endast om $\angle C'A'B' \equiv \angle CAB$ och $A'C' \equiv AC$, och på grund av axiomen K4 och K1 finns det en unik punkt C' med dessa egenskaper på vardera sidan om sträckan $A'B'$. \square

Sats 2.7.3 (Vinkel-Sida-Vinkel-kriteriet) Antag att $\triangle ABC$ är en triangel, att sträckan $A'B'$ är kongruent med sidan AB , att punkterna D' och E' är belägna på samma sida om sträckan $A'B'$, samt att $\angle CAB \equiv \angle D'A'B'$ och $\angle CBA \equiv \angle E'B'A'$. Då skär strålarna $r' = \overrightarrow{A'D'}$ och $s' = \overrightarrow{B'E'}$ varandra i en punkt C' , och trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är kongruenta.



Figur 2.44

Bevis. Låt $\triangle A'B'C'$ vara den kongruenta kopia av $\triangle ABC$ som har hörnet C' beläget på samma sida om $A'B'$ som de givna punkterna D' och E' . Då är (på grund av transitiviteten hos \equiv) $\angle C'A'B' \equiv \angle D'A'B'$ och $\angle C'B'A' \equiv \angle E'B'A'$, dvs C' ligger på såväl strålen r' som strålen s' . Detta innebär att de båda strålarna skär varandra i C' , och därmed är satsen bevisad. \square

Sats 2.7.3 har följande omedelbara korollarium, som också kallas V-S-V-kriteriet.

Korollarium Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar med $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$ och $\angle B \equiv \angle B'$. Då är $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Bevis. Tag $D' = E' = C'$ i satsen ovan. \square

Sats 2.7.3 har följande omvändning till basvinkelsatsen för likbenta trianglar som korollarium.

Sats 2.7.4 Låt $\triangle ABC$ vara en triangel med $\angle B \equiv \angle C$. Då är triangeln likbent med sidan BC som bas.

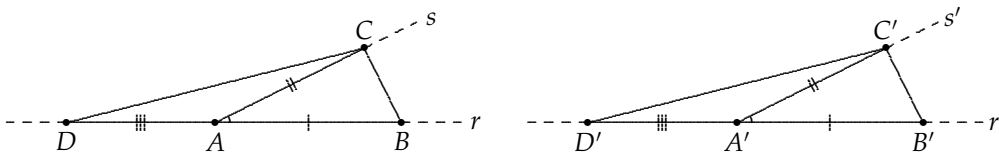
Bevis. Eftersom $BC \equiv CB$, $\angle B \equiv \angle C$ och $\angle C \equiv \angle B$, är $\triangle BCA \equiv \triangle CBA$, och speciellt är alltså $AB \equiv AC$. \square

Innan vi kan visa fler kongruensfall behöver vi sticka emellan med några resultat om vinklar.

Sats 2.7.5 Sidovinklar till kongruenta vinklar är kongruenta.

Bevis. Antag att $\angle(r, s)$ och $\angle(r's')$ är kongruenta vinklar med spetsar i A resp A' . Vi skall visa att sidovinklarna $\angle(-r, s)$ och $\angle(-r', s')$ också är kongruenta.

Välj punkter B, C, D, B', C' och D' på vinkelbenen $r, s, -r, r', s'$ och $-r'$ så att $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ och $AD \equiv A'D'$ (se fig. 2.45).



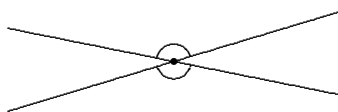
Figur 2.45

S-V-S-kriteriet ger att $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, dvs speciellt är $BC \equiv B'C'$ och $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Eftersom också $DB \equiv D'B'$ (enligt axiom K3), är även $\triangle BDC \equiv \triangle B'D'C'$ (S-V-S-kriteriet), och speciellt är $DC \equiv D'C'$ och $\angle BDC \equiv \angle B'D'C'$. En sista tillämpning av S-V-S-kriteriet ger att $\triangle DAC \equiv \triangle D'A'C'$, varför $\angle DAC \equiv \angle D'A'C'$. Därmed är påståendet bevisat. \square

Sats 2.7.5 medför speciellt att de båda sidovinklarna $\angle(-r, s)$ och $\angle(-s, r)$ till en vinkel $\angle(r, s)$ är kongruenta (ty $\angle(r, s) \equiv \angle(s, r)$ enligt axiom K5). Vidare gäller att vertikalkvinklarna $\angle(r, s)$ och $\angle(-r, -s)$ är kongruenta, ty båda dessa vinklar är sidovinklar till vinkeln $\angle(-r, s)$. Vi sammanfattar dessa enkla observationer i följande korollarium.

Korollarium (i) De båda sidovinklarna till en given vinkel är kongruenta.

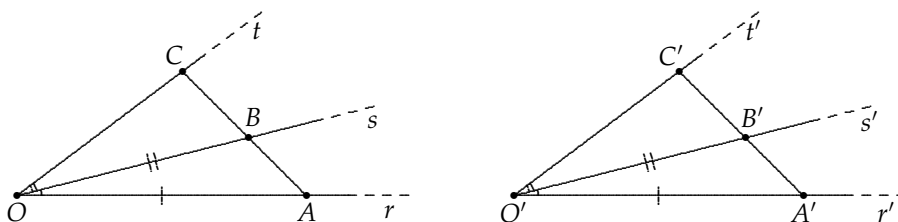
(ii) Vertikalkvinklar är kongruenta.



Figur 2.46
Vertikalkvinklar är kongruenta

Vi visar härnäst två resultat om addition och subtraktion av vinklar. Dessa är direkta motsvarigheter till axiom K3 och sats 2.6.2.

Sats 2.7.6 (Vinkeladdition) Låt r, s och t vara tre strålar från O med s mellan r och t , och låt r', s', t' vara tre strålar från O' med s' mellan r' och t' . Om $\angle(r, s) \equiv \angle(r', s')$ och $\angle(s, t) \equiv \angle(s', t')$, så är $\angle(r, t) \equiv \angle(r', t')$.



Figur 2.47

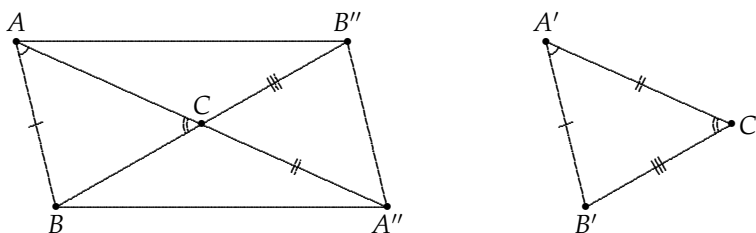
Bevis. Välj A på r och C på t . Det följer av sats 2.4.2 att s skär sträckan AC i en punkt B . Låt A' och B' vara punkter på r' resp. s' så att $OA \equiv O'A'$ och $OB \equiv O'B'$. S-V-S-kriteriet ger $AB \equiv A'B'$, $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ och $\angle OBA \equiv \angle O'B'A'$. Eftersom sidovinklarna till $\angle OBA$ och $\angle O'B'A'$ är kongruenta kan V-S-V-kriteriet tillämpas på $\triangle OBC$, sträckan $O'B'$ och strålarna t' och $-\overrightarrow{B'A'}$. Slutsatsen är att de båda strålarna skär varandra i en punkt C' och att $BC \equiv B'C'$. Det följer att $AC \equiv A'C'$ (axiom K3), så trianglarna $\triangle OAC$ och $\triangle O'A'C'$ är kongruenta enligt S-V-S-kriteriet. Speciellt är alltså $\angle AOC \equiv \angle A'O'C'$. \square

Sats 2.7.7 (Vinkelsubtraktion) Låt r, s och t vara tre strålar från O med s mellan r och t , och låt r', s', t' vara tre strålar från O' . Antag att $\angle(r, t) \equiv \angle(r', t')$, $\angle(r, s) \equiv \angle(r', s')$ och att strålarna s' och t' ligger på samma sida om strålen r' . Då ligger s' mellan r' och t' , och $\angle(s, t) \equiv \angle(s', t')$.

Bevis. Välj A, C, A' och C' på r, t, r' resp. t' så att $OA \equiv O'A'$ och $OC \equiv O'C'$ (jmf fig. 2.47). Strålen s skär sträckan AC i en punkt B . På grund av S-V-S-kriteriet är $AC \equiv A'C'$ och $\angle OAC \equiv \angle O'A'C'$. V-S-V-kriteriet medför att s' skär $\overrightarrow{A'C'}$ i en punkt B' och att $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$. Speciellt är alltså $AB \equiv A'B'$, så det följer av sats 2.6.2 att B' ligger mellan A' och C' och att $BC \equiv B'C'$. Strålen s' ligger således mellan r' och t' . Vidare är $OB \equiv O'B'$ och $\angle OBC \equiv \angle O'B'C'$ (på grund av sats 2.7.5), varför S-V-S-kriteriet kan tillämpas på trianglarna $\triangle OBC$ och $\triangle O'B'C'$. Det följer att $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$. \square

I Euklidisk geometri är en triangels tre vinklar bestämda så snart man känner två av dem, eftersom vinkelsumman är konstant ($= 180^\circ$). V-S-V-kriteriet medför därför att två trianglar är kongruenta om en sida och två vinklar – godtyckligt vilka – i den ena triangeln är kongruenta med motsvarande sida och vinklar i den andra triangeln. Slut-satsen är riktig även i hyperbolisk geometri, men den kräver naturligtvis ett annorlunda bevis. Det är mycket anmärkningsvärt att redan Euklides har ett neutralt bevis för det fall som inte täcks av V-S-V-kriteriet, nämligen det fall då en av de givna vinklarna står mot den givna sidan.

Sats 2.7.8 (Sida-Vinkel-Vinkel-kriteriet) Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar med $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$ och $\angle C \equiv \angle C'$. Då är de båda trianglarna kongruenta.

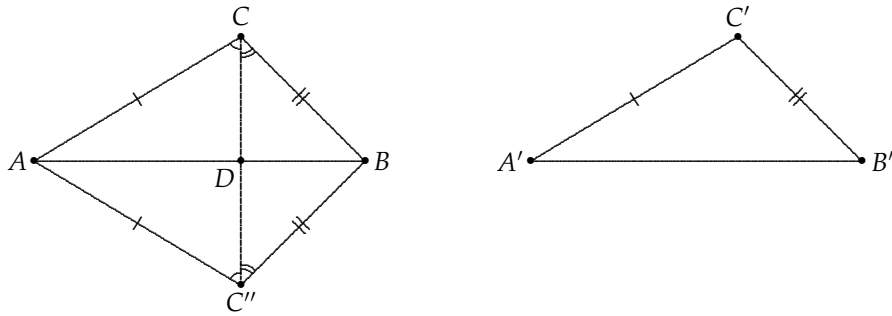


Figur 2.48

Bevis. Vinkeln mellan strålarna $-\overrightarrow{CA}$ och $-\overrightarrow{CB}$ är enligt korollariet till sats 2.7.5 (och förutsättningarna) kongruent med $\angle C'$. Låt A'' resp. B'' vara punkter på dessa strålar så att $CA'' \equiv C'A'$ och $CB'' \equiv C'B'$; då är $\triangle A''B''C \equiv \triangle A'B'C'$ (S-V-S-kriteriet), och det räcker nu att bevisa att $\triangle A''B''C \equiv \triangle ABC$. För att göra detta räcker det i sin tur på grund av V-S-V-kriteriet att visa att $\angle B'' \equiv \angle B$, ty $A''B'' \equiv A'B' \equiv AB$ och $\angle A'' \equiv \angle A' \equiv \angle A$.

Betrakta trianglarna $\triangle BAA''$ och $\triangle B''A''A$; dessa är kongruenta enligt S-V-S-kriteriet. Speciellt är alltså $BA'' \equiv B''A$ och $\angle BA''A \equiv \angle B''AA''$. Enligt satsen om vinkeladdition är därför också $\angle BA''B'' \equiv \angle B''AB$. Ytterligare en tillämpning av S-V-S-kriteriet ger nu att $\triangle BA''B'' \equiv \triangle B''AB$. Speciellt är alltså $\angle BB''A'' \equiv \angle B''BA$, vilket för trianglarnas $\triangle A''B''C$ och $\triangle ABC$ del innebär att $\angle B'' \equiv \angle B$. Därmed är satsen bevisad. \square

Sats 2.7.9 (Sida-Sida-Sida-kriteriet) Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar och antag att motsvarande sidor är kongruenta, dvs att $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ och $CA \equiv C'A'$. Då är de båda trianglarna kongruenta.



Figur 2.49

Bevis. Låt $\triangle ABC''$ vara en kongruent kopia av $\triangle A'B'C'$ med C'' belägen på motsatt sida av AB jämfört med C (jmf fig. 2.49). Det räcker att bevisa att $\angle C \equiv \angle C''$, ty S-V-S-kriteriet ger då att $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'' \equiv \triangle A'B'C'$.

Vi kan utan inskränkning anta att linjen $\overline{CC''}$ skär strålen \overrightarrow{AB} i en punkt D (låt annars hörnen A och B byta roll) och får nu två fall beroende på om $D = B$ eller $D \neq B$.

Fall 1, $D = B$: Triangeln $\triangle ACC''$ är likbent, varför basvinkelsatsen ger att $\angle C = \angle ACC'' \equiv \angle AC''C$.

Fall 2, $D \neq B$: Vi har nu två likbenta trianglar, $\triangle ACC''$ och $\triangle BCC''$ med $\angle ACC'' \equiv \angle AC''C$ och $\angle BCC'' \equiv \angle BC''C$. Beroende på om D ligger på eller utanför sträckan AB tillämpar vi vinkeladditions- resp. vinkelsubtraktionsatsen och får i båda fallen att $\angle C \equiv \angle C''$. \square

ÖVNINGAR

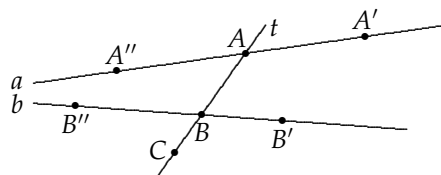
2.21 Visa att det för varje sträcka finns en likbent triangel med den givna sträckan som bas.

2.8 Parallella linjer, mittpunkter, bisektriser och räta vinklar

Vi skall börja med att studera begreppet parallellitet, som definierades redan i avsnitt 2.1. Vi behöver några definitioner, och först rekapitulerar vi själva parallellitetsdefinitionen:

Linjerna a och b kallas *parallella* om de saknar gemensamma punkter. Vi skriver $a \parallel b$ om a och b är parallella eller sammanfallande linjer.

Låt a och b vara två godtyckliga linjer. En linje t som skär a och b i två skilda punkter A resp. B kallas en *transversal* till a och b . Låt A' och A'' vara punkter på a på olika sidor om t , låt B' och B'' vara punkter på b på olika sidor om t men så att A' och B' ligger på samma sida, och låt slutligen C vara en punkt på t utanför sträckan AB och skild från sträckans ändpunkter (se fig. 2.50). Då kallas vinklarna $\angle A'AB$ och $\angle ABB''$ för ett par av *alternativvinklar* (till a och b med avseende på transversalen t). Vinklarna $\angle CBB'$ och $\angle CAA'$ kallas ett par av *likbelägna vinklar*. De fyra vinklarna $\angle A'AB$, $\angle B'BA$, $\angle B''BA$ och $\angle A''AB$ kallas *inre vinklar*.



Figur 2.50

Till varje transversal hör naturligtvis två par av alternatvinklar och fyra par av likbelägna vinklar.

Vi kan nu ge ett tillräckligt villkor för parallellitet.

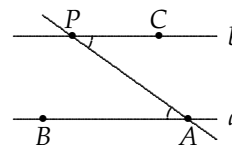
Sats 2.8.1 Låt a och b vara två linjer, låt t vara en transversal och antag att ett par av alternatvinklar (eller ett par av likbelägna vinklar) är kongruenta. Då är de båda linjerna a och b parallella.

Bevis. Vi använder beteckningarna i definitionen ovan och figur 2.50 samt antar att $\angle A'AB \equiv \angle ABB''$. Vi antar vidare att satsens påstående om parallellitet är felaktigt så att linjerna skär varandra i en punkt D belägen på samma sida om t som A'' och B'' . Eftersom vinklarna $\angle A''AB$ och $\angle B''BA$ är sidovinklar till kongruenta vinklar, är vinklarna själva kongruenta. V-S-V-kriteriet kan därför tillämpas på $\triangle ABD$, sträckan AB och strålarna $\overrightarrow{AA'}$ och $\overrightarrow{BB'}$, och slutsatsen är att de båda strålarna skär varandra i en punkt D' . Detta innebär att de båda skilda linjerna a och b skär varandra i två skilda punkter D och D' , vilket är en motsägelse (mot axiom I2). Antagandet att linjerna skär varandra i en punkt är således felaktigt, och därmed har vi bevisat att linjerna är parallella. \square

Vi kan nu lätt bevisa att det finns parallella linjer. Mer precist gäller:

Sats 2.8.2 För varje linje a och varje punkt P utanför a finns det minst en linje b som är parallell med a och går genom P .

Bevis. Välj punkterna A och B godtyckligt på linjen a , och bestäm sedan en punkt C så att $\angle APC \equiv \angle PAB$ och så att C och B ligger på olika sidor om linjen $t = \overline{AP}$. Detta går bra på grund av axiom K4. Sätt slutligen $b = \overline{PC}$; enligt sats 2.8.1 är b parallell med a . \square



Figur 2.51

Naturligtvis kan vi inte visa att linjen b i sats 2.8.2 är unik, ty påståendet att det finns en unik parallell är (ekvivalent med) Euklides parallellpostulat. Däremot kan vi visa att ett antal intressanta påståenden är ekvivalenta med parallellpostulatet.

Sats 2.8.3 Följande fyra påståenden är ekvivalenta.

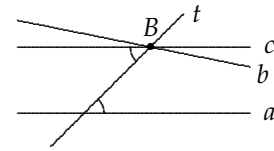
- (i) För varje linje a och varje punkt P utanför a finns det högst en med a parallell linje b genom P .
- (ii) För varje linje a och varje punkt P utanför a finns det exakt en med a parallell linje b genom P .
- (iii) \parallel är en ekvivalensrelation på mängden \mathcal{L} av alla linjer.
- (iv) Alternatvinklar som bildas av en transversal till parallella linjer är kongruenta.

Bevis. (i) \Rightarrow (ii): Följer av sats 2.8.2.

(ii) \Rightarrow (iii): Vi har definierat \parallel så att reflexivitet automatiskt gäller och behöver bara verifiera att \parallel är transitiv om villkoret (ii) är uppfyllt. Antag motsatsen; då finns det tre linjer a , b och c så att a och b är parallella med c men så att a och b skär varandra i en punkt P . Detta innebär emellertid att det går två linjer genom P som är parallella med c , vilket strider mot (ii).

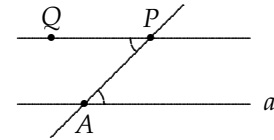
(iii) \Rightarrow (iv): Antag att linjerna a och b är parallella och att t är en transversal till dem. Transversalen skär b i en punkt B .

Låt c vara den unika linje genom B som definieras av att alternatvinklar till a och c med avseende på t är kongruenta. Då är a och c parallella enligt sats 2.8.1. Vi har därför dels $a \parallel b$ enligt antagande, dels $a \parallel c$, så transitivitet medför att $b \parallel c$. Eftersom b och c har en gemensam punkt, följer det att $b = c$, och detta visar att alternatvinklarna till a och b med avseende på t är kongruenta.



Figur 2.52

(iv) \Rightarrow (i): Antag att (iv) gäller och låt P vara en punkt utanför linjen a . För att visa att det går högst en parallell linje till a genom P väljer vi en punkt A på a och betraktar de punkter som ligger på en fix sida om linjen $t = \overline{AP}$. För en sådan punkt Q gäller enligt villkor (iv) att om linjen \overline{QP} är parallell med a så är vinkeln $\angle QPA$ entydigt bestämd. Följaktligen kan det finnas högst en parallell linje genom P . \square



Figur 2.53

I euklidisk geometri kan man karakterisera parallelogrammer som fyrhörningar, vars motstående sidor är parallella, eller vars motstående sidor är kongruenta, eller vars motstående vinklar är kongruenta. Samtliga dessa tre villkor är nämligen ekvivalenta. Så är emellertid inte fallet i neutral geometri, utan där måste vi välja ut ett av villkoren som definierande egenskap. För våra syften är följande definition lämpligast.

En fyrhörning $ABCD$ kallas en *parallelogram* om motstående sidor AB och CD resp. BC och DA är kongruenta. Om samtliga sidor är kongruenta kallas parallelogrammen en *romb*.

Innan vi studerar parallelogramegenskaper behöver vi ytterligare en definition:

En punkt M kallas en *mittpunkt* till sträckan AB (*delar AB mitt itu*) om M ligger på sträckans stödlinje och $AM \equiv BM$.

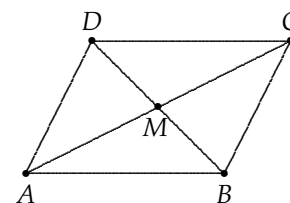
Definitionen av mittpunkt kräver inte explicit att M skall ligga på sträckan AB , men detta följer naturligtvis omedelbart ur axiom K1. Observera vidare att vi talar om en mittpunkt i obestämd form – innan vi visat att varje sträcka har en unik mittpunkt kan vi naturligtvis inte tala om mittpunkten till en sträcka.

Åter till parallelogrammerna!

Sats 2.8.4 *I en parallelogram $ABCD$ är motstående sidor parallella och motstående vinklar kongruenta. De båda diagonalerna ligger i det inre av parallelogrammen och delar varandra mitt itu.*

Anm. Med *parallella sträckor* menas förstås sträckor vars stödlinjer är parallella.

Bevis. Enligt lemma 2.5.8 finns det en inre diagonal i parallelogrammen $ABCD$. (För att inse att en fyrhörning $ABCD$ har en inre diagonal behöver man för övrigt inte hänvisa till lemma 2.5.8, som gäller för godtyckliga enkla polygoner och har ett komplicerat bevis. Om AC inte är en inre diagonal i den enkla fyrsidiga polygonen $ABCD$, så ligger nämligen B och D på samma sida om linjen \overline{AC} , och i så fall måste A och C ligga på motsatta sidor om linjen \overline{BD} , vilket medför att BD är en inre diagonal.)



Figur 2.54

Efter eventuell omnumrering av hörnen kan vi utan inskränkning anta att AC är en inre diagonal. Hörnen B och D ligger då på varsin sida om AC . Trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle CDA$ är kongruenta enligt S-S-S-kriteriet. Speciellt är alltså de motstående vinklarna $\angle ABC$ och $\angle CDA$ kongruenta. Vidare är $\angle CAB \equiv \angle ACD$ och $\angle BCA \equiv \angle DAC$, så det följer genom vinkeladdition (sats 2.7.6) att de motstående vinklarna $\angle DAB$ och $\angle BCD$ också är kongruenta, och med hjälp av sats 2.8.1 att motstående parallelogramsidor är parallella.

Eftersom motstående sidor är parallella, ligger D i det inre av vinkeln $\angle ABC$. Även diagonalen BD är därför en inre diagonal, och BD skär AC i en punkt M .

Betrakta nu slutligen trianglarna $\triangle ABM$ och $\triangle CDM$; dessa är kongruenta enligt S-V-V-kriteriet, ty vi har redan konstaterat att ett motsvarande par av vinklar är kongruenta, och vinklarna $\angle BMA$ och $\angle DMC$ är ett annat motsvarande par av kongruenta vinklar (vertikalvinklar). Det följer att $AM \equiv CM$ och $BM \equiv DM$, dvs M är en mittpunkt till de båda diagonalerna. \square

Det finns gott om parallelogrammer. Vi har nämligen:

Sats 2.8.5 *Varje triangel $\triangle ABC$ kan kompletteras med en unik punkt D till en parallelogram $ABCD$.*

Bevis. Punkten D duger om och endast om $\triangle DCA \equiv \triangle BAC$ och D ligger på motsatt sida om AC jämfört med B . Dessa villkor bestämmer uppenbarligen D entydigt. \square

Existensen av en mittpunkt till varje sträcka följer nu lätt ur ovanstående två satser.

Sats 2.8.6 *Varje sträcka har en unik mittpunkt.*

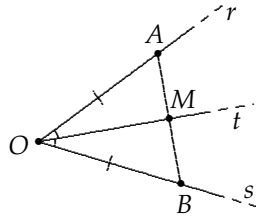
Bevis. För att visa att sträckan AB har en mittpunkt väljer vi först en punkt C utanför sträckans stömlinje och kompletterar sedan med en punkt D till en parallelogram $ACBD$ (sats 2.8.5). Skärningspunkten M mellan diagonalerna AB och CD är en mittpunkt till AB enligt sats 2.8.4. Därmed är existensen av en mittpunkt visad.

För att visa entydigheten antar vi att sträckan AB har två mittpunkter M och N och att $A - M - N - B$, säg. Låt N' vara den unika punkt som uppfyller $MN' \equiv MN$ och $N' - M - N$. Då är på grund av "sträckadditionsaxiomet" K3: $AN = "AM + MN" \equiv "BM + MN" = BN'$, dvs $AN \equiv BN'$. Å andra sidan är enligt mittpunktsdefinitionen också $AN \equiv BN$, vilket leder till motsägelsen $BN \equiv BN'$. Slutsatsen blir att mittpunkten måste vara unik. \square

Med en (inre) bisektris till en vinkel $\angle(r, s)$ menas en stråle t från vinkelns spets som ligger mellan vinkelbenen och uppfyller $\angle(r, t) \equiv \angle(t, s)$.

Sats 2.8.7 *Varje vinkel har en unik bisektris.*

Bevis. Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel med spets O . Välj punkter A och B på respektive vinkelben så att $AO \equiv BO$. Låt t vara en stråle från O mellan r och s ; då skär t sträckan AB i en punkt M . (Se fig. 2.55.) På grund av S-V-S-kriteriet är t en bisektris till vinkeln $\angle AOB$ om och endast om $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$, vilket i sin tur enligt S-S-S-kriteriet är ekvivalent med att $AM \equiv BM$, dvs med att M är mittpunkt på sträckan AB . Eftersom det finns en unik sådan mittpunkt finns det en unik bisektris. \square



Figur 2.55

Bisektriserna till en vinkels båda sidovinklar kallas den givna vinkelns *yttre bisektris*er.

Vi har definierat bisektriser som strålar; ibland kallas också bisektrisernas stödlinjer för bisektriser.

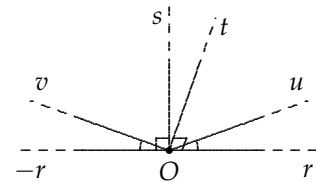
Låt $\triangle ABO$ vara en likbent triangel med AB som bas, och låt M vara basens mittpunkt. Beviset för sats 2.8.7 visar att $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$, och speciellt är alltså $\angle AMO \equiv \angle BMO$. Vinkeln $\angle AMO$ är med andra ord kongruent med sin sidovinkel. Sådana vinklar förtjänar ett särskilt namn:

En vinkel som är kongruent med sin sidovinkel kallas *rät*.

Sats 2.8.8 *Det existerar räta vinklar, och alla räta vinklar är kongruenta.*

Bevis. Existensen av räta vinklar är redan klargjord. Vi visar att alla räta vinklar är kongruenta med ett motsägelsebevis. Antag nämligen att det finns två inkongruenta räta vinklar. Om r är en stråle från en punkt O så finns det då två olika strålar s och t från O på samma sida om r och så att vinklarna $\angle(r, s)$ och $\angle(r, t)$ är räta, dvs så att $\angle(r, s) \equiv \angle(-r, s)$ och $\angle(r, t) \equiv \angle(-r, t)$.

Låt nu u och v vara två strålar från O på samma sida om r som s och t så att de sistnämnda strålarna ligger mellan u och v och så att $\angle(r, u) \equiv \angle(-r, v)$. På grund av vinkelsubtraktionssatsen är då $\angle(u, s) \equiv \angle(v, s)$ och $\angle(u, t) \equiv \angle(v, t)$, dvs s och t är två olika bisektriser till vinkeln $\angle(u, v)$, vilket är orimligt. \square



Figur 2.56

Två linjer a och b som skär varandra i en punkt O definierar fyra vinklar med O som spets. Om en av dessa vinklar är rät, så är också återstående tre vinklar per definition räta; vi säger i så fall att linjen b är *vinkelrät* mot linjen a , eller att b är en *normal* till a och skriver $a \perp b$.

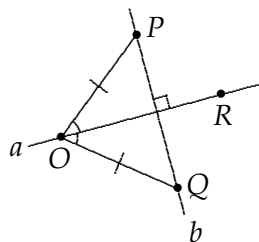
Relationen "vara normal till" är uppenbarligen symmetrisk, dvs $a \perp b \Rightarrow b \perp a$.

Beträffande existens och entydighet av normaler gäller följande sats.

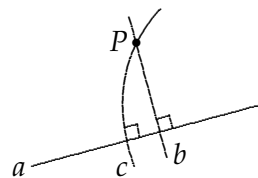
Sats 2.8.9 *Låt a vara en linje. Genom varje punkt P går det en unik normal b till a .*

Bevis. Om P ligger på a , så följer existens och entydighet av sats 2.8.8 och axiom K4.

Antag därför att P ligger utanför a . Låt O och R vara två punkter på a , och låt Q vara den unika punkt som bestäms av att $\angle QOR \equiv \angle POR$, $OQ \equiv OP$ och att Q och P ligger på varsin sida om a . (Jmf fig. 2.57.) Då är linjen $b = \overline{PQ}$ vinkelrät mot a . Detta påstående följer av definitionen av rät vinkel ifall O ligger på linjen b . Om O ligger utanför b , så är a en bisektris till $\angle O$ i den likbenta triangeln $\triangle PQO$, och det följer precis på samma sätt som i beviset för existensen av räta vinklar att $b \perp a$.



Figur 2.57

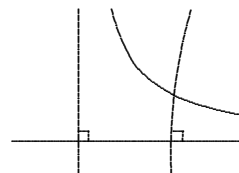


Figur 2.58

Antag slutligen att det finns två normaler b och c till a genom P . Då är alternatvinklarna till b och c med avseende på transversalen a räta vinklar, dvs kongruenta, så det följer av sats 2.8.1 att linjerna b och c är parallella. Detta strider mot att de har en gemensam punkt. Det finns således bara en normal till a genom P . \square

Skärningspunkten mellan en linje och en normal till linjen brukar kallas normalens *fotpunkt*. Normalen från ett hörn i en triangel till motstående sidolinje kallas en *höjd* i triangeln. Även sträckan mellan hörnet och höjdens fotpunkt brukar kallas triangelns höjd – sammanhanget får avgöra om det är sträckan eller linjen som avses.

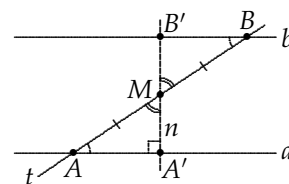
I hyperbolisk geometri behöver inte två parallella linjer a och b ha någon gemensam normal. En normal till den ena linjen behöver inte ens skära den andra linjen. Jmf fig. 2.59. Det kan därför vara av intresse att konstatera att linjer som är parallella i kraft av sats 2.8.1 alltid har en gemensam normal.



Figur 2.59

Sats 2.8.10 Antag att två alternatvinklar till linjerna a och b med avseende på transversalen t är kongruenta. Då har de båda parallella linjerna a och b en gemensam normal.

Bevis. Låt A och B vara transversalens skärningspunkter med a resp. b , och låt M vara mittpunkten på sträckan AB . Låt n vara normalen från M mot a och kalla normalens fotpunkt på a för A' . V-S-V-kriteriet kan nu tillämpas på $\triangle AMA'$ och sträckan BM , och det följer att normalen n skär b i en punkt B' och att vinklarna $\angle BB'M$ och $\angle AA'M$ är kongruenta, dvs båda är räta. Linjen n är således en gemensam normal till a och b . \square



Figur 2.60

ÖVNINGAR

- 2.22 Ge minst tre olika konstruktioner av en sträckas mittpunkt med hjälp av passare och linjal.
- 2.23 Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel med spets O . Välj två punkter A, B på r och två punkter C, D på s så att $OA \equiv OC$ och $OB \equiv OD$. Linjerna \overline{AD} och \overline{BC} skär varandra i en punkt P . Visa att strålen \overrightarrow{OP} är den givna vinkelns bisektris.
- 2.24 Visa att om mittpunktsnormalerna till två sidor i en triangel skär varandra i en punkt P , så går även den tredje sidans mittpunktsnormal genom P .
- 2.25 Ge i Moultons modell (övning 2.20) exempel på en linje och en punkt från vilken det går två normaler till den givna linjen.

2.9 Längd och vinkelmått

Påstående 20 i Elementa är den välbekanta triangelolikheten, som har följande lydelse: I varje triangel är summan av två sidor, vilka som helst, större än den återstående sidan. Påståendet förutsätter tydligen att man kan addera och jämföra sträckor. Det är detta problem och motsvarande problem för vinklar som vi skall ta itu med i det här avsnittet och i avsnitt 2.11.

Våra hittills införda axiom är för svaga för att man skall kunna definiera en sträckas längd som ett reellt tal. Utan att införa ytterligare axiom kan vi därför inte utnyttja de reella talens egenskaper för att addera och jämföra sträckor. Lösningen på vårt additionsproblem för sträckor är emellertid enkelt; vi definierar summan av två sträckor som den sträcka som fås genom att placera de båda givna sträckorna i linje efter varandra. För att komma ifrån det godtycke som uppstår på grund av att sträckorna kan "placeras var som helst i planet", leds vi till att betrakta ekvivalensklasser av kongruenta sträckor.

På grund av axiom K2 delas mängden av alla sträckor in i ett (oändligt) antal ekvivalensklasser, där sträckor i en och samma klass är inbördes kongruenta och sträckor ur olika klasser är inkongruenta. Exempelvis tillhör de båda benen i en likbent triangel samma klass. Låt nu \mathcal{S} beteckna mängden av alla sådana ekvivalensklasser.

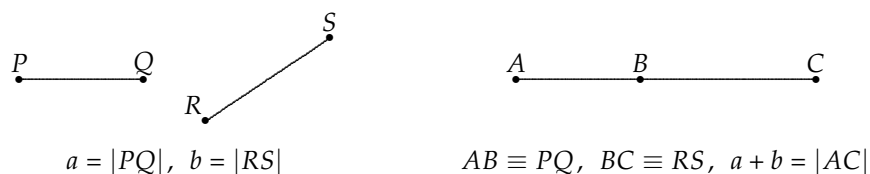
Varje sträcka AB tillhör en unik sträckklass, som vi kommer att beteckna $|AB|$. Vi kan uppfatta $|\cdot|$ som en funktion från mängden av alla sträckor till \mathcal{S} , och vi kommer strax att se att denna funktion uppför sig precis som vi väntar oss att längden skall göra. Av denna anledning kallar vi $|AB|$ för *längden* av sträckan AB .

Läsaren skall inte oroa sig över att längden $|AB|$ är en mycket abstrakt storhet – en mängd av kongruenta sträckor; det är längdens *egenskaper* som är viktiga, inte vad längden egentligen är. När vi senare har infört ytterligare ett axiom, kan vi visa att varje ekvivalensklass i \mathcal{S} kan identifieras med ett positivt reellt tal – den "riktiga" längden.

Omedelbart ur definitionen följer:

Sats 2.9.1 *Två sträckor är kongruenta om och endast om de har samma längd.*

Vi skall nu införa lite struktur på \mathcal{S} . Summan $a + b$ av två element a och b i \mathcal{S} definieras på följande sätt: Välj $AB \in a$ godtyckligt; det finns då en unik punkt C så att $A - B - C$ och $BC \in b$ (axiom K1). Observera nu att sträckklassen $c = |AC|$ är entydigt bestämd av a och b och alltså inte beror av det speciella valet av $AB \in a$. Ty om $A'B' \in a$, $B'C' \in b$ och $A' - B' - C'$, så är enligt axiom K3 sträckorna AC och $A'C'$ kongruenta, dvs $|AC| = |A'C'|$. Vi kan därför definiera summan av a och b som c , dvs $c = a + b$.



Figur 2.61

Det är nu lätt men föga instruktivt att bevisa följande sats, som säger att additionen är kommutativ och associativ. Beviset lämnas som övning.

Sats 2.9.2 För alla $a, b, c \in \mathcal{S}$ gäller:

- (i) $a + b = b + a$ och
- (ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Vi definierar nu $1a = a$, $2a = a + a$, $3a = 2a + a$, $4a = 3a + a$, osv. På så sätt blir na definierat som ett element i \mathcal{S} för varje $a \in \mathcal{S}$ och varje positivt heltal n . Det följer lätt att

$$n(a + b) = na + nb \quad \text{och} \quad (m + n)a = ma + na.$$

Härnäst skall vi definiera en ordningsrelation på \mathcal{S} . Låt a och b vara två element i \mathcal{S} och välj $AB \in a$. På strålen \overrightarrow{AB} finns det en unik punkt C så att $AC \in b$. Om C ligger mellan A och B så säger vi att a är *längre* än b (eller att b är *kortare* än a) och skriver $a > b$ (eller $b < a$). Vi måste naturligtvis verifiera att definitionen är oberoende av det speciella valet av $AB \in a$, men detta följer omedelbart ur sats 2.6.2.

Sats 2.9.3 Storleksrelationen $>$ har följande egenskaper:

- (i) För alla a och b i \mathcal{S} gäller exakt ett av följande tre alternativ: $a > b$, $a = b$, $b > a$.
- (ii) $a > b$ & $b > c \Rightarrow a > c$.
- (iii) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.
- (iv) $a > b$ & $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.
- (v) Om $a > b$ så finns det ett unikt $c \in \mathcal{S}$ så att $a = b + c$.

Sträckklassen c i (v) kallas *skillnaden* av a och b och betecknas $a - b$.

Bevis. Vi bevisar endast (i) och lämnar resten som övning. Antag att $a = |AB|$ och $b = |AC|$ med $C \in \overrightarrow{AB}$. Då gäller antingen $A - C - B$, $C = B$ eller $A - B - C$. I det första fallet är $a > b$, i det andra $a = b$ och i det tredje $b > a$. \square

Sats 2.9.4 Låt $a \in \mathcal{S}$ och låt n vara ett positivt heltal. Ekvationen

$$nx = a$$

har då högst en lösning $x \in \mathcal{S}$, vilken i förekommande fall betecknas $\frac{1}{n}a$ eller $\frac{a}{n}$. Om $n = 2^m$ är en potens av 2 så finns det säkert en lösning.

Bevis. Om $x > y$ så följer det genom upprepade användningar av (iv) i sats 2.9.3 att $nx > ny$. Detta visar att det finns högst en lösning till ekvationen $nx = a$.

Om $a = |AB|$ och om M är mittpunkten på sträckan AB , så löser $x = |AM|$ ekvationen $2x = a$, dvs $\frac{a}{2}$ existerar. Vi kan nu induktivt definiera

$$2^{-m}a = \frac{1}{2}(2^{-(m-1)}a)$$

och får på så sätt en lösning till ekvationen $2^m x = a$. \square

Låt $a \in \mathcal{S}$ och låt m och k vara godtyckliga positiva heltal. Då existerar $x = k \cdot (2^{-m}a)$ och uppfyller $2^m x = ka$. Entydigheten i sats 2.9.4 medför därför att $k \cdot (2^{-m}a) = 2^{-m} \cdot (ka)$. För varje rationellt tal r på formen $r = k \cdot 2^{-m}$ kan vi således definiera ra genom att sätta

$$ra = \frac{k \cdot a}{2^m} = k \cdot \frac{a}{2^m}.$$

Sträckklasserna ra är de som kan bildas ur a genom successiv halvering och addition.

Låt oss avslutningsvis konstatera att vi nu kan formulera triangelolikheten på följande enkla vis: I varje triangel $\triangle ABC$ är $|AB| + |BC| > |AC|$. Naturligtvis återstår det att bevisa olikheten, men det är en annan historia som vi återkommer till i nästa avsnitt.

Vi övergår nu till att diskutera addition och jämförelse av vinklar. Definitionerna är analoga med motsvarande definitioner för sträckor, men vinkeladdition kompliceras av att summan av två vinklar – definierad på så sätt att vinklarna placeras bredvid varandra med ett gemensamt vinkelben – dels inte behöver vara en ny vinkel utan kan vara en rät linje eller "rak vinkel", dels kan vara större än den "raka vinkeln". Det första fallet inträffar om vi t ex adderar två räta vinklar, det andra om vi t ex adderar två trubbiga vinklar.

Vi löser detta problem genom att till en början enbart definiera addition för vinklar vars summa är mindre än den "raka vinkeln". Sedan generaliserar vi vinkelbegreppet så att de generaliserade vinklarna får innehålla ett antal "raka vinklar" eller "halva varv", och slutligen utvidgar vi definitionen av addition och storleksjämförelse till den nya typen av vinklar. Detaljerna i dessa konstruktioner följer nu.

Kongruensrelationen delar in mängden av alla vinklar i ekvivalensklasser så att vinklar inom en och samma klass är kongruenta och vinklar ur olika klasser är inkongruenta. Mängden av alla ekvivalensklasser betecknas \mathcal{V} , och elementen i \mathcal{V} , dvs ekvivalensklasserna, betecknas fortsättningsvis ofta $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Varje vinkel $\angle(r, s)$ tillhör en unik ekvivalensklass, som betecknas $\angle(r, s)^\circ$ och kallas vinkelns *mått*.

Sats 2.8.8 innebär att alla räta vinklar tillhör en och samma ekvivalensklass; denna klass betecknas \mathbf{R} . Omvänt är förstås alla vinklar i klassen \mathbf{R} räta.

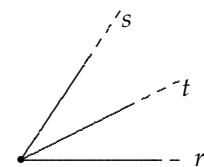
Låt $\alpha \in \mathcal{V}$; sidovinklarna till vinklarna i klassen α är enligt sats 2.7.5 kongruenta, och de bestämmer därför entydigt en ekvivalensklass, som vi betecknar α^c och kallar *supplementet* till α . Om $\alpha = \angle(r, s)^\circ$ så är med andra ord $\alpha^c = \angle(-r, s)^\circ$.

Ur definitionen av supplement och rät vinkel följer omedelbart att följande supplementlagar gäller.

Sats 2.9.5 För alla $\alpha \in \mathcal{V}$ gäller:

- (i) $(\alpha^c)^c = \alpha$
- (ii) $\alpha^c = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{R}$.

Vi övergår nu till ordningsrelationen på \mathcal{V} . Låt α, β vara element i \mathcal{V} och välj $\angle(r, s) \in \alpha$. Enligt axiom K4 finns det en unik stråle t från vinkelspetsen till $\angle(r, s)$ och på samma sida om r som s så att $\angle(r, t) \in \beta$. Om t ligger mellan r och s säger vi att α är *större* än β (eller β är *mindre* än α) och skriver $\alpha > \beta$ (eller $\beta < \alpha$). Definitionen är på grund av vinkelsubtraktionsatsen 2.7.7 oberoende av valet av vinkel $\angle(r, s)$ i α .



Figur 2.62
 $\angle(r, s)^\circ > \angle(r, t)^\circ$

Beviset för följande sats lämnas som enkel övning.

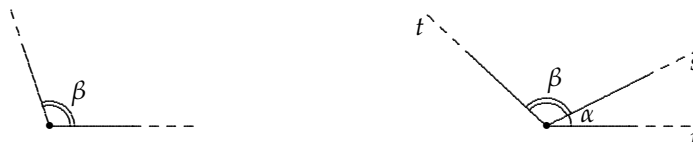
Sats 2.9.6 Storleksrelationen $<$ på \mathcal{V} har följande egenskaper:

- (i) För varje par α, β i \mathcal{V} gäller exakt ett av följande tre alternativ: $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta > \alpha$
- (ii) $\alpha > \beta$ & $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$
- (iii) $\alpha > \beta \Rightarrow \beta^c > \alpha^c$.

En vinkel kallas *spetsig* om dess mått är mindre än \mathbf{R} och *trubbig* om dess mått är större än \mathbf{R} . På grund av (i) i satsen ovan är varje vinkel antingen spetsig, rät eller trubbig.

Vi skall slutligen införa en partiell addition på \mathcal{V} . Att operationen kallas partiell beror på att den bara är definierad för vissa par av element.

Vi skall definiera *summan* $\alpha + \beta$ för alla vinkelmått α, β som uppfyller $\beta < \alpha^c$. Låt α, β vara ett sådant par och välj $\angle(r, s) \in \alpha$. Definitionen av $<$ innebär att det finns en unik vinkel $\angle(s, t) \in \beta$ så att t ligger mellan strålarna s och $-r$. Vi sätter $\alpha + \beta = \angle(r, t)^\circ$. Vinkeladditionssatsen 2.7.6 garanterar att summan är entydigt bestämd av α och β .



Figur 2.63 $\alpha + \beta = \angle(r, t)^\circ$

Vinkelmåttssaddition har följande egenskaper.

Sats 2.9.7 Låt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beteckna godtyckliga element i \mathcal{V} .

(i) Om $\alpha + \beta$ är definierat, så är även $\beta + \alpha$ definierat och

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad (\text{kommutativitet}).$$

(ii) Om $(\alpha + \beta) + \gamma$ är definierat, så är även $\alpha + (\beta + \gamma)$ definierat och

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad (\text{associativitet}).$$

(iii) Om $\beta < \alpha$ så finns det ett unikt $\phi \in \mathcal{V}$ så att

$$\phi + \beta = \alpha.$$

Elementet ϕ betecknas $\alpha - \beta$ och kallas differensen av α och β .

(iv) Om $\beta < \alpha^c$ så är $(\alpha + \beta)^c = \alpha^c - \beta$.

(v) $\beta < \alpha < \gamma^c$ & $\delta \leq \gamma \Rightarrow \beta + \delta < \alpha + \gamma$.

Bevis. (i) På grund av sats 2.9.5 (i) och sats 2.9.6 (iii) gäller $\beta < \alpha^c$ om och endast om $\alpha < \beta^c$, dvs $\alpha + \beta$ och $\beta + \alpha$ är definierade samtidigt. Om $\alpha = \angle(r, s)^\circ$ och $\beta = \angle(s, t)^\circ$ med t mellan s och $-r$, så ligger också r mellan s och $-t$, och det följer att

$$\alpha + \beta = \angle(r, t)^\circ = \angle(t, r)^\circ = \beta + \alpha.$$

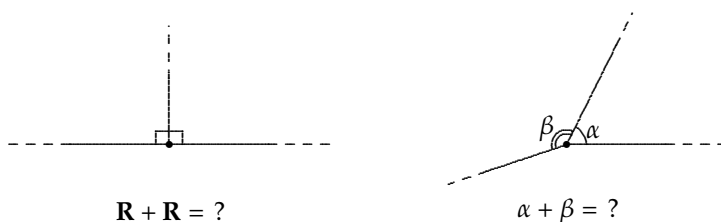
(ii) lämnas som övning, och (iii) följer omedelbart ur vinkelsubtraktionsatsen 2.7.7.

(iv) Med beteckningarna ovan gäller att $(\alpha + \beta)^c = \angle(t, -r)^\circ = \angle(-r, t)^\circ$, varför $(\alpha + \beta)^c + \beta = \angle(-r, s)^\circ = \alpha^c$. Påstående (iv) följer nu med hjälp av (iii).

(v) lämnas som övning. (Man visar lämpligen först att $\beta + \delta < \alpha + \delta$ och $\alpha + \delta \leq \alpha + \gamma$.)

□

Det är högst otillfredsställande att inte kunna addera godtyckliga vinkelmått, ty vi har ju infört addition för att t ex kunna tala om vinkelsumman i en triangel eller enkel polygon. Idén att definiera summan av vinklar genom att lägga dem brevid varandra som i fig. 2.64 är naturligtvis sund för godtyckliga vinklar, men som vi redan tidigare nämnt uppstår vissa problem som måste övervinnas. Summan av ett mått α och dess supplement α^c blir inte en riktig vinkel utan två motsatta strålar (en "rak vinkel"), och om $\beta > \alpha^c$ är "summan" $\alpha + \beta$ visserligen en vinkel, men den innehåller ingen information om att summan överstiger "ett halvt varv".



Figur 2.64

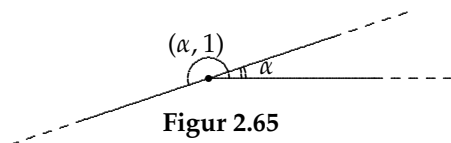
Vi tvingas därför att generalisera vinkelmåtsbegreppet. De generaliserade vinkelmåtten kommer att kunna tolkas som summor av "riktiga" vinklar och ett antal "raka vinklar" eller "halva varv". Observera att konstruktionen nedan är rent algebraisk med utgångspunkt från mängden \mathcal{V} och strukturen på \mathcal{V} . (Jämför med hur man utvidgar de reella talen till komplexa tal.)

Vi startar med att komplettera \mathcal{V} med ett *nollelement*, dvs vi väljer en symbol 0 som inte redan är ett namn på något element i \mathcal{V} och sätter $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{0\}$. Vi utvidgar sedan operationen $+$ och ordningen $<$ till $\tilde{\mathcal{V}}$ genom att definiera

$$0 + 0 = 0, \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \quad \text{och} \quad \alpha > 0.$$

för alla $\alpha \in \mathcal{V}$. Däremot låter vi 0^c vara odefinierat tills vidare.

Därefter sätter vi $\mathcal{V}_g = \tilde{\mathcal{V}} \times \mathbf{Z}$, dvs \mathcal{V}_g består av alla ordnade par $\phi = (\alpha, m)$, där $\alpha \in \tilde{\mathcal{V}}$ och $m \in \mathbf{Z}$. I paret ϕ skall m beskriva antalet halva varv som ingår i den generaliserade vinkeln.



Figur 2.65

Vi inför nu supplementbildning c , addition $+$ och ordning $>$ på mängden \mathcal{V}_g med hjälp av följande definitioner

$$(\alpha, m)^c = \begin{cases} (\alpha^c, -m) & \text{om } \alpha \in \mathcal{V}, \\ (0, -m + 1) & \text{om } \alpha = 0. \end{cases}$$

$$(\alpha, m) + (\beta, n) = \begin{cases} (\alpha + \beta, m + n) & \text{om } \alpha + \beta \text{ är definierat i } \tilde{\mathcal{V}}, \\ (0, m + n + 1) & \text{om } \beta = \alpha^c, \\ (\beta - \alpha^c, m + n + 1) & \text{om } \beta > \alpha^c. \end{cases}$$

$$(\alpha, m) > (\beta, n) \Leftrightarrow \begin{cases} m > n, & \text{eller} \\ m = n & \text{och } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Observera att för vinkelmått α, β i \mathcal{V} är

$$(\alpha, 0)^c = (\alpha^c, 0);$$

$$(\alpha, 0) + (\beta, 0) = (\alpha + \beta, 0) \quad \text{om } \alpha + \beta \text{ är definierat};$$

$$(\alpha, 0) > (\beta, 0) \Leftrightarrow \alpha > \beta.$$

För $\alpha \in \mathcal{V}$ fungerar således paret $(\alpha, 0)$ på precis samma sätt som elementen α själva. Vi kan därför identifiera mängden \mathcal{V} med delmängden $\mathcal{V} \times \{0\}$ av \mathcal{V}_g , och vi kommer i fortsättningen att skriva α istället för $(\alpha, 0)$. Vidare skriver vi 0 istället för $(0, 0)$.

Genom att kombinera satserna 2.9.6 och 2.9.7 med definitionen ovan får vi lätt följande sats. Vi lämnar beviset som övning.

Sats 2.9.8 För ϕ, ψ, χ, ω i \mathcal{V}_g gäller:

- (i) $\phi + \psi = \psi + \phi$ (kommutativitet)
- (ii) $\phi + (\psi + \chi) = (\phi + \psi) + \chi$ (associativitet)
- (iii) $\phi + 0 = \phi$ (neutralt element)
- (iv) Till varje ϕ och ψ finns det ett unikt element $\theta \in \mathcal{V}$ så att $\theta + \phi = \psi$.
- (v) För alla ϕ, ψ gäller exakt en av följande tre relationer: $\phi > \psi$, $\phi = \psi$, $\psi > \phi$.
- (vi) $\phi > \psi$ & $\psi > \chi \Rightarrow \phi > \chi$.
- (vii) $\phi > \psi$ & $\chi \geq \omega \Rightarrow \phi + \chi > \psi + \omega$.

Lösningen θ i (iv) till ekvationen $\theta + \phi = \psi$ kallas för *differensen* av ψ och ϕ och betecknas $\psi - \phi$. Vi sätter vidare $-\phi = 0 - \phi$.

Egenskaperna (i)–(iv) innebär att \mathcal{V}_g är en kommutativ grupp, och (v)–(vii) betyder att gruppen är ordnad.

För varje $\phi \in \mathcal{V}_g$ kan vi nu sätta

$$1\phi = \phi, \quad 2\phi = \phi + \phi, \quad 3\phi = 2\phi + \phi, \quad \text{osv,}$$

och på så sätt blir $n\phi$ definierat för varje positivt heltal n . Vi sätter vidare $0\phi = 0$ och $-n\phi = n(-\phi)$. Speciellt blir då $(0, m) = m \cdot (0, 1)$.

För alla $\alpha \in \mathcal{V}$ är vidare $\alpha + \alpha^c = (\alpha, 0) + (\alpha^c, 0) = (0, 1)$, och speciellt är alltså

$$2\mathbf{R} = \mathbf{R} + \mathbf{R}^c = (0, 1).$$

Ett godtyckligt element ϕ i \mathcal{V}_g har därför representationen

$$\phi = (\alpha, m) = (\alpha, 0) + (0, m) = (\alpha, 0) + m \cdot (0, 1) = \alpha + m \cdot 2\mathbf{R},$$

där den sista likheten beror på vår konvention att identifiera par av typen $(\alpha, 0)$ med α . I fortsättningen kommer vi därför att skriva elementen i \mathcal{V}_g på formen

$$\phi = \alpha + m \cdot 2\mathbf{R},$$

dvs som en summa av måttet för en riktig vinkel (eller "vinkeln" 0) och ett antal multiplar av $2\mathbf{R}$.

Den sista satsen i det här avsnittet är en direkt motsvarighet för vinklar till sats 2.9.4 för sträckor, och beviset är helt analogt och utelämnas därför.

Sats 2.9.9 Låt $\phi \in \mathcal{V}_g$ och låt n vara ett nollskilt heltal. Då har ekvationen

$$n\chi = \phi$$

högst en lösning $\chi \in \mathcal{V}_g$, vilken i förekommande fall betecknas $\frac{1}{n}\phi$ eller $\frac{\phi}{n}$. Om n är en potens av 2 så finns det säkert en lösning.

Om r är ett rationellt tal på formen $r = k2^{-m}$ så kan vi speciellt bilda vinkeln $r\phi$, definierad som $r\phi = (k\phi)/2^m$.

Satserna 2.9.4 och 2.9.9 uttalar sig inte om existensen av ϕ/n och ϕ/n i de fall då n inte är en potens av 2. Hittills introducerade axiom är helt enkelt för svaga för att medföra att exempelvis $\phi/3$ skall existera för alla $\phi \in \mathcal{V}_g$. I exempel 8 i avsnitt 2.2 och övningarna 2.5 och 2.18 har vi konstaterat att den konstruktiva modellen är en modell för incidens-, ordnings- och kongruensaxiomen, och i kapitel 1.6 har vi noterat att vinkeln 60° inte kan tredelas med hjälp av de euklidiska hjälpmedlen. Detta innebär att det i den konstruktiva modellen inte finns några 20° -vinklar. Följaktligen räcker inte ovannämnda axiom till för att bevisa att $60^\circ/3$ existerar. För att bli garanterad existensen av ϕ/n för godtyckliga ϕ och n behöver vi ytterligare ett axiom, det s k *kontinuitetsaxiomet*.

ÖVNINGAR

2.26 Dela en godtycklig sträcka i n lika delar, där n är ett godtyckligt positivt heltal, med hjälp av de euklidiska hjälpmedlen passare och linjal. (Om man tillfogar det euklidiska parallellaxiomet till incidens-, ordnings- och kongruensaxiomen, så följer med andra ord existensen av a/n för alla n och alla sträckklasser a .)

2.27 Bevisa (ii) i sats 2.9.2.

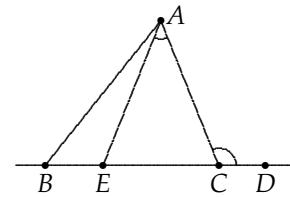
2.10 Triangelns sidor och vinklar

I det här avsnittet skall vi visa ett antal satser av kvalitativt slag om storleken av en triangelns sidor och vinklar. Typexempel är triangelolikheten och satsen att den större sidan står mot den större vinkeln. Vi börjar dock med att jämföra ytter- och innervinklar.

Sats 2.10.1 *I en triangel är varje yttervinkel större än var och en av de båda motstående inre vinklarna.*

Bevis. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel. Vi skall visa att yttervinkeln vid hörnet C är större än den inre vinkeln vid A , dvs att $\angle DCA^\circ > \angle CAB^\circ$, om D är en punkt så att $B - C - D$.

Eftersom vinklarna $\angle DCA$ och $\angle CAB$ är alternatvinklar till de icke-parallella sidolinjerna \overline{AB} och \overline{BC} med avseende på transversalen \overline{CA} , följer det ur sats 2.8.1 att vinklarna är inkongruenta. Antag att $\angle DCA^\circ < \angle CAB^\circ$. Då finns det en punkt E på sidan BC så att $\angle DCA \equiv \angle CAE$. Detta medför på grund av sats 2.8.1 att linjerna \overline{AE} och \overline{BC} är parallella, vilket uppenbarligen är fel. Denna motsägelse visar att $\angle DCA^\circ > \angle CAB^\circ$. \square



Figur 2.66

Korollarium 1 *I varje triangel är summan av två vinklar, vilka som helst, mindre än $2R$.*

Bevis. Låt α och β vara måtten för vinklarna $\angle A$ och $\angle B$ i $\triangle ABC$. Då har yttervinkeln vid hörnet B måttet β^c , och enligt satsen ovan är $\alpha < \beta^c$, så det följer att $\alpha + \beta < \beta^c + \beta = 2R$. \square

Ur korollarium 1 följer naturligtvis omedelbart:

Korollarium 2 *I varje triangel är minst två vinklar spetsiga.*

En triangel kallas *spetsvinklig* om alla vinklarna är spetsiga, *rätvinklig* om en vinkel är rät, och *trubbvinklig* om en vinkel är trubbig. På grund av korollarium 2 är en triangel antingen spetsvinklig, rätvinklig eller trubbvinklig. I en rätvinklig triangel kallas sidan mot den räta vinkeln för *hypotenusan*, och de båda övriga sidorna kallas *kateter*.

Sats 2.10.2 *I varje triangel $\triangle ABC$ gäller*

$$|AB| > |AC| \Leftrightarrow \angle B^\circ < \angle C^\circ.$$

Bevis. Antag att $|AB| > |AC|$, och välj D på sidan AB så att $|AD| = |AC|$. (Se fig. 2.67.) Då är $\angle ACD \equiv \angle ADC$ enligt basvinkelsatsen för likbenta trianglar. Eftersom strålen \overrightarrow{CD} ligger i det inre av $\angle ACB$ och vinkeln $\angle ADC$ är yttervinkel till $\triangle DBC$, får vi med hjälp av sats 2.10.1

$$\angle B^\circ = \angle DBC^\circ < \angle ADC^\circ = \angle ACD^\circ < \angle C^\circ.$$

Därmed har vi bevisat implikationen

$$|AB| > |AC| \Rightarrow \angle B^\circ < \angle C^\circ.$$

Analogt gäller förstås implikationen

$$|AB| < |AC| \Rightarrow \angle B^\circ > \angle C^\circ,$$

och basvinkelsatsen innebär att

$$|AB| = |AC| \Rightarrow \angle B^\circ = \angle C^\circ.$$

Därmed har vi också bevisat att ekvivalensen i satsen gäller. \square

Korollarium 1 I en rätvinklig triangel är hypotenusan längre än vardera kateten.

Bevis. Hypotenusan står mot en rät vinkel, medan kateterna står mot spetsiga vinklar. \square

Avståndet mellan två punkter A och B definieras som längden $|AB|$ av sträckan AB . Med *avståndet mellan en linje a och en punkt P* utanför linjen menas det minsta avståndet mellan P och någon punkt på linjen. Att ett sådant minsta avstånd verkligen existerar är innebörden av nästa korollarium.

Korollarium 2 Det minsta avståndet mellan linjen a och en punkt P utanför linjen existerar och är lika med $|PF|$, där F är fotpunkten på a för normalen från P .

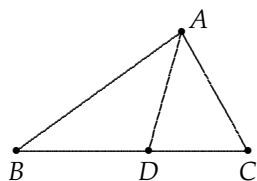
Bevis. Om A är en punkt på a och $A \neq F$, så är $\triangle PFA$ rätvinklig med PA som hypotenusan, och det följer att $|PA| > |PF|$. \square

Korollarium 3 Om D är en punkt på sidan BC i $\triangle ABC$, så är $|AD| < |AB|$ eller $|AD| < |AC|$.

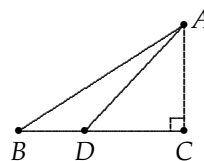
Bevis. Av de båda sidovinklarna $\angle ADB$ och $\angle ADC$ är en spetsig eller rät och den andra trubbig eller rät. Antag exempelvis att $\angle ADC^\circ \leq \mathbf{R}$. (Jmf fig. 2.68.) På grund av sats 2.10.1 är då

$$\angle ABD^\circ < \angle ADC^\circ \leq \mathbf{R} \leq \angle BDA^\circ,$$

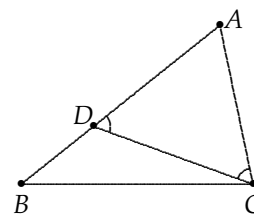
och det följer nu ur sats 2.10.2 att $|AD| < |AB|$. \square



Figur 2.68



Figur 2.69



Figur 2.67

Korollarium 4 Antag att $\triangle ABC$ är rätvinklig med vinkeln $\angle C$ rät. Om D är en punkt på kateten BC , så är $|AD| < |AB|$.

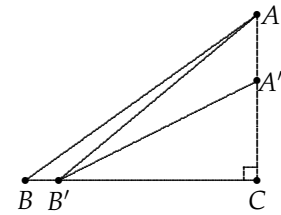
Bevis. Sträckan AD är hypotenusan i triangeln $\triangle ACD$. (Jmf fig. 2.69.) Det följer därför av de båda korollarierna 1 och 3 ovan att $|AC| < |AD| < |AB|$. \square

Korollarium 5 Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två rätvinkliga trianglar med rät vinkel vid C och C' , och antag att hypotenusorna AB och $A'B'$ har samma längd. Då gäller

- (i) $|AC| = |A'C'| \Rightarrow |BC| = |B'C'|$
(ii) $|AC| > |A'C'| \Rightarrow |BC| < |B'C'|$.

Bevis. Genom att ersätta $\triangle A'B'C'$ med en kongruent kopia kan vi anta att $C' = C$, A' ligger på strålen \overrightarrow{CA} och B' ligger på strålen \overrightarrow{CB} . Implikationerna (i) och (ii) övergår då i

- (i) $A = A' \Rightarrow B = B'$ och
(ii) $A - A' - C \Rightarrow B' - B - C$.



Figur 2.70

I fallet $A = A'$ är $|AB| = |A'B'|$, och det följer omedelbart ur korollarium 4 att B' inte kan ligga på sidan BC och att B inte kan ligga på sidan $B'C$. Således återstår endast möjligheten $B = B'$.

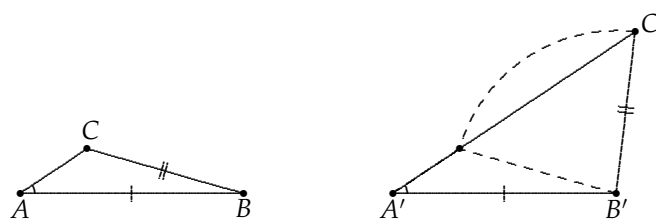
Antag nu att $A - A' - C$. Då utesluter det redan visade fallet (i) att $B = B'$, och om $B - B' - C$ så ger nu två tillämpningar av korollarium 4, först på $\triangle ABC$ och sedan på $\triangle A'B'C$ (jmf fig. 2.70), att

$$|AB| > |A'B'| > |A'B'|,$$

vilket strider mot förutsättningarna i satsen. Det följer därför att $B' - B - C$. \square

Påstående (i) i ovanstående korollarium innebär att två rätvinkliga trianglar är kongruenta om hypotenusorna och ett par av kateter är kongruenta. Detta ger oss anledning att sammanfatta de olika kongruensfallen för trianglar. I avsnitt 2.7 visade vi att en triangel är entydigt bestämd upp till kongruens av följande tre kombinationer av sidor och vinklar: tre sidor (S-S-S-kriteriet), två sidor och mellanliggande vinkel (S-V-S-kriteriet), samt en sida och två vinklar (V-S-V- och S-V-V-kriterierna).

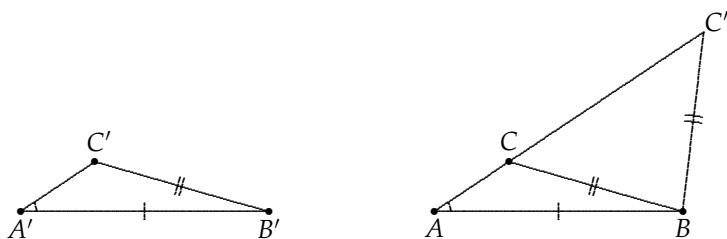
Det finns två andra tre-kombinationer av sidor och vinklar, nämligen tre vinklar (V-V-V) och två sidor och icke-mellanliggande vinkel (S-S-V). Den förstnämnda kombinationen bestämmer givetvis inte triangeln (upp till kongruens), eftersom det exempelvis finns inkongruenta liksidiga trianglar i euklidisk geometri. Däremot är lustigt nog en triangel entydigt bestämd av sina vinklar i hyperbolisk geometri. Den sistnämnda kombinationen (S-S-V) räcker heller inte för att bestämma triangeln, men om vi lägger till ett villkor på vinkeln så gör den det.



Figur 2.71

Figur 2.71 visar två inkongruenta trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ med $\angle A \equiv \angle A'$, $AB \equiv A'B'$ och $BC \equiv B'C'$. Observera att $\angle C$ är trubbig medan $\angle C'$ är spetsig. Detta är också enda möjligheten att erhålla inkongruens, ty vi har följande sats, som förstås innehåller korollarium 5 (i) som specialfall.

Sats 2.10.3 ("Femte kongruensfallet") Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar med $\angle A \equiv \angle A'$, $AB \equiv A'B'$ och $BC \equiv B'C'$. Om vinklarna $\angle C$ och $\angle C'$ båda är spetsiga eller båda är trubbiga, så är $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.



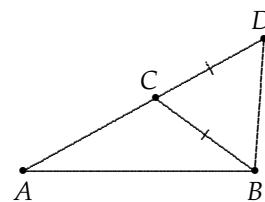
Figur 2.72

Bevis. Låt $\triangle ABC''$ vara en kongruent kopia av $\triangle A'B'C'$ med C'' på strålen \overrightarrow{AC} . Vi skall visa att $C'' = C$. Antag därför motsatsen, dvs att $C'' \neq C$. Av symmetriskäl är det då ingen inskränkning att anta att $A - C - C''$. Se fig. 2.72. Triangeln $\triangle BCC''$ är likbent med CC'' som bas, så på grund av korollarium 2 till sats 2.10.1 är de båda kongruenta basvinklarna spetsiga, dvs $\angle AC''B$ är spetsig och sidovinkeln $\angle ACB$ är trubbig. I trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är med andra ord vinkeln $\angle C$ trubbig och $\angle C'$ spetsig, vilket strider mot förutsättningarna. Denna motsägelse bevisar satsen. \square

Sats 2.10.4 (Triangelolikheten) I en triangel är summan av två sidors längder alltid större än den återstående sidans längd.

Bevis. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel; vi skall visa att $|AC| + |CB| > |AB|$. Välj därför punkten D på sidolinjen \overline{AC} så att $A - C - D$ och $CD \equiv CB$. Då är $|AC| + |CB| = |AD|$.

Eftersom $\triangle CBD$ är likbent och strålen \overrightarrow{BC} ligger i det inre av $\triangle ABD$, är vidare $\angle ABD^\circ > \angle CBD^\circ = \angle BDC^\circ$, så det följer nu av sats 2.10.2, tillämpad på $\triangle ABD$, att $|AD| > |AB|$. \square



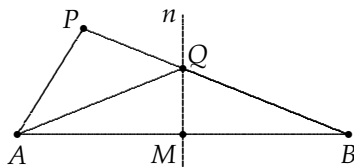
Figur 2.73

Om A , B och C är tre punkter som inte ligger i linje, så är alltså $|AB| < |AC| + |CB|$. Om de tre punkterna ligger i linje, så följer å andra sidan direkt ur definitionen av sträckaddition att $|AB| \leq |AC| + |CB|$ med likhet om och endast om $A - C - B$. Vi sammanfattar dessa observationer i ett korollarium.

Korollarium Låt A , B och C vara tre skilda punkter. Då gäller olikheten $|AB| \leq |AC| + |CB|$, och likhet råder om och endast om $A - C - B$.

Normalen genom mittpunkten på en sträcka till sträckans stömlinje kallas sträckans *mittpunktsnormal*. Denna karakteriseras av följande sats.

Sats 2.10.5 En punkt P ligger på mittpunktsnormalen till sträckan AB om och endast om $|AP| = |BP|$. Punkten P ligger på samma sida om mittpunktsnormalen som A om och endast om $|AP| < |BP|$.



Figur 2.74

Bevis. Kalla sträckans mittpunkt för M och mittpunktsnormalen för n . Det är helt klart att villkoren i satsen är tillräckliga och nödvändiga för punkter P som ligger på sträckans stömlinje, så vi inskränker oss därför till att betrakta punkter P som ligger utanför denna linje.

Om P ligger på n , så är $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$ enligt S-V-S-kriteriet, och speciellt är alltså $|AP| = |BP|$.

Om P ligger utanför n och på samma sida som A , säg, så skär n sträckan BP i en punkt Q , och $|AQ| = |BQ|$ enligt vad vi just visat. Triangelolikheten tillämpad på $\triangle PQA$ ger därför

$$|BP| = |BQ| + |QP| = |AQ| + |QP| > |AP|.$$

Detta visar att $|AP| < |BP|$ om A och P ligger på samma sida om n , och den omvända olikheten gäller förstås om B och P ligger på samma sida. \square

Sats 2.10.6 Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två trianglar med $|AB| = |A'B'|$ och $|AC| = |A'C'|$. Då gäller att

$$\angle A^\circ > \angle A'^\circ \Leftrightarrow |BC| > |B'C'|.$$

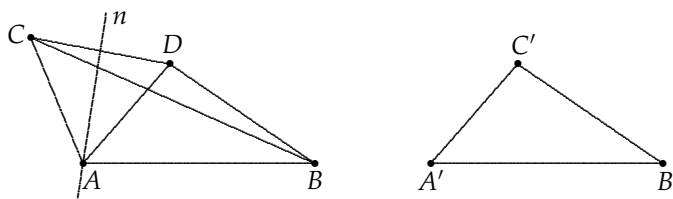
Bevis. På grund av S-V-S-kriteriet gäller förstås implikationen

$$\angle A^\circ = \angle A'^\circ \Rightarrow |BC| = |B'C'|.$$

Vi skall visa implikationen

$$\angle A^\circ > \angle A'^\circ \Rightarrow |BC| > |B'C'|;$$

av symmetriskäl följer då motsvarande implikation med $>$ bytt mot $<$ på båda ställena.



Figur 2.75

Antag därför att $\angle A^\circ > \angle A'^\circ$, och låt $\triangle ABD$ vara en kongruent kopia av $\triangle A'B'C'$ med hörnet D på samma sida om AB som C . Då är $|AC| = |AD|$, så A ligger enligt föregående sats på mittpunktsnormalen n till sträckan CD . Punkterna B och D ligger på samma sida om n , eftersom $\angle BAD^\circ < \angle BAC^\circ$. Enligt sats 2.10.5 är därför också $|BC| > |BD| = |B'C'|$. \square

De båda bisektriserna till två skärande linjer har en analog karakterisering. Vi lämnar beviset av följande sats som övning.

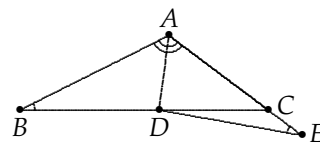
Sats 2.10.7 Låt a och b vara två skärande linjer. Punkten P ligger på någon av bisektriserna till de fyra vinklar som definieras av linjerna om och endast om P har samma avstånd till de båda linjerna.

Nästa sats är en kvalitativ variant av bisektrissatsen.

Sats 2.10.8 Låt D vara skärningspunkten mellan sidan BC och bisektrisen till $\angle A$ i triangeln $\triangle ABC$. Då gäller att

$$|AB| > |AC| \Rightarrow |BD| > |CD|.$$

Bevis. Välj E på \overrightarrow{AC} så att $AE \equiv AB$. Då är $\triangle ADB \equiv \triangle ADE$, varför $BD \equiv DE$ och $\angle B \equiv \angle E$. Eftersom $\angle ECD$ är en yttervinkel vid hörnet C till triangeln $\triangle ABC$, följer det att $\angle ECD^\circ > \angle CBA^\circ = \angle DEC^\circ$, och detta medför i sin tur att $|BD| = |DE| > |CD|$. \square



Figur 2.76

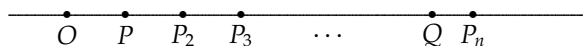
ÖVNINGAR

- 2.28 I $\triangle ABC$ är vinklarna $\angle A$ och $\angle B$ spetsiga. Visa att höjden från C skär sidan AB .
- 2.29 Visa att $|DA| + |DB| < |CA| + |CB|$ om
- D är en punkt på sidan AC i triangeln $\triangle ABC$;
 - D är en punkt i det inre av triangeln $\triangle ABC$.
- 2.30 Visa att bisektriserna till de tre vinklarna i en triangel skär varandra i en punkt.
- 2.31 Bevisa sats 2.10.7.
- 2.32 Om D är en punkt på sidan AC i triangeln $\triangle ABC$, så är $\angle ADB^\circ > \angle ACB^\circ$. Använd detta för att ge ett nytt bevis för S-V-V-kriteriet.

2.11 Kontinuitetsaxiomet

Incidens-, ordnings- och kongruensaxiomen är som vi redan påpekat inte tillräckligt kraftfulla för att garantera existensen av en 1-1-avbildning mellan punkterna på en linje och de reella talen. Den intuitiva euklidiska modellen har också en annan egenskap, som inte följer ur de dessa axiom, nämligen den *arkimediska* egenskapen:

Om O , P och Q är tre punkter i följd på en linje, och om sträckan OP avsätts successivt från O i riktning mot Q så att följderna P_1, P_2, P_3, \dots erhålles med $P_1 = P$, $P_1 - P_2 - P_3 - \dots$ och $P_i P_{i+1} \equiv OP$ för alla i , så kommer P_n att ligga bortom Q från O räknat bara n är tillräckligt stort. (Se fig. 2.77.)



Figur 2.77

Den arkimediska egenskapen kan förstås enklare uttryckas på följande vis: Givet två sträckklasser a och b finns det ett positivt heltal n så att $na > b$.

För att reparera dessa brister skall vi introducera ett nytt kraftfullt axiom i vår teori. Det blir enklare att formulera axiomet om vi först gör ett antal definitioner.

Låt \mathcal{X} , \mathcal{Y} och \mathcal{Z} vara delmängder av någon linje. Vi säger att \mathcal{Z} ligger mellan \mathcal{X} och \mathcal{Y} och skriver $\mathcal{X} - \mathcal{Z} - \mathcal{Y}$, om $P - Q - R$ gäller för alla $P \in \mathcal{X}$, $Q \in \mathcal{Z}$ och $R \in \mathcal{Y}$. Om t ex \mathcal{Z} är en enpunktsmängd, $\mathcal{Z} = \{P_0\}$, så skriver vi $\mathcal{X} - P_0 - \mathcal{Y}$ istället för det klumpigare $\mathcal{X} - \{P_0\} - \mathcal{Y}$ och säger följaktligen att punkten P_0 ligger mellan mängderna \mathcal{X} och \mathcal{Y} .

Om $\mathcal{X} \setminus \{P_0\} - P_0 - \mathcal{Y} \setminus \{P_0\}$, säger vi att punkten P_0 separerar mängderna \mathcal{X} och \mathcal{Y} . Att P_0 separerar \mathcal{X} och \mathcal{Y} är således liktydigt med att implikationen

$$P \in \mathcal{X}, Q \in \mathcal{Y}, P \neq P_0, Q \neq P_0 \Rightarrow P - P_0 - Q$$

gäller.

Låt nu \mathcal{X} och \mathcal{Y} vara två icke-tomma delmängder av en stråle r från O . Paret $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ kallas ett *snitt* (av r) om de båda delmängderna partitionerar strålen r och delmängden \mathcal{X} ligger mellan spetsen O och delmängden \mathcal{Y} , dvs om

$$r = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset \quad \text{och} \quad O - \mathcal{X} - \mathcal{Y}.$$

Figur 2.78
Snitt $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Låt r vara en stråle med spets i O . Om $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ är ett snitt av strålen och punkten P_0 separerar mängderna \mathcal{X} och \mathcal{Y} , så är uppenbarligen

$$\mathcal{X} \setminus \{P_0\} = \{P \in r \mid O - P - P_0\} = OP_0 \quad \text{och} \quad \mathcal{Y} \setminus \{P_0\} = \{P \in r \mid O - P_0 - P\} = -\overrightarrow{P_0O}.$$

Ett snitt kan därför ha högst en separerande punkt.

Omvänt, om P_0 är en punkt på strålen r , så är $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ett snitt med P_0 som separerande punkt ifall

$$\mathcal{X} = OP_0 \quad \text{och} \quad \mathcal{Y} = r \setminus \mathcal{X} = \{P_0\} \cup -\overrightarrow{P_0O}$$

eller

$$\mathcal{X} = OP_0 \cup \{P_0\} \quad \text{och} \quad \mathcal{Y} = r \setminus \mathcal{X} = -\overrightarrow{P_0O}.$$

En naturlig fråga är om det finns några andra snitt än dessa. Sådana snitt måste i så fall sakna separerande punkt. Det visar sig att en del existensfrågor kan återföras på ovanstående fråga, och eftersom denna inte kan besvaras entydigt på basis av våra hittillsvarande axiom (se övningarna 2.33 och 2.34), löser vi problemet genom att införa följande nya axiom.

Kontinuitetsaxiomet. *Varje snitt har en separerande punkt.*

Kontinuitetsaxiomet brukar också kallas *Dedekinds fullständighetsaxiom* efter den tyske matematikern RICHARD DEDEKIND (1831–1916), som använde sig av snitt av rationella tal för att konstruera de reella talen. Axiomet är onekligen mer komplicerat än de övriga geometriska axiomen ur såväl intuitiv som logisk synvinkel. (Axiomet kan inte formuleras med hjälp av första ordningens predikatlogik.)

Vi kan nu bevisa att vår geometri är arkimedisk.

Sats 2.11.1 (Arkimedes axiom) *För varje par a, b av sträckklasser finns det ett positivt heltal n så att $na > b$.*

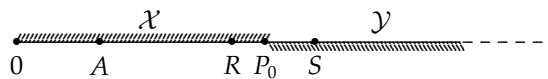
Bevis. Låt OA vara en sträcka med längd $|OA| = a$ och sätt $r = \overrightarrow{OA}$. Vi skall visa att det för varje punkt P på r finns ett n så att $n|OA| > |OP|$, och speciellt gäller då detta för den punkt P som uppfyller $|OP| = b$.

Sätt därför

$$\mathcal{X} = \{P \in r \mid \text{Det finns ett positivt heltal } n \text{ så att } n|OA| > |OP|\} \quad \text{och}$$

$$\mathcal{Y} = \{P \in r \mid \text{För alla positiva heltal } n \text{ är } n|OA| \leq |OP|\}.$$

Uppenbarligen är $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$ och $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} = r$, och vidare är $\mathcal{X} \neq \emptyset$, ty exempelvis $A \in \mathcal{X}$ eftersom $2|OA| > |OA|$. Antag att $P \in \mathcal{X}$ och $Q \in \mathcal{Y}$; för ett lämpligt n gäller då att $|OP| < n|OA| \leq |OQ|$, vilket medför att $O - P - Q$. Mängden \mathcal{X} ligger således mellan O och \mathcal{Y} . Om nu också \mathcal{Y} är icke-tom, så finns det enligt kontinuitetsaxiomet en separerande punkt P_0 .



Figur 2.79

Välj nu $R \in \mathcal{X}$ så att $|RP_0| < |OA|$ och ett positivt heltal m så att $m|OA| > |OR|$, och låt S vara den punkt som är bestämd av villkoren $R - P_0 - S$ och $|RS| = |OA|$ (jmf fig. 2.79). Då ligger S i mängden \mathcal{Y} på grund av definitionen av separerande punkt. Å andra sidan är

$$(m+1)|OA| > |OR| + |OA| = |OR| + |RS| = |OS|,$$

varför S också ligger i mängden \mathcal{X} , vilket strider mot att snittet $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ är tomt. Mängden \mathcal{Y} är således tom, vilket innebär att $\mathcal{X} = r$. Därmed är satsen bevisad. \square

Det är via sats 2.11.1 som kontinuitetsaxiomet oftast kommer att utnyttjas i fortsättningen. I själva verket kommer vi bara att utnyttja kontinuitetsaxiomet fullt ut vid några få tillfällen, som vi markerar genom att sätta en asterisk efter ifrågasvarande satsnummer. Det var Eudoxos som upptäckte satsens fundamentala roll i geometrin, och den förekommer som axiom i ett arbete av Arkimedes, vilket förklarar namnet.

Sats 2.11.1 gör det möjligt att definiera längden av en sträcka som ett *reellt* tal, och vi skall nu visa hur man kan identifiera den abstrakta mängden \mathcal{S} av ekvivalensklasser av kongruenta sträckor med en delmängd av mängden \mathbf{R}_+ av alla positiva reella tal.

En funktion

$$\ell: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}_+,$$

som uppfyller additivitetsvillkoret

$$\ell(a + b) = \ell(a) + \ell(b) \quad \text{för alla } a, b \in \mathcal{S},$$

kallas en *längdfunktion*.

En omedelbar konsekvens av additivitet (och positivitet) är monotonitet, dvs

$$a < b \Rightarrow \ell(a) < \ell(b).$$

Antag nämligen att $a < b$; då finns det ett $c \in \mathcal{S}$ så att $b = a + c$, vilket medför $\ell(b) = \ell(a) + \ell(c) > \ell(a)$.

Sats 2.11.2 Fixera en sträckklass $e \in \mathcal{S}$. Då finns det en unik längdfunktion ℓ som uppfyller $\ell(e) = 1$.

Sträckorna i klassen e kallas *enhetssträckor* med avseende på ℓ .

Bevis. Låt oss kalla positiva reella tal på formen $m2^{-n}$, där m och n är naturliga tal och $m > 0$, för *dyadiska tal*. Enligt resultaten i avsnitt 2.9 existerar alla sträckklasser a som kan bildas ur e genom successiv halvering och addition, och dessa har uppenbarligen formen $a = re$, där r är ett dyadiskt tal. Vi kallar sådana sträckklasser *dyadiska sträckklasser*, och låter \mathcal{S}_d beteckna mängden av alla dyadiska sträckklasser.

Till varje sträckklass a associerar vi nu följande två mängder av dyadiska tal

$$\begin{aligned} L(a) &= \{r \in \mathbf{R} \mid r \text{ är dyadiskt och } re \leq a\} \\ U(a) &= \{r \in \mathbf{R} \mid r \text{ är dyadiskt och } a < re\}. \end{aligned}$$

Vi delar nu upp beviset i ett antal etapper.

Steg 1. $\sup L(a) = \inf U(a)$.

För varje tillräckligt stort naturligt tal n är på grund av den arkimedeiska egenskapen $e \leq 2^n a$, vilket är ekvivalent med att $2^{-n}e \leq a$. Ännu en tillämpning av den arkimedeiska egenskapen visar att det finns ett minsta positivt heltal m så att $m2^{-n}e \leq a$. För de dyadiska talen $r_1 = m2^{-n}$ och $r_2 = (m+1)2^{-n}$ gäller därför att $r_1 \in L(a)$, $r_2 \in U(a)$ och $r_2 - r_1 = 2^{-n}$. De båda mängderna $L(a)$ och $U(a)$ är därför icke-tomma, uppåt resp. nedåt begränsade delmängder av \mathbf{R} , varför $\sup L(a)$ och $\inf U(a)$ existerar. Vidare är $r_1 \leq \sup L(a) \leq \inf U(a) \leq r_2$. Eftersom vi kan göra differensen $r_2 - r_1$ godtyckligt liten genom att välja n tillräckligt stort, följer det att $\sup L(a) = \inf U(a)$.

Steg 2. Varje längdfunktion ℓ med $\ell(e) = 1$ är entydigt bestämd på \mathcal{S}_d .

På grund av additiviteten är

$$2^n \ell(2^{-n}e) = \sum_{i=1}^{2^n} \ell(2^{-n}e) = \ell(e) = 1,$$

dvs $\ell(2^{-n}e) = 2^{-n}$. En ytterligare tillämpning av additivitet ger $\ell(m2^{-n}e) = m\ell(2^{-n}e) = m2^{-n}$. Detta visar att ℓ 's restriktion till \mathcal{S}_d är entydigt bestämd och att $\ell(re) = r$ för alla dyadiska tal r .

Steg 3. Längdfunktionens värde för en godtycklig sträckklass $a \in \mathcal{S}$.

Antag som tidigare att ℓ är en längdfunktion med $\ell(e) = 1$, och låt a vara en godtycklig sträckklass. För $r_1 \in L(a)$ och $r_2 \in U(a)$ är per definition $r_1 e \leq a < r_2 e$, och eftersom längdfunktionen ℓ är monoton måste därför $r_1 = \ell(r_1 e) \leq \ell(a) < \ell(r_2 e) = r_2$. Det följer att

$$\sup L(a) \leq \ell(a) \leq \inf U(a).$$

Eftersom de båda ytterleden är lika, är således talet $\ell(a)$, förutsatt att längdfunktionen finns, entydigt bestämt och lika med $\sup L(a)$.

Steg 4. Definition av längdfunktionen.

På grund av resultatet i steg 3 *definierar* vi nu $\ell(a)$ genom att sätta

$$\ell(a) = \sup L(a) = \inf U(a).$$

Uppenbarligen blir då $\ell(e) = 1$ så det återstår endast att visa att funktionen ℓ är additiv.

Givet två sträckklasser a och b samt ett tillräckligt stort heltal n väljer vi därför tal $r_1 \in L(a)$, $r_2 \in U(a)$, $r_3 \in L(b)$ och $r_4 \in U(b)$ så att $r_2 - r_1 = r_4 - r_3 = 2^{-n}$. Då är per definition $r_1 \leq \ell(a) \leq r_2$ och $r_3 \leq \ell(b) \leq r_4$, och addition av dessa olikheter ger

$$r_1 + r_3 \leq \ell(a) + \ell(b) \leq r_2 + r_4.$$

Å andra sidan är per definition också $r_1e \leq a < r_2a$ och $r_3e \leq b < r_4e$, och det följer genom sträckaddition att $(r_1 + r_3)e \leq a + b < (r_2 + r_4)e$. Definitionen av $\ell(a + b)$ ger oss därför olikheterna

$$r_1 + r_3 \leq \ell(a + b) \leq r_2 + r_4.$$

De båda talen $\ell(a + b)$ och $\ell(a) + \ell(b)$ ligger därför i intervallet $[r_1 + r_3, r_2 + r_4]$, som är av längd $r_2 + r_4 - r_1 - r_3 = 2 \cdot 2^{-n}$. Eftersom n är godtyckligt stort, följer det att de båda talen är lika, dvs.

$$\ell(a + b) = \ell(a) + \ell(b).$$

Därmed är såväl existens som entydighet av en längdfunktion med e som enhetssträcka bevisad. \square

I fortsättningen underförstår vi ofta att vi har fixerat en enhetssträcka, och därmed är också motsvarande längdfunktion ℓ fixerad. Eftersom ℓ är monoton svarar varje $a \in \mathcal{S}$ en-entydigt mot ett positivt reellt tal. Vi kan därför identifiera a med motsvarande reella tal $\ell(a)$ och mängden \mathcal{S} med delmängden $\ell(\mathcal{S})$ av \mathbf{R}_+ . Den additiva strukturen och ordningen på \mathcal{S} svarar då precis mot vanlig addition och ordning i \mathbf{R} . Detta gör det berättigat att kalla det reella talet $\ell(|AB|)$ för *längden av sträckan* AB och att i fortsättningen låta $|AB|$ även beteckna detta reella tal.

En naturlig fråga inställer sig förstås omedelbart: Vilka positiva reella tal är sträcklängder? Är alla tal det, dvs är $\ell(\mathcal{S}) = \mathbf{R}_+$? Det enda vi vet med säkerhet hittills är att alla positiva dyadiska reella tal är längder, och det är apriori tänkbart att ingen sträcka är t ex π lång. Kontinuitetsaxiomet garanterar emellertid att det finns sträckor av alla längder.

Sats 2.11.3* *Låt ℓ vara en längdfunktion. Då är $\ell(\mathcal{S}) = \mathbf{R}_+$, dvs för varje positivt reellt tal k finns det en sträcka av längd k .*

Bevis. Låt r vara en stråle från O , och sätt

$$\mathcal{X} = \{P \in r \mid |OP| \leq k\} \quad \text{och} \quad \mathcal{Y} = r \setminus \mathcal{X} = \{P \in r \mid |OP| > k\}.$$

Då är uppenbarligen $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ett snitt, så det finns en punkt P_0 som separerar \mathcal{X} och \mathcal{Y} . Vi skall visa att $|OP_0| = k$.

Antag därför först att $|OP_0| < k$, och välj ett dyadiskt tal $k' = m2^{-n}$ så att $|OP_0| < k' < k$. Då finns det (enligt beviset för sats 2.11.2) en punkt P på r så att $|OP| = k'$. Det följer att $O - P_0 - P$, så P tillhör dels \mathcal{Y} (enligt definitionen av separerande punkt), dels \mathcal{X} (enligt definitionen av mängden \mathcal{X}). Detta är förstås en motsägelse.

Analogt visas att antagandet $|OP_0| > k$ leder till en motsägelse. Följaktligen är $|OP_0| = k$. \square

Sats 2.11.3 har följande korollarium.

Korollarium * Om O och E är två punkter på en linje a , så finns det en unik bijektion $\zeta: a \rightarrow \mathbf{R}$ som uppfyller

- (i) $\zeta(O) = 0, \zeta(E) = 1$
- (ii) $\zeta(P) > 0 \Leftrightarrow P \in \overrightarrow{OE},$ och
- (iii) $|PQ| = |\zeta(P) - \zeta(Q)|$ för alla $P, Q \in a$.

Bevis. Välj OE som enhetssträcka och sätt

$$\zeta(P) = \begin{cases} |OP| & \text{om } P \in \overrightarrow{OE} \\ 0 & \text{om } P = O \\ -|OP| & \text{om } P \in -\overrightarrow{OE}. \end{cases}$$

Egenskaperna (i), (ii) och (iii) följer omedelbart. Funktionen ζ måste vara unik, ty varje funktion ζ med dessa egenskaper ger upphov till en längdfunktion ℓ på \mathcal{S} med OE som enhetssträcka genom definitionen $\ell(|PQ|) = |\zeta(P) - \zeta(Q)|$, och det finns enligt sats 2.11.3 bara en sådan funktion. \square

Funktionen ζ i korollariet tillåter oss att identifiera en geometrisk linje med den reella tallinjen \mathbf{R} , och det på ett sådant sätt att längdbegreppet på linjen övergår i det naturliga längdbegreppet på \mathbf{R} . Funktionen ζ kallas en *koordinatfunktion*, O är *origo*, OE *enhetssträckan* och \overrightarrow{OE} är *positiva halvaxeln*. Talet $\zeta(P)$ kallas *koordinaten* för punkten P .

Låt a, b och c vara positiva reella tal. Ett nödvändigt villkor för att det skall finnas en triangel med dessa tal som sidolängder är enligt triangelolikheten i avsnitt 2.10 att

$$a < b + c, \quad b < c + a \quad \text{och} \quad c < a + b.$$

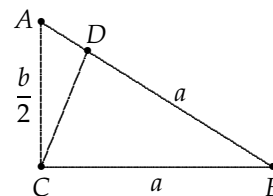
Vi kan nu bevisa att detta villkor också är tillräckligt.

Sats 2.11.4* Låt a, b och c vara positiva reella tal. Det finns en triangel med dessa sidolängder om och endast om vart och ett av talen är mindre än summan av övriga två tal.

I beviset för sats 2.11.4 behöver vi följande enkla hjälpsats.

Lemma Låt a och b vara positiva reella tal. Då finns det en likbent triangel, vars ben har längd a och vars bas är mindre än b .

Bevis. Låt $\triangle ABC$ vara rätvinklig med kateter $|BC| = a$ och $|CA| = b/2$, och avsätt punkten D på hypotenusan så att $|BD| = a$. Enligt triangelolikheten och korollarium 1 till sats 2.10.2 är $a < |AB| < a + b/2$, varför $|AD| < b/2$. Triangelolikheten på $\triangle ADC$ ger därför att $|DC| < b$. Den likbenta triangeln $\triangle BCD$ duger därför. \square

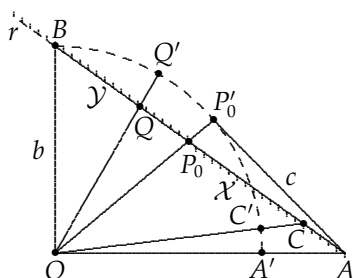


Figur 2.80

Bevis av sats 2.11.4. Nödvändigheten är som sagt redan avklarad. För att visa tillräckligheten kan vi utan inskränkning anta att $c \leq b \leq a$. Villkoret på talen reduceras då till $a < b + c$, eftersom de övriga två olikheterna är automatiskt uppfyllda.

Låt $\triangle AOB$ vara en rätvinklig triangel med kateter $|OA| = a$ och $|OB| = b$. Målsättningen är att visa att det finns en punkt P'_0 i det inre av vinkeln $\angle AOB$ med $|OP'_0| = b$ och $|P'_0A| = c$, ty då är $\triangle OAP'_0$ en sökt triangel.

Sätt därför $r = \overrightarrow{AB}$. För varje punkt P på strålen r samt för $P = A$ betecknar vi med P' den unika punkt på strålen \overrightarrow{OP} som uppfyller $|OP'| = b$. Slutligen definierar vi mängderna $\mathcal{X} = \{P \in r \mid |P'A| \leq c\}$ och $\mathcal{Y} = r \setminus \mathcal{X} = \{P \in r \mid |P'A| > c\}$. (Se fig. 2.81.)



Figur 2.81

Mängden \mathcal{Y} är icke-tom, ty $B \in \mathcal{Y}$ eftersom $B' = B$ och $|BA| > a \geq c$. Mängden \mathcal{X} är också icke-tom, ty enligt lemmat finns det en punkt C på hypotenusan AB så att basen $A'C'$ i den likbenta triangeln $\triangle OA'C'$ är kortare än $b + c - a$, och triangelolikheten ger då $|C'A| < |C'A'| + |A'A| < (b + c - a) + (a - b) = c$, dvs $C \in \mathcal{X}$.

På grund av sats 2.10.6 gäller följande ekvivalens för godtyckliga punkter P och Q på r

$$A - P - Q \Leftrightarrow |P'A| < |Q'A|,$$

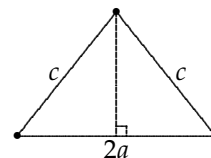
och denna medför att mängden \mathcal{X} ligger mellan A och mängden \mathcal{Y} . Paret $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ är således ett snitt. Vi låter P_0 beteckna den separerande punkten och skall nu slutligen visa att P'_0 är det eftersökta tredje hörnet i den önskade triangeln. Enligt definitionen av $'$ -bildning är $|OP'_0| = b$, så vi har att visa att $|P'_0A| = c$.

Antag därför att $|P'_0A| < c$, och sätt $d = c - |P'_0A|$. Lemmat ger en punkt Q på strålen r så att $A - P_0 - Q$, och triangeln $\triangle OQ'P'_0$ är likbent med baslängd $|Q'P'_0| < d$. På grund av triangelolikheten är $|Q'A| < |Q'P'_0| + |P'_0A| < d + |P'_0A| = c$. Punkten Q tillhör således \mathcal{X} , men detta strider mot att P_0 är separerande punkt.

Analogt visas att antagandet $|P'_0A| > c$ leder till en motsägelse, och därmed är satsen fullständigt bevisad. \square

Korollarium * Låt a och c vara positiva reella tal. Det finns en rätvinklig triangel, vars hypotenusan är c och vars ena katet är a lång, om och endast om $c > a$.

Bevis. Nödvändigheten av villkoret $c > a$ ges av korollarium 1 till sats 2.10.2. Antag omvänt att $c > a$. Då finns det enligt ovanstående sats en likbent triangel med sidelängderna c, c och $2a$. Höjden mot basen i denna triangel delar triangeln i två kongruenta rätvinkliga trianglar med hypotenusan c och en katet a . \square



Figur 2.82

Kontinuitetsaxiomet, liksom det svagare påståendet i sats 2.11.1, handlar om punkter på en linje. Motsvarande utsagor för strålar och vinklar behöver inte postuleras, ty de följer som sats.

Sats 2.11.5 Låt ϕ och ψ vara positiva generaliserade vinkelmått (dvs $\phi, \psi \in \mathcal{V}_g$ och $\phi, \psi > 0$). Då finns det ett positivt heltal n så att $n\phi > \psi$.

Bevis. Det räcker att visa att det finns ett n så att $n\phi > \mathbf{R}/2$, ty om ψ har representationen $\psi = \alpha + m2\mathbf{R}$, där $0 \leq \alpha < 2\mathbf{R}$, så är i så fall $4(m+1)n\phi > \psi$.

Antag därför motsatsen, dvs att $n\phi < \mathbf{R}/2$ för alla n ; vi skall visa att detta leder till en motsägelse. Låt $\triangle AP_0Q$ vara en rätvinklig triangel med rät vinkel vid hörnet P_0 och med $\angle P_0AQ^\circ = \mathbf{R}/2$. På grund av motsatsantagandet finns det då en oändlig följd av punkter P_1, P_2, P_3, \dots efter varandra på sidan P_0Q så att $\angle P_{i-1}AP_i^\circ = \phi$ för $i = 1, 2, 3, \dots$. Enligt korollarierna 1 och 4 till sats 2.10.2 är

$$|AP_0| < |AP_1| < |AP_2| < \dots$$

Sats 2.10.8 tillämpad på trianglarna $\triangle P_{i-1}AP_{i+1}$ ger därför $|P_0P_1| < |P_1P_2| < |P_2P_3| < \dots$. Det följer att $|P_0Q| > |P_0P_n| = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| > n|P_0P_1|$ för alla n , vilket strider mot sats 2.11.1. \square

Följande resultat följer nu ur sats 2.11.5 på precis samma sätt som existensen av en längdfunktion följer ur sats 2.11.1.

Sats 2.11.6 Det finns en unik funktion $g: \mathcal{V}_g \rightarrow \mathbf{R}$ med följande egenskaper:

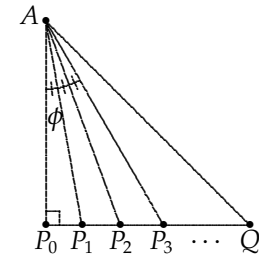
$$\begin{aligned} g(\phi + \psi) &= g(\psi) + g(\phi) && \text{(additivitet)} \\ \phi > \psi &\Rightarrow g(\phi) > g(\psi) && \text{(monotonitet)} \\ g(\mathbf{R}) &= 90 && \text{(normalisering)} \end{aligned}$$

Sats 2.11.6 tillåter oss att identifiera abstrakta vinkelmått med reella tal. Om $g(\angle(r, s)^\circ) = k$, så säger vi att vinkeln $\angle(r, s)$ är k grader (k°). Vi utelämnar i fortsättningen g och låter således $\angle(r, s)^\circ$ även beteckna vinkelns gradtal. Normaliseringen av rätta vinklar till 90° är naturligtvis historiskt betingad, men den är för övrigt helt godtycklig.

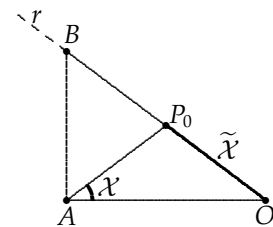
Låt oss slutligen studera motsvarigheten till kontinuitetsaxiomet för vinklar.

Sats 2.11.7* Antag att \mathcal{V}_g är indelad i två icke-tomma disjunkta delmängder \mathcal{X} och \mathcal{Y} , och att $\phi < \psi$ gäller för varje val av $\phi \in \mathcal{X}$ och $\psi \in \mathcal{Y}$. Då finns det ett $\phi_0 \in \mathcal{V}_g$ så att $\phi \in \mathcal{X}$ om $\phi < \phi_0$, och $\phi \in \mathcal{Y}$ om $\phi > \phi_0$.

Bevis. Genom att först göra en translation kan vi antaga att samtliga vinklar i \mathcal{X} är mindre än $\mathbf{R}/2$ och att det finns en vinkel i \mathcal{X} som är större än 0. Låt $\triangle ABO$ vara rätvinklig med rät vinkel vid hörnet A , och definiera en bijektion f mellan mängden $\{\phi \in \mathcal{V} \mid 0 < \phi < \mathbf{R}\}$ och hypotenusan OB genom att låta $Q = f(\phi)$ vara den punkt på hypotenusan för vilken $\angle OAQ^\circ = \phi$. (Se fig. 2.84.)



Figur 2.83



Figur 2.84

Sätt $r = \overrightarrow{OB}$. Låt $\tilde{\mathcal{X}}$ vara bildmängden under f av alla positiva vinklar i \mathcal{X} , dvs $\tilde{\mathcal{X}} = \{f(\phi) \mid \phi \in \mathcal{X} \text{ och } \phi > 0\}$, och sätt slutligen $\tilde{\mathcal{Y}} = r \setminus \tilde{\mathcal{X}}$. Då är $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{Y}})$ ett snitt av r ; låt P_0 vara snittets separerande punkt. Eftersom punkter nära B på hypotenusan tillhör mängden $\tilde{\mathcal{Y}}$, måste P_0 ligga på hypotenusan OB . Vi kan därför sätta $\phi_0 = f^{-1}(P_0)$ och det är klart att ϕ_0 uppfyller villkoren i satsen. \square

Med hjälp av sats 2.11.7 visar man nu lätt (jmf sats 2.11.3):

Sats 2.11.8* För varje reellt tal k i intervallet $]0, 180[$ finns det en vinkel vars gradtal är k .

Korollarium * Mängden \mathcal{V}_g av alla generaliserade vinkelmått avbildas bijektivt på mängden \mathbf{R} av alla reella tal av funktionen g , varvid addition och ordning i \mathcal{V}_g svarar mot vanlig addition och ordning i \mathbf{R} .

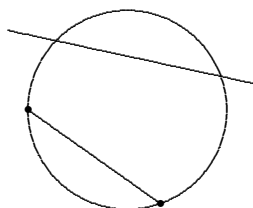
ÖVNINGAR

- 2.33 Visa att kontinuitetsaxiomet är sant i den Cartesianska modellen.
- 2.34 I den konstruktiva modellen finns det inga sträckor av längd $\sqrt[3]{2}$ eller π . Vilken slutsats kan dras beträffande giltigheten av kontinuitetsaxiomet i modellen?
- 2.35 Bevisa att kontinuitetsaxiomet ej följer ur sats 2.11.1.
- 2.36 Antag att ℓ och ℓ' är två längdfunktioner (som svarar mot olika val av enhetssträckor). Bevisa att det finns en konstant c så att $\ell' = c\ell$.

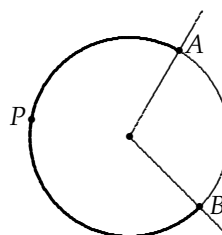
2.12 Cirklar

Låt O vara en punkt och r ett positivt tal. Mängden av alla punkter P som uppfyller $|OP| = r$ kallas en *cirkel* med *medelpunkt* O och *radie* r , och betecknas $\mathcal{C}(O; r)$. Ordet *radie* används också för att beteckna *sträckan* mellan medelpunkten och en godtycklig punkt på cirkeln.

Varje linje genom medelpunkten O till cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$ skär (enligt axiom K1) cirkeln i två punkter A och B , en på vardera sidan av O . Sträckan AB kallas en *diameter* i cirkeln, och punkterna A och B säges vara *diametralt* belägna. Tydligen är $|AB| = 2r$. Talet $2r$ kallas också cirkelns *diameter*.



Figur 2.85 Korda och sekant



Figur 2.86 Cirkelbåge \widehat{APB}

Om A och B är två godtyckliga punkter på en cirkel kallas sträckan AB en *korda* och linjen \overline{AB} en *sekant* till cirkeln.

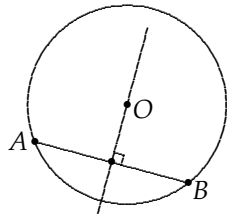
Låt A och B vara två punkter på cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$. Om punkterna ej är diametralt belägna så är $\angle AOB$ en vinkel; låt Ω_+ och Ω_- beteckna det inre resp. det yttre av denna vinkel. Om AB är en diameter så låter vi istället Ω_+ och Ω_- beteckna de båda sidorna av AB . Den del av cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$ som ligger i Ω_+ resp. Ω_- kallas en *cirkelbåge* med ändpunkterna A och B . Det finns alltså två cirkelbågar med A och B som ändpunkter; om P är en punkt på en av dessa så betecknas motsvarande cirkelbåge med \widehat{APB} (eller \widehat{BPA}).

En cirkelbåge med diametralt belägna ändpunkter kallas förstas *halvcirkel*.

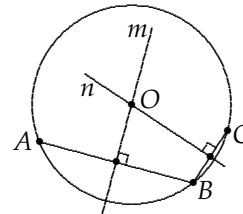
Mängden av alla punkter P med $|OP| < r$ inklusive medelpunkten O utgör det *inre* av cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$, och mängden av alla punkter P med $|OP| > r$ är cirkelns *yttre*.

Sats 2.12.1 *Medelpunkten O i cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$ ligger på varje kordas mittpunktsnormal.*

Bevis. Låt AB vara en korda. Då är $|OA| = |OB|$, så det följer omedelbart ur sats 2.10.5 att O ligger på mittpunktsnormalen till AB . \square



Figur 2.87



Figur 2.88

Det är inte helt självklart att en cirkels medelpunkt och radie är entydigt bestämda av cirkeln. Enligt cirkeldefinitionen har varje cirkel en representation på formen $\mathcal{C}(O; r) = \{P \mid |OP| = r\}$, men det skulle ju kunna tänkas att det finnes olika punkter O, O' och/eller tal r, r' med $\mathcal{C}(O, r) = \mathcal{C}(O', r')$. Det första påståendet i nedanstående korollarium till sats 2.12.1 utesluter emellertid den möjligheten.

Korollarium (i) *En cirkels medelpunkt och radie är entydigt bestämda.*

(ii) *Genom tre punkter går det högst en cirkel.*

(iii) *Tre punkter på en cirkel kan inte ligga på en linje.*

Bevis. Låt A, B och C vara tre punkter på cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$, och låt m och n beteckna mittpunktsnormalerna till kordorna AB och BC (jmf fig. 2.88). Linjerna m och n är skilda, ty $A \neq C$. Enligt sats 2.12.1 ligger O på såväl m som n , varför O är den unika skärningspunkten till dessa linjer. Detta visar att medelpunkten till cirkeln är entydigt bestämd av (tre punkter vilka som helst på) cirkeln, och det följer då också att radien ($= |OA|$) är entydigt bestämd. Därmed är påståendena (i) och (ii) bevisade.

Slutligen kan inte A, B och C ligga i linje, ty i så fall vore m och n parallella, vilket strider mot att linjerna skär varandra i O . \square

I euklidisk geometri gäller också följande påstående: För varje trippel av punkter som inte ligger i linje finns det en unik cirkel som går genom punkterna. I nästa avsnitt skall vi visa att detta påstående är ekvivalent med det euklidiska parallellaxiomet, så det är alltså ej en sats i neutral geometri.

Följande två satser handlar om kordor.

Sats 2.12.2 Om AB är en korda i cirkeln $C(O; r)$, så är $|AB| \leq 2r$ med likhet om och endast om AB är en diameter.

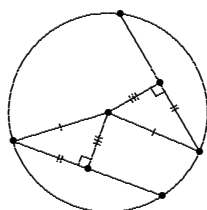
Bevis. Om AB inte är en diameter så är $|AB| < 2r$ på grund av triangelolikheten tillämpad på $\triangle AOB$. \square

Med avståndet från en korda till medelpunkten O i en cirkel menas förstås längden av sträckan OP_0 , där P_0 är fotpunkten för normalen från O mot kordan. (Om $P_0 = O$, dvs om kordan är en diameter, definierar vi avståndet som 0 och skriver $|OP_0| = 0$ trots att OP_0 inte är en sträcka.)

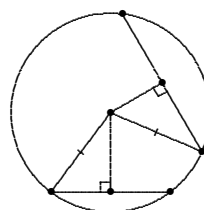
Sats 2.12.3 (i) Två kordor i en cirkel är kongruenta om och endast om de har samma avstånd till medelpunkten.

(ii) Av två icke-kongruenta kordor i en cirkel har den längre kordan det kortare avståndet till medelpunkten.

Bevis.



Figur 2.89



Figur 2.90

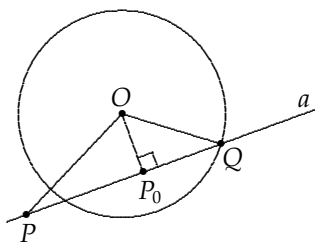
(i) På grund av sats 2.12.2 räcker det att betrakta kordor som ej är diametrar, och påståendet följer då omedelbart av korollarium 5 (i) till sats 2.10.2. Jmf fig. 2.89.

(ii) Påståendet följer av sats 2.12.2 om en av kordorna är en diameter, och av korollarium 5 (ii) till sats 2.10.2 om ingen av kordorna är en diameter. \square

Vi övergår nu till att studera skärningspunkter mellan linjer och cirklar.

Sats 2.12.4* Låt P_0 vara fotpunkten på linjen a för normalen från medelpunkten i cirkeln $C(O; r)$. Då gäller:

- (i) $|OP_0| > r \Leftrightarrow$ linjen a skär ej cirkeln
 \Leftrightarrow linjen a ligger helt i det yttre av cirkeln.
- (ii) $|OP_0| = r \Leftrightarrow$ linjen a skär cirkeln i exakt en punkt, nämligen P_0 .
- (iii) $|OP_0| < r \Leftrightarrow$ linjen a skär cirkeln i exakt två punkter
 \Leftrightarrow linjen a innehåller inre punkter till cirkeln.



Figur 2.91

Bevis. Enligt korollariet till sats 2.12.1 finns det högst två skärningspunkter mellan a och cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$.

För varje punkt $P \neq P_0$ på linjen a gäller att $|OP| > |OP_0|$. Härav följer med en gång följande implikationer:

- (a) $|OP_0| > r \Rightarrow$ linjen a ligger helt i det yttre av cirkeln.
- (b) $|OP_0| = r \Rightarrow$ linjen a skär cirkeln endast i punkten P_0 .
- (c) Linjen innehåller en inre punkt P till cirkeln $\Rightarrow |OP_0| < r$.

De två implikationerna

- (d) Linjen ligger helt i det yttre \Rightarrow linjen skär ej cirkeln
- (e) $|OP_0| < r \Rightarrow$ linjen innehåller en inre punkt till cirkeln

gäller förstås trivialt.

Vi skall nu slutligen visa följande implikation:

- (f) $|OP_0| < r \Rightarrow$ linjen a skär cirkeln i två punkter.

Om $P_0 = O$, dvs om a går genom medelpunkten, så skär a cirkeln i två diametralt belägna punkter. Antag därför att $P_0 \neq O$ och att $|OP_0| < r$. Då finns det enligt korollariet till sats 2.11.4 en punkt Q så att $\triangle OP_0Q$ är rätvinklig vid hörnet P_0 och så att hypotenusan $|OQ| = r$. Det följer att Q ligger på linjen a och på cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$. Låt nu Q' vara den punkt på a för vilken P_0 är mittpunkt till sträckan QQ' ; då är $\triangle OP_0Q \equiv \triangle OP_0Q'$, så det följer att även Q' är en skärningspunkt. Därmed är implikationen (f) bevisad, eftersom det inte kan finnas fler än två skärningspunkter.

Genom att kombinera implikationerna (a)–(f) får vi (i)–(iii). □

En linje som skär en cirkel i exakt en punkt kallas en *tangent* till cirkeln, och skärningspunkten kallas *tangeringspunkt*.

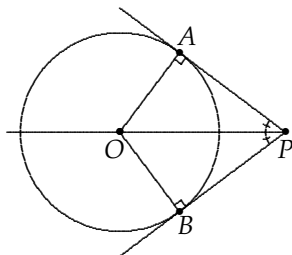
Ur sats 2.12.4 följer nu direkt:

Sats 2.12.5 (i) Genom varje punkt på en cirkel går en unik tangent.

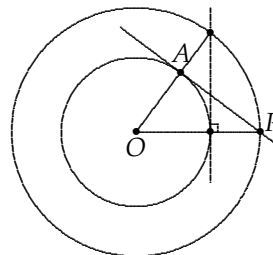
(ii) Tangenten är vinkelrät mot radien till tangeringspunkten.

För tangenter från punkter utanför en cirkel gäller följande resultat.

Sats 2.12.6* Varje punkt P i det yttre av en cirkel med medelpunkt O ligger på exakt två tangenter. Om A och B är de två tangeringspunkterna, så är $PA \equiv PB$ och strålen \overrightarrow{PO} är bisektris till vinkeln $\angle APB$.



Figur 2.92



Figur 2.93

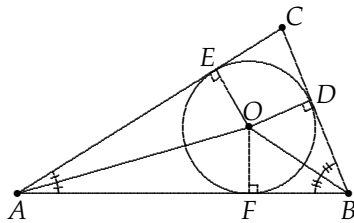
Bevis. Låt r vara cirkelns radie. Eftersom $|PO| > r$ finns det, enligt korollariet till sats 2.11.4, en punkt A så att $\triangle OAP$ är rätvinklig vid A och $|OA| = r$. Låt B vara den punkt på andra sidan om linjen \overline{OP} för vilken $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$. Sats 2.12.5 medför att linjerna \overline{PA} och \overline{PB} tangerar cirkeln i punkterna A resp. B , och av konstruktionen följer att $PA \equiv PB$ och att \overline{PO} är en bisektris till $\angle APB$. Det kan inte finnas någon tredje tangent med tangeringspunkt C , ty i så fall skulle $\triangle OCP \equiv \triangle OAP$ trots att $C \neq A$ och $C \neq B$, vilket är omöjligt. \square

I fig. 2.93 visas en passare-linjal-konstruktion av tangeringspunkten A .

Låt $\triangle ABC$ vara en triangel. En cirkel med medelpunkt i det inre av triangeln och som tangerar samtliga sidolinjer kallas en *inskriven cirkel* till triangeln.

Sats 2.12.7 *Varje triangel har en unik inskriven cirkel. Medelpunkten till denna ligger på bisektriserna till triangelns vinklar. Dessa skär således varandra i en punkt.*

Bevis. På grund av sats 2.12.6 måste medelpunkten ligga på samtliga bisektriser. Det följer därför att inskrivna cirkeln är unik om den existerar, vilket vi nu skall visa.



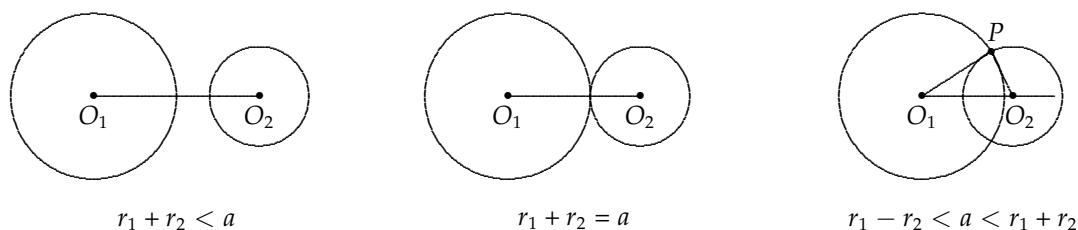
Figur 2.94

Låt $\triangle ABC$ vara en godtycklig triangel. Bisektriserna till $\angle A$ och $\angle B$ skär varandra i en punkt O . Låt D , E och F beteckna fotpunkterna på BC , CA och AB för normalerna från O . På grund av S-V-V-kriteriet är $\triangle AOE \equiv \triangle AOF$ och $\triangle BOF \equiv \triangle BOD$, varför $|OE| = |OF| = |OD| = r$. Cirkeln $C(O; r)$ tangerar således samtliga tre sidolinjer i triangeln och är därför en inskriven cirkel. \square

Vi avslutar med att studera skärningspunkter till två cirklar. Två cirklar kallas *koncentriska* om de har samma medelpunkt. Det är klart att koncentriska cirklar med olika radier saknar gemensamma punkter, så vi kan därför inskränka oss till att betrakta icke-koncentriska cirklar. Följande sats är väsentligen bara en omformulering av sats 2.11.4.

Sats 2.12.8* *Låt $C(O_1; r_1)$ och $C(O_2; r_2)$ vara två icke-koncentriska cirklar med $r_1 \geq r_2$. Sätt $a = |O_1O_2|$ då gäller:*

- (i) *Om $r_1 + r_2 < a$ så ligger cirkelarna helt i varandras yttre, och de skär således inte varandra.*
- (ii) *Om $r_1 + r_2 = a$ så har cirkelarna en gemensam punkt P_0 som ligger på sträckan O_1O_2 . De båda cirkelarna har gemensam tangent i punkten P_0 .*
- (iii) *Om $r_1 - r_2 < a < r_1 + r_2$ så skär cirkelarna varandra i två punkter P och Q . Linjen $\overline{O_1O_2}$ är mittpunktsnormal till den gemensamma kordan PQ .*
- (iv) *Om $r_1 - r_2 = a$ så har cirkelarna en gemensam punkt P_0 som ligger på strålen $-\overline{O_2O_1}$. Vidare har cirkelarna en gemensam tangent i punkten P_0 .*
- (v) *Om $r_1 - r_2 > a$ så ligger cirkeln $C(O_2; r_2)$ helt i det inre av den andra cirkeln.*



Figur 2.95

Bevis. Cirkelarna skär varandra i en punkt P utanför linjen $\overline{O_1O_2}$ om och endast om a , r_1 och r_2 är sidolängder i en triangel, vilket inträffar om och endast om $r_1 - r_2 < a < r_1 + r_2$. I så fall finns det också ytterligare en skärningspunkt Q på motsatt sida om linjen $\overline{O_1O_2}$ och så att $\overline{O_1O_2}$ är mittpunktsnormal till sträckan PQ .

Om cirkelarna endast har en gemensam punkt P_0 , så måste denna alltså ligga på strålen $\overrightarrow{O_1O_2}$, och då är antingen $|O_1P_0| + |P_0O_2| = |O_1O_2|$ eller $|O_1O_2| + |O_2P_0| = |O_1P_0|$, dvs $r_1 + r_2 = a$ eller $a + r_2 = r_1$.

Antag att $r_1 + r_2 < a$. För varje punkt P på $\mathcal{C}(O_2; r_2)$ gäller då

$$|O_1P| \geq |O_1O_2| - |O_2P| = a - r_2 > r_1,$$

dvs P ligger i det yttre av $\mathcal{C}(O_1; r_1)$. Analogt fås att varje punkt på $\mathcal{C}(O_1; r_1)$ ligger i det yttre av $\mathcal{C}(O_2; r_2)$.

Om $a < r_1 - r_2$ så får vi istället för P på $\mathcal{C}(O_2; r_2)$ att

$$|O_1P| \leq |O_1O_2| + |O_2P| = a + r_2 < r_1,$$

dvs P ligger i det inre av cirkeln $\mathcal{C}(O_1; r_1)$. □

Två cirklar med endast en skärningspunkt säges *tangera* varandra i skärningspunkten.

ÖVNINGAR

2.37 Visa att det inre av en cirkel är en konvex mängd.

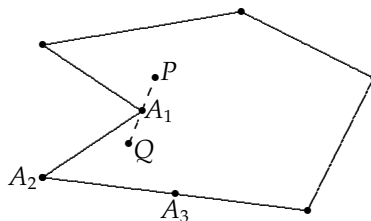
2.38 Visa att en cirkelbåge ligger helt på en sida om kordan mellan cirkelbågens ändpunkter.

2.39 Genomför i detalj konstruktionen i fig. 2.93 av tangenten till en cirkel från en yttre punkt.

2.13 Triangelns vinkelsumma och parallellaxiomet

I det här avsnittet skall vi studera triangelns vinkelsumma och sambandet mellan vinkelsumman och det euklidiska parallellaxiomet. Huvudresultatet är att vinkelsumman är mindre än eller lika med $2\mathbf{R}$, och att likhet råder om och endast om det euklidiska parallellaxiomet gäller.

Vi börjar med att definiera vinkelsumman för godtyckliga enkla polygoner. Definitionen kompliceras något av att icke-konvexa polygoner har hörn som måste tilldelas ett vinkelmått i intervallet $2\mathbf{R}$ till $4\mathbf{R}$.



Figur 2.96

Konkavt hörn A_1 , konvext hörn A_2 , rakt hörn A_3

Låt $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ vara en enkel polygon. Hörnet A_i kallas *konkavt* om det finns två punkter P, Q så att $P - A_i - Q$ och sträckorna PA_i och A_iQ båda ligger i det inre av π . Hörnet A_i kallas *rakt* om de tre konsekutiva hörnen A_{i-1}, A_i och A_{i+1} ligger i linje. Slutligen kallas hörnet *konvext* om det inte är konkavt eller rakt. Vi sätter

$$\theta(A_i) = \begin{cases} \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}^\circ, & \text{om } A_i \text{ är konvext} \\ 2\mathbf{R} & \text{om } A_i \text{ är rakt} \\ 4\mathbf{R} - \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}^\circ, & \text{om } A_i \text{ är konkavt,} \end{cases}$$

och kallar summan

$$\text{vinkelsum}(\pi) = \sum_{i=1}^n \theta(A_i)$$

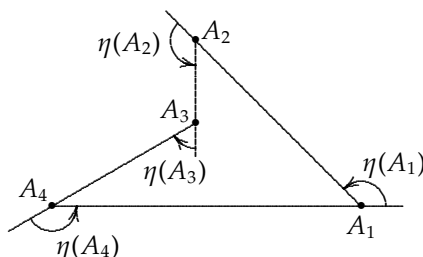
för polygonens *vinkelsumma*.

En avsevärd nackdel med vinkelsumman är att den inte är additiv, dvs om π sönderdelas i två polygoner π_1 och π_2 , så är inte $\text{vinkelsum}(\pi)$ lika med summan av $\text{vinkelsum}(\pi_1)$ och $\text{vinkelsum}(\pi_2)$. Vi skall därför definiera ett vinkeluttryck som är nära besläktat med $\text{vinkelsum}(\pi)$ och som är additivt.

Sätt för $\pi = A_1A_2 \dots A_n$

$$\eta(A_i) = 2\mathbf{R} - \theta(A_i).$$

Om man "går runt" polygonen π i den riktning som ges av hörnens numrering, så mäter kvantiteten $\eta(A_i)$ storleken av vridningen vid hörnet A_i då man svänger av från sidan $A_{i-1}A_i$ till sidan A_iA_{i+1} . Se fig. 2.97. När man gått runt polygonen ett varv har man därför genomfört en vridning som är lika med $\sum_i \eta(A_i)$. I euklidisk geometri är denna summa, som vi snart skall bevisa, lika med ett helt varv eller $4\mathbf{R}$. Avvikelsen från $4\mathbf{R}$ (i neutral geometri) är ett intressant mått.



Figur 2.97

Vi definierar därför

$$\text{def}(\pi) = \sum_{i=1}^n \eta(A_i) - 4\mathbf{R} = (n-2) \cdot 2\mathbf{R} - \text{vinkelsum}(\pi),$$

och kallar kvantiteten $\text{def}(\pi)$ för polygonens *defekt*.

Kongruenta polygoner har förstås samma vinkelsumma och samma defekt. Vidare är det uppenbart från definitionen att

$$\text{vinkelsum}(\pi) > 0$$

eller ekvivalent, att

$$\text{def}(\pi) < (n-2) \cdot 2\mathbf{R}.$$

Däremot har vi inte någon trivial nedre gräns för defekten, så ett av våra mål är att visa att $\text{def}(\pi) \geq 0$.

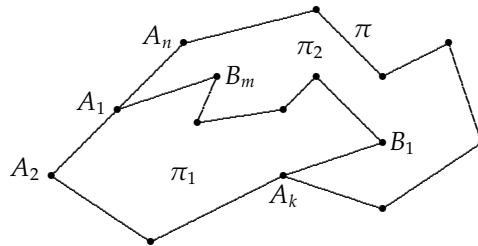
För trianglar ges förstås vinkelsumma och defekt av uttrycken

$$\begin{aligned} \text{vinkelsum}(\triangle ABC) &= \angle A^\circ + \angle B^\circ + \angle C^\circ, & \text{och} \\ \text{def}(\triangle ABC) &= 2\mathbf{R} - \text{vinkelsum}(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Sats 2.13.1 Om π_1 och π_2 är en sönderdelning av den enkla polygonen π , så är

$$\text{def}(\pi) = \text{def}(\pi_1) + \text{def}(\pi_2).$$

Bevis. Observera att en polygons defekt inte ändras om man tillfogar nya raka hörn på polygonens sidor (däremot ökar naturligtvis vinkelsumman med $2\mathbf{R}$ för varje nytt rakt hörn.) Genom att eventuellt tillfoga ett eller två raka hörn till polygonen π kan vi därför antaga att $\pi = A_1A_2 \dots A_n$, $\pi_1 = A_1 \dots A_k B_1 \dots B_m$ och $\pi_2 = A_1 B_m \dots B_1 A_k A_{k+1} \dots A_n$, där B_1, B_2, \dots, B_m är punkter i det inre av π . Se fig. 2.98.



Figur 2.98

Hörnen A_1 och A_k är då hörn i samtliga tre polygoner, och man verifierar lätt att

$$\theta_\pi(A_j) = \theta_{\pi_1}(A_j) + \theta_{\pi_2}(A_j) \quad \text{för } j = 1 \text{ och } j = k.$$

(Här och i fortsättningen betecknar $\theta_\sigma(A)$ vinkelmåttet för hörnet A i polygonen σ .) För de övriga hörnen gäller

$$\begin{aligned} \theta_\pi(A_j) &= \begin{cases} \theta_{\pi_1}(A_j) & \text{för } j = 2, \dots, k-1 \\ \theta_{\pi_2}(A_j) & \text{för } j = k+1, \dots, n \end{cases} \\ \theta_{\pi_1}(B_j) + \theta_{\pi_2}(B_j) &= 4\mathbf{R} \quad \text{för } j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Om ovanstående relationer uttrycks med hjälp av kvantiteten $\eta_\sigma(A) = 2\mathbf{R} - \eta_\sigma(A)$, får man

$$\begin{aligned} \eta_{\pi_1}(A_j) + \eta_{\pi_2}(A_j) &= \eta_\pi(A_j) + 2\mathbf{R}, & j = 1 \text{ och } j = k \\ \eta_{\pi_1}(A_j) &= \eta_\pi(A_j), & j = 2, \dots, k-1 \\ \eta_{\pi_2}(A_j) &= \eta_\pi(A_j), & j = k+1, \dots, n \\ \eta_{\pi_1}(B_j) + \eta_{\pi_2}(B_j) &= 0, & j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Summan $\sum \eta_{\pi_1}(C) + \sum \eta_{\pi_2}(C)$, där summorna tas över alla hörn C i π_1 resp. π_2 , överensstämmer med summan över alla termer i vänsterleden ovan, så det följer att

$$\text{def}(\pi_1) + \text{def}(\pi_2) = \sum_{j=1}^n \eta_i(A_j) + 2 \cdot 2\mathbf{R} - 2 \cdot 4\mathbf{R} = \text{def}(\pi). \quad \square$$

Varje sönderdelning av π i n polygoner $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ kan erhållas genom $n-1$ stycken successiva sönderdelningar av polygoner i två polygoner. Sats 2.13.1 har därför följande korollarium.

Korollarium Om $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n$, så är

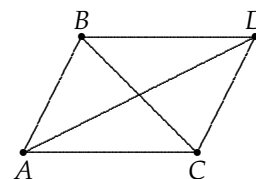
$$\text{def}(\pi) = \text{def}(\pi_1) + \text{def}(\pi_2) + \dots + \text{def}(\pi_n).$$

Nästa punkt på programmet är att visa olikheten $\text{def}(\pi) \geq 0$. För den skull behöver vi följande lemma.

Lemma 2.13.1 Antag att δ är någon triangels defekt. Då finns det trianglar med samma defekt δ och godtyckligt liten vinkel, dvs för varje $\epsilon > 0$ finns det en triangel $\triangle EFG$ med defekt δ och med $\angle E^\circ < \epsilon$.

Bevis. Låt $\triangle ABC$ vara en triangel med defekt δ och sätt $\alpha = \angle A^\circ$. Det räcker att visa att det finns en triangel $\triangle A_1B_1C_1$ med samma defekt och med $\angle A_1^\circ \leq \alpha/2$, ty genom iteration får man då en triangel $\triangle A_nB_nC_n$ med defekt δ och med $\angle A_n^\circ \leq 2^{-n}\alpha$, och på grund av den arkimediska egenskapen (sats 2.11.5) är $2^{-n}\alpha < \epsilon$ bara n är tillräckligt stort.

Låt därför D vara den punkt som gör $ABDC$ till en parallelogram. Eftersom diagonalen i en parallelogram delar densamma i två kongruenta trianglar (en konsekvens av sats 2.8.4) och eftersom kongruenta trianglar har samma defekt, är på grund av sats 2.13.1



Figur 2.99

$$\text{def}(\triangle ACD) = \text{def}(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \text{def}(ABDC) = \text{def}(\triangle ABC) = \delta.$$

Vidare är $\angle BAD^\circ + \angle CAD^\circ = \angle BAC^\circ = \alpha$, varför en av vinklarna $\angle BAD$ och $\angle CAD$ till storleken är mindre än eller lika med $\alpha/2$. Den ena av de båda trianglarna $\triangle ABD$ och $\triangle ACD$ duger därför som $\triangle A_1B_1C_1$. \square

Vi kan nu bevisa att triangelns vinkelsumma är mindre än eller lika med $2\mathbf{R}$.

Sats 2.13.2 För varje enkel polygon är defekten icke-negativ. För varje triangel $\triangle ABC$ gäller därför speciellt att

$$0 \leq \text{def}(\triangle ABC) < 2\mathbf{R},$$

eller ekvivalent, att

$$0 < \text{vinkelsum}(\triangle ABC) \leq 2\mathbf{R}.$$

Bevis. Vi börjar med att visa resultatet för trianglar. Enligt definitionen är vinkelsumman positiv. Antag att

$$\text{vinkelsum}(\triangle ABC) = 2\mathbf{R} + \alpha,$$

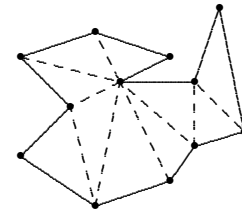
där $\alpha > 0$. På grund av lemma 2.13.1 finns det då en triangel $\triangle A'B'C'$ med samma vinkelsumma och med $\angle A'^{\circ} < \alpha$. Det följer att

$$\angle B'^{\circ} + \angle C'^{\circ} = 2\mathbf{R} + \alpha - \angle A'^{\circ} > 2\mathbf{R}.$$

Detta strider emellertid mot korollarium 1 till sats 2.10.1. Följaktligen är $\alpha \leq 0$, dvs $0 < \text{vinkelsum}(\triangle ABC) \leq 2\mathbf{R}$, vilket är ekvivalent med att $0 \leq \text{def}(\triangle ABC) < 2\mathbf{R}$.

Det allmänna påståendet för polygoner följer nu av sats 2.13.1, ty varje enkel polygon med n hörn kan enligt sats 2.5.4 sönderdelas i $n-2$ stycken trianglar. Jmf fig. 2.100.

□



Figur 2.100

Beviset för lemma 2.13.1 och därmed också beviset för sats 2.13.2 utnyttjar den arkimediska egenskapen. Detta är oundvikligt, ty man kan konstruera icke-arkimediska geometrier i vilka det finns trianglar med en vinkelsumma som överstiger $2\mathbf{R}$.

Korollarium I varje triangel är yttervinkeln vid ett hörn större än eller lika med summan av de motstående hörnens inre vinklar. Likhet råder om och endast om triangelns vinkelsumma är $2\mathbf{R}$.

Bevis. Yttervinkeln vid C i $\triangle ABC$ är till storleken

$$2\mathbf{R} - \angle C^{\circ} = (2\mathbf{R} - \text{vinkelsum}(\triangle ABC)) + \angle A^{\circ} + \angle B^{\circ} \geq \angle A^{\circ} + \angle B^{\circ}$$

med likhet om och endast om vinkelsumman är lika med $2\mathbf{R}$.

□

Sats 2.13.3 Låt π och σ vara två enkla polygoner och antag att $\partial\sigma \subseteq \partial\pi \cup \text{inre}(\pi)$, dvs att randen av σ ligger helt inom eller på π . Då är

$$\text{def}(\sigma) \leq \text{def}(\pi).$$

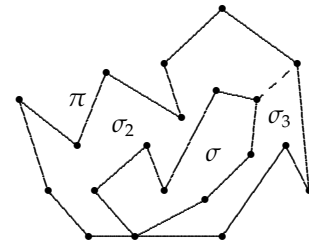
Om $\text{def}(\pi) = 0$, så är alltså speciellt $\text{def}(\sigma) = 0$.

Bevis. Genom att eventuellt förbinda en eller två punkter på randen av σ med randen av π erhåller man en sönderdelning av π i ett antal polygoner där σ ingår:

$$\pi = \sigma + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m.$$

Satserna 2.13.1 och 2.13.2 ger nu

$$\text{def}(\pi) = \text{def}(\sigma) + \text{def}(\sigma_2) + \cdots + \text{def}(\sigma_m) \geq \text{def}(\sigma). \quad \square$$



Figur 2.101

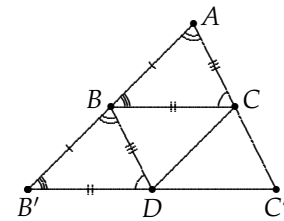
Antag nu att det finns en polygon vars defekt är 0. Då har på grund av sats 2.13.3 alla tillräckligt små trianglar också defekt 0 (ty om en triangel är tillräckligt liten, ryms en kongruent kopia av den innanför den givna polygonen). Vi skall nu visa ett lemma, som tillsammans med den arkimediska egenskapen medför att också godtyckligt stora trianglar har defekt 0.

Först behöver vi emellertid införa ett välbekant begrepp.

Två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kallas *likformiga*, vilket betecknas $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, om motsvarande vinklar är kongruenta, dvs om $\angle A \equiv \angle A'$, $\angle B \equiv \angle B'$ och $\angle C \equiv \angle C'$.

Lemma 2.13.2 Om vinkelsumman i $\triangle ABC$ är $2\mathbf{R}$, så finns det en likformig triangel $\triangle A'B'C'$ med $|A'B'| = 2|AB|$, $|B'C'| = 2|BC|$ och $|C'A'| = 2|CA|$.

Bevis. Välj B' på strålen \overrightarrow{AB} så att $BB' \equiv AB$, och låt $\triangle BB'D$ vara den kongruenta kopia av $\triangle ABC$ som har D på samma sida om linjen \overline{AB} som C . På grund av att vinkelsumman i $\triangle ABC$ är $2\mathbf{R}$, är $\angle CBD \equiv \angle BCA$. Enligt S-V-S-kriteriet är därför $\triangle CBD \equiv \triangle BCA$. Vi kan därför dra slutsatsen att vinkeln mellan strålarna \overrightarrow{CD} och $-\overrightarrow{CA}$ är kongruent med $\angle BAC$ samt att vinkeln mellan strålarna \overrightarrow{DC} och $-\overrightarrow{DB'}$ är kongruent med $\angle ABC$. Enligt V-S-V-kriteriet skär därför strålarna $-\overrightarrow{CA}$ och $-\overrightarrow{DB'}$ varandra i en punkt C' och $\triangle CDC' \equiv \triangle ABC$. Därmed följer att $\triangle AB'C'$ är likformig med $\triangle ABC$ och att sidorna i $\triangle AB'C'$ är dubbelt så långa som motsvarande sidor i $\triangle ABC$. \square

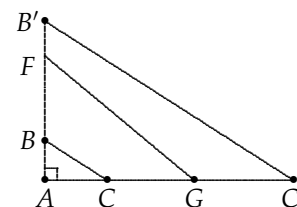


Figur 2.102

Lemma 2.13.3 Om det finns en rätvinklig triangel med vinkelsumma $2\mathbf{R}$, så har alla rätvinkliga trianglar vinkelsumma $2\mathbf{R}$.

Bevis. Antag att $\triangle ABC$ är en rätvinklig triangel med defekt 0 och med rät vinkel vid hörnet A , och låt $\triangle EFG$ vara en godtycklig rätvinklig triangel med rät vinkel vid E . Vi skall visa att $\text{def}(\triangle EFG) = 0$. Genom att ersätta den sistnämnda triangeln med en kongruent kopia kan vi anta att $E = A$, att F ligger på strålen \overrightarrow{AB} och att G ligger på strålen \overrightarrow{AC} .

Genom att använda lemma 2.13.2 ett upprepat antal gånger erhåller vi punkter B' och C' på \overrightarrow{AB} resp. \overrightarrow{AC} så att $\triangle AB'C'$ är likformig med $\triangle ABC$ och så att $|AB'| = 2^n|AB|$ och $|AC'| = 2^n|AC|$. Det följer att $A - F - B'$ och $A - G - C'$ bara n är tillräckligt stort. Likformiga trianglar har givetvis samma defekt, så $\text{def}(\triangle AB'C') = 0$, och eftersom randen av $\triangle AFG$ ligger på och i det inre av $\triangle AB'C'$ följer det ur sats 2.13.3 att $\text{def}(\triangle AFG) = 0$. Därmed är lemmat bevisat. \square



Figur 2.103

Sats 2.13.4 Antingen har alla enkla polygoner positiv defekt, eller också har alla enkla polygoner defekt 0.

Bevis. Satsen kan ekvivalent formuleras på följande sätt: Om någon polygon har defekt 0, så har alla polygoner defekt 0.

Antag därför att det finns en polygon med defekt 0. I det inre av polygonen kan vi placera en liten rätvinklig triangel, och sats 2.13.3 medför att denna triangel också har defekt 0. På grund av lemma 2.13.3 har därför varje rätvinklig triangel defekt 0. Varje triangel kan sönderdelas i två rätvinkliga trianglar med hjälp av en höjd (mot den längsta sidan). Additiviteten hos defekten (korollarier till sats 2.13.1) medför därför att varje triangel har defekt 0. Varje polygon kan slutligen sönderdelas i trianglar, och eftersom defekten är additiv har därför varje polygon defekt 0. \square

Av lemma 2.13.2 följer speciellt att det finns två likformiga, inkongruenta trianglar om det finns en triangel med vinkelsumma $2\mathbf{R}$ (dvs om alla trianglar har vinkelsumma $2\mathbf{R}$). Omvändningen till detta påstående gäller också (se sats 2.13.6 nedan).

Låt oss för ett ögonblick anta att alla enkla polygoner har positiv defekt (dvs att geometrin är hyperbolisk). Defekten har i så fall följande egenskaper:

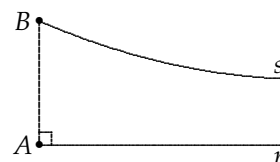
- (i) $\text{def}(\pi) > 0$ för alla enkla polygoner π
- (ii) $\pi \equiv \pi' \Rightarrow \text{def}(\pi) = \text{def}(\pi')$
- (iii) $\pi = \pi_1 + \pi_2 \Rightarrow \text{def}(\pi) = \text{def}(\pi_1) + \text{def}(\pi_2)$.

Detta innebär att defekten har samtliga egenskaper som en areafunktion bör ha. I hyperbolisk geometri definieras därför lämpligen arean av en polygon π som $\text{def}(\pi)$.

Vi skall nu övergå till att utreda sambandet mellan triangelns vinkelsumma och andra geometriska utsagor och då speciellt parallellaxiomen. För den skull är följande begrepp praktiskt.

Låt r och s vara strålar från två skilda punkter A och B . Fyrtipeln $[r, A, B, s]$ kallas en (rätvinklig) *biangel* om strålarna ligger på en sida om sträckan AB , vinkeln mellan r och \overrightarrow{AB} är rät, vinkeln mellan s och \overrightarrow{BA} inte är trubbig, och strålarna r och s inte skär varandra. Sträckan AB kallas biangelns *bas* och strålarna r och s dess *sidor*.

Vinkeln $\angle(s, \overrightarrow{BA})$ kallas biangelns *vinkel*. Om denna vinkel är rät kallas biangeln *euklidisk*, och om den är spetsig kallas biangeln *hyperbolisk*.



Figur 2.104
Biangel

Det är klart att varje sträcka är bas för två euklidiska bianglar. Däremot följer inte existensen av några hyperboliska bianglar ur axiomen för neutral geometri.

Två bianglar kallas *kongruenta* om deras baser och deras vinklar är kongruenta.

Om $[r, A, B, s]$ är en biangel och $A'B' \equiv AB$, så finns det givetvis en med $[r, A, B, s]$ kongruent biangel med $A'B'$ som bas.

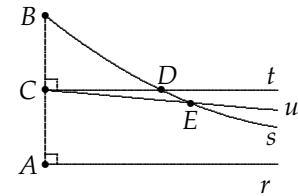
Observera att de båda stömlinjerna till en biangelns sidor är parallella linjer. Omvänt, om a och b är två parallella linjer, om B är en godtycklig punkt på b , om A betecknar fotpunkten på a för normalen från B mot a , om s betecknar den av de båda strålarna från B utefter b som bildar icke-trubbig vinkel med \overrightarrow{BA} (vilken som helst av de båda strålarna om vinkeln är rät), samt om slutligen r är strålen från A utefter a och på samma sida om AB som s , så är $[r, A, B, s]$ en biangel.

Följaktligen finns det en hyperbolisk biangel om och endast om det finns en linje och en punkt utanför linjen genom vilken det går två parallella linjer, dvs om och endast om Euklides parallellaxiom inte gäller.

Sats 2.13.5 *Antag att det existerar en hyperbolisk biangel. Då finns det för varje sträcka PQ en hyperbolisk biangel med PQ som bas.*

Bevis. Antag att biangeln $[r, A, B, s]$ är hyperbolisk, och sätt $a = |AB|$. Vi visar först att det finns en hyperbolisk biangel med baslängd $a/2$. Låt därför C vara mittpunkten på sträckan AB , och låt t vara den stråle från C som bildar rät vinkel med AB och som ligger på samma sida om AB som r och s .

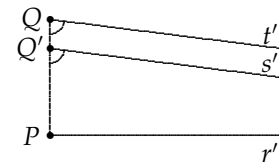
Om t ej skär s , så är $[t, C, B, s]$ en hyperbolisk biangel med baslängd $a/2$. Antag därför att t skär s i en punkt D . Välj E på s så att $B - D - E$ och sätt $u = \overrightarrow{CE}$. Strålen u kan inte skära r (ty om u skär r i en punkt F , så följer det ur axiom O5 att s skär sidan AF i $\triangle ACF$, dvs att s skär r , vilket är en motsägelse). Därför är $[r, A, C, u]$ en hyperbolisk biangel med baslängd $a/2$.



Figur 2.105

Välj nu n så att $2^{-n}a < |PQ|$. Genom att iterera förfarandet ovan n gånger erhåller vi en hyperbolisk biangel med baslängd $2^{-n}a$, och vi kan utan instränkning anta att denna har formen $[r', P, Q', s']$ där $P - Q' - Q$.

Låt nu slutligen t' vara den stråle från Q som ligger på samma sida om PQ som r' och s' och som uppfyller $\angle(t', \overrightarrow{QP}) \equiv \angle(s', \overrightarrow{Q'P})$. Då är t' parallell med s' , varför t' ej kan skära r' . Fyrtipeln $[r'P, Q, t']$ är således en hyperbolisk biangel med PQ som bas. \square



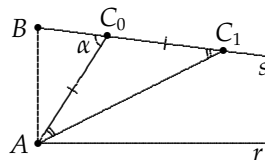
Figur 2.106

Följande korollarium är bara en omformulering av sats 2.13.5.

Korollarium *Om det finns en linje a_0 och en punkt P_0 utanför a_0 genom vilken det går minst två parallella linjer till a_0 , så finns det för varje linje a och varje punkt P utanför a minst två parallella linjer till a genom P .*

Lemma 2.13.4 *Låt $[r, A, B, s]$ vara en biangel. För varje $\epsilon > 0$ finns det en punkt C på s så att $\angle ACB^\circ < \epsilon$.*

Bevis. Låt C_0 vara en godtycklig punkt på s och sätt $\alpha = \angle AC_0B^\circ$. Låt C_1 vara den punkt på s som uppfyller $B - C_0 - C_1$ och $|C_0C_1| = |C_0A|$. (Se fig. 2.107.) Eftersom $\triangle AC_0C_1$ är likbent, är $\angle C_0AC_1^\circ = \angle C_0C_1A^\circ$. Det följer därför av korollariet till sats 2.13.2 att $\alpha = \angle AC_0B^\circ > 2 \cdot \angle AC_1B^\circ$, dvs $\angle AC_1B^\circ < \alpha/2$.



Figur 2.107

Genom att upprepa ovanstående konstruktion får vi för varje naturligt tal n en punkt C_n på s med $\angle AC_nB < 2^{-n}\alpha$. Detta medför lemmat. \square

Vi är nu redo att visa att det euklidiska parallellaxiomet är ekvivalent med ett antal andra geometriska utsagor, däribland utsagan att en triangelns vinkelsumma är $2R$.

Sats 2.13.6 Följande påståenden är ekvivalenta i neutral geometri.

- Det finns en linje a och en punkt P utanför a genom vilken det går högst en med a parallell linje.
- För varje linje a och varje punkt P utanför a finns det exakt en linje genom P som är parallell med a . (Det euklidiska parallellaxiomet.)
- Alternatvinklar, som bildas av en transversal till parallella linjer, är kongruenta.
- Mittpunktsnormalerna till sidorna i en triangel skär varandra i en punkt.
- Tre punkter, som inte ligger i linje, ligger på en cirkel.
- Om vinkeln $\angle(r, s)$ är spetsig och linjen n skär det ena vinkelbenet r under rät vinkel, så skär n också det andra vinkelbenet s .
- Genom varje punkt i det inre av en godtycklig vinkel går det en linje som skär båda vinkelbenen.
- Det finns en spetsig vinkel så att varje linje som skär det ena vinkelbenet under rät vinkel också skär det andra vinkelbenet.
- Det finns en spetsig vinkel så att det genom varje inre punkt i vinkeln går en linje som skär båda vinkelbenen.
- Det finns en triangel vars vinkelsumma är $2R$.
- Det finns en polygon vars defekt är 0.
- Alla polygoner har defekt 0.
- Varje triangels vinkelsumma är $2R$.
- I varje triangel är yttervinkeln vid ett hörn lika med summan av de motstående inre vinklarna.
- Om C är en punkt på en halvcirkel mellan A och B , så är vinkeln $\angle ACB$ rät.
- Om triangeln $\triangle ABC$ är rätvinklig vid hörnet C , så ligger C på cirkeln med AB som diameter.
- Det finns två likformiga, inkongruenta trianglar.

Bevis. Vi visar att ovanstående påståenden är ekvivalenta genom att bevisa implikationerna (och ekvivalensen):

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g) \Rightarrow (i) \Rightarrow (j) \Rightarrow (k) \Rightarrow (l) \Rightarrow (m) \Rightarrow (a)$$

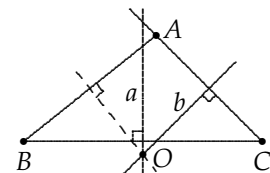
$$(f) \Rightarrow (h) \Rightarrow (i) \quad \text{och} \quad (n) \Leftrightarrow (m) \Rightarrow (o) \Rightarrow (p) \Rightarrow (q) \Rightarrow (k).$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Enligt korollariet till sats 2.13.5 gäller icke- $(b) \Rightarrow$ icke- (a) , och detta är logiskt ekvivalent med $(a) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sats 2.8.3.

$(c) \Rightarrow (d)$: Antag att (c) gäller, och låt $\triangle ABC$ vara en godtycklig triangel. Vi kan utan inskränkning antaga att $\angle C$ är spetsig. Vi skall nu först visa att mittpunktsnormalerna a och b till sidorna BC och CA skär varandra.

Sidolinjen \overline{BC} är transversal till mittpunktsnormalen a och sidolinjen \overline{CA} och motsvarande alternatvinklar är inkongruenta, eftersom vinkel $\angle C$ inte är rät. På grund av antagandet (c) skär därför a sidolinjen \overline{CA} . Vidare är a inte normal till \overline{CA} eftersom \overline{CA} inte är parallell med \overline{BC} . Sidolinjen \overline{CA} är därför en transversal till linjerna a och b med inkongruenta alternatvinklar. Det följer att a och b är icke-parallella, dvs de skär varandra i en punkt O . Enligt sats 2.10.5 är $|BO| = |CO|$ och $|AO| = |CO|$, så det följer att $|AO| = |BO|$. Enligt samma sats ligger därför O även på

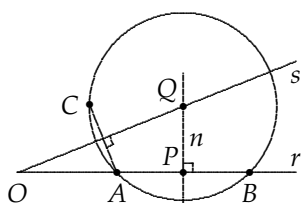


Figur 2.108

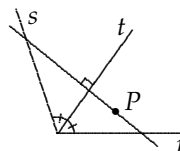
mittpunktsnormalen till sidan AB , dvs de tre mittpunktsnormalerna till sidorna har O som gemensam punkt.

(d) \Rightarrow (e): Antag att punkterna A , B och C inte ligger i linje, och låt O vara skärningspunkten mellan mittpunkts normalerna till sidorna i $\triangle ABC$. Då är $|AO| = |BO| = |CO|$. De tre punkterna A , B och C ligger därför på cirkeln med medelpunkt i O och radie $|AO|$.

(e) \Rightarrow (f): Låt $\angle(r, s)$ vara en spetsig vinkel med spets i O , och låt P vara en punkt på vinkelbenet r . Vi skall visa att normalen n till r genom P skär s . Välj därför A och B på r på var sin sida om P så att $|AP| = |BP|$. Låt C vara den punkt på normalen genom A till s som ligger på andra sidan om s och på samma avstånd från s som punkten A . (Jmf fig. 2.109.) Stödlinjen till s är med andra ord mittpunktsnormal till sträckan AC . Låt slutligen Q vara medelpunkten i den cirkel som enligt (e) går genom punkterna A , B och C . Då ligger Q på mittpunktsnormalerna till korderna AB och AC , dvs på n och s (ty Q kan inte ligga på $-s$). Normalen n skär således vinkelbenet s , vilket visar att (e) medför (f).



Figur 2.109



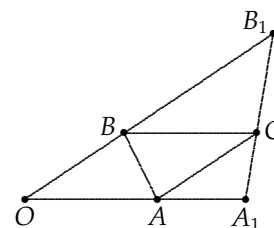
Figur 2.110

(f) \Rightarrow (g): Låt P vara en punkt i det inre av $\angle(r, s)$, och låt t vara vinkelns bisektris. (Se fig. 2.110.) Eftersom vinklarna $\angle(r, t)$ och $\angle(t, s)$ båda är spetsiga, skär normalen från P mot t på grund av antagandet (f) de båda övriga vinkelbenen r och s .

(g) \Rightarrow (i), (f) \Rightarrow (h) och (h) \Rightarrow (i) är triviala implikationer.

(i) \Rightarrow (j): Låt $\angle(r, s)$ vara en vinkel med egenskapen i (i). Låt O vara vinkelns spets, och låt A och B vara två godtyckliga punkter på vinkelbenen r och s . Vi skall visa att vinkelsumman i $\triangle OAB$ är $2\mathbf{R}$. Detta gör vi genom att först visa att vi kan hitta punkter A_1 och B_1 på r resp. s så att $\text{def}(\triangle OA_1B_1) \geq 2 \text{def}(\triangle OAB)$.

Välj för den skull C så att $OACB$ är en parallelogram. Punkten C ligger då i det inre av $\angle(r, s)$, så enligt (i) finns det en linje genom C som skär vinkelbenen r och s i två punkter som vi kallar A_1 och B_1 . Eftersom $\overline{AC} \parallel \overline{OB}$ kan inte A_1 ligga mellan O och A , utan $O - A - A_1$ gäller, och av motsvarande skäl gäller också $O - B - B_1$. Parallelogrammen $OACB$ ligger således inuti och på randen av $\triangle OA_1B_1$, så det följer av satserna 2.13.1 och 2.13.3 att



Figur 2.111

$$\begin{aligned} \text{def}(\triangle OA_1B_1) &\geq \text{def}(OACB) = \text{def}(\triangle OAB) + \text{def}(\triangle BCA) \\ &= 2 \text{def}(\triangle OAB). \end{aligned}$$

Vi kan nu upprepa konstruktionen med utgångspunkt från $\triangle OA_1B_1$ och får på så sätt efter n steg en triangel $\triangle OA_nB_n$ med $\text{def}(\triangle OA_nB_n) \geq 2^n \text{def}(\triangle OAB)$. Eftersom defekten av en triangel är mindre än $2\mathbf{R}$, innebär detta att olikheten

$$0 \leq \text{def}(\triangle OAB) < 2^{-n} \cdot 2\mathbf{R}$$

gäller för alla naturliga tal n . Detta medför att $\text{def}(\triangle OAB) = 0$.

(j) \Rightarrow (k): Trivialt.

(k) \Rightarrow (l): Sats 2.13.4.

(l) \Rightarrow (m): Trivialt.

(m) \Rightarrow (a): Vi visar att icke-(a) \Rightarrow icke-(m). Så antag att motsatsen till (a) gäller. Då finns det en hyperbolisk biangel $[r, A, B, s]$. Låt α vara storleken av biangelns vinkel och sätt $\epsilon = \mathbf{R} - \alpha$. Enligt lemma 2.13.4 finns det en punkt C på s så att $\angle ACB^\circ < \epsilon$. För vinkelsumman i $\triangle ABC$ gäller nu

$$\text{vinkelsum}(\triangle ABC) < \mathbf{R} + \alpha + \epsilon = 2\mathbf{R},$$

och detta visar att det finns en triangel med en vinkelsumma som är mindre än $2\mathbf{R}$, dvs icke-(m) gäller.

(n) \Leftrightarrow (m): Korollariet till sats 2.13.2.

(m) \Rightarrow (o): Antag att \widehat{ACB} är en halvcirkel. Låt O vara mittpunkten på sträckan AB . Eftersom triangelarna $\triangle AOC$ och $\triangle BOC$ är likbenta, så är

$$\begin{aligned} \text{vinkelsum}(\triangle ABC) &= \angle A^\circ + \angle B^\circ + \angle ACO^\circ + \angle BCO^\circ \\ &= 2 \cdot \angle ACO^\circ + 2 \cdot \angle BCO^\circ = 2 \cdot \angle ACB^\circ. \end{aligned}$$

Om vinkelsumman i varje triangel är lika med $2\mathbf{R}$, så är därför speciellt $\angle ACB^\circ = \mathbf{R}$, dvs (m) medför (o).

(o) \Rightarrow (p): Antag att (o) gäller och låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med rät vinkel vid hörnet C . Det följer av sats 2.12.4 att strålen \overrightarrow{AC} skär cirkeln med AB som diameter i en unik punkt C' , och enligt (o) är $\angle AC'B^\circ = \mathbf{R}$. Eftersom normalen från B mot linjen \overline{AC} är unik, måste C' sammanfalla med C , dvs punkten C ligger på cirkeln.

(p) \Rightarrow (q): Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel med rät vinkel vid hörnet C . Enligt (p) ligger C på cirkeln med AB som diameter. Beviset för implikationen (m) \Rightarrow (o) ger därför att $\text{vinkelsum}(\triangle ABC) = 2 \cdot \angle ACB^\circ = 2\mathbf{R}$. Lemma 2.13.2 visar nu att det finns två likformiga, inkongruenta trianglar.

(q) \Rightarrow (k): Antag att det finns två inkongruenta, likformiga trianglar, $\triangle ABC$ och $\triangle EFG$. Vi kan då utan inskränkning anta att $E = A$, $A - F - B$ och $A - G - C$. Sats 2.13.1 ger då

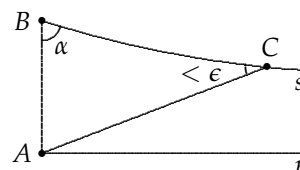
$$\text{def}(\triangle ABC) = \text{def}(\triangle AFG) + \text{def}(BCGF),$$

och eftersom $\text{def}(\triangle ABC) = \text{def}(\triangle AFG)$, följer det att

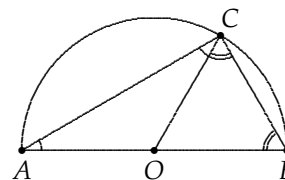
$$\text{def}(BCGF) = 0.$$

Därmed är beviset för sats 2.13.6 komplett. \square

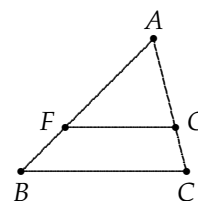
Eftersom utsagorna (a)–(q) i sats 2.13.6 är ekvivalenta, är också deras negationer ekvivalenta. Negationen till utsaga (a) är det hyperboliska parallellaxiomet. Läsaren uppmanas att formulera negationerna till samtliga övriga utsagor.



Figur 2.112



Figur 2.113



Figur 2.114

ÖVNINGAR

2.40 Ge direkta bevis för följande implikationer mellan utsagorna i sats 2.13.6:

- (i) (c) \Rightarrow (m) (ii) (g) \Rightarrow (m) (iii) (p) \Rightarrow (o) (iv) (c) \Rightarrow (q) (v) (o) \Rightarrow (f)

2.41 Visa att följande utsagor är ekvivalenta med utsagorna i sats 2.13.6:

- (i) Två parallella linjer har två gemensamma normaler.
(ii) Om i $\triangle ABC$ punkterna M och N är mittpunkter på sidorna AB och AC , så är $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$.
(iii) Det finns inte tre linjer så att varje par av dessa ligger på samma sida om den tredje linjen.
(iv) Varje par av parallella linjer har en gemensam normal.
(v) För varje val av fyra punkter finns det en triangel som innehåller dessa fyra punkter i sitt inre.

2.42 Visa att om det finns en hyperbolisk biangel, så finns det hyperboliska bianglar med godtyckligt små vinklar.

2.43 Visa att om det euklidiska parallellaxiomet inte är uppfyllt, så finns det trianglar med godtyckligt liten vinkelsumma.

3 Euklidisk geometri

Den geometriska teori som följer av den neutrala geometrins axiom och det euklidiska parallellaxiomet kallas för *euklidisk geometri*. Om man istället kompletterar den neutrala geometrins axiom med negationen till det euklidiska parallellaxiomet får man så kallad *hyperbolisk geometri*.

Speciellt gäller alltså den neutrala geometrins satser i såväl det euklidiska som det hyperboliska fallet. I den meningen bygger således det här kapitlet i allra högsta grad på kapitel 2. Läsare kan emellertid – förhoppningsvis med god behållning – läsa det här kapitlet utan att först inhämta det föregående, förutsatt att han eller hon besitter grundskolekunskaper i geometri, dvs förstår innebörden av de mest grundläggande geometriska begreppen, behärskar de mest elementära triangel- och cirkelsatserna, exempelvis kongruensfallen för trianglar, samt är villig att acceptera några enstaka referenser till kapitel 2. För att underlätta för läsaren finns också en lista över beteckningar i början av kompendiet.

Kapitlet startar förstas med det euklidiska parallellaxiomet och med några av dess omedelbara konsekvenser. Därefter studeras likformighet, och med hjälp av detta begrepp bevisas några viktiga satser, exempelvis Pythagoras sats. Vi övergår sedan till begreppet delningsförhållande, vilket bl a används för att formulera och bevisa Menelaos och Cevas satser. Ur Cevas sats följer satserna om medianernas, bisektrisernas och höjdernas skärningspunkter. Studiet av delningsförhållande avrundas med ett avsnitt om dubbelförhållande. Så följer en mycket kortfattad diskussion om koordinatsystem och analytisk geometri. Vi visar att axiomsystemet för euklidisk geometri är motsägelsefritt (förutsatt att de reella talen är motsägelsefria) samt att alla modeller till systemet är isomorfa.

Återstoden av kapitlet ägnas åt cirklar. Först härleds några välbekanta satser såsom periferivinkelsatsen och kordatsatsen. Därefter studeras ortogonala cirklar och inversion. I det avslutande avsnittet visas som tillämpning på inversion Mohrs-Mascheronis sats om geometriska konstruktioner med enbart passare som hjälpmedel.

3.1 Det euklidiska parallellaxiomet

Hilberts axiomsystem för plan euklidisk geometri består av axiomen för neutral geometri i kapitel 2, nämligen incidensaxiomen I1–I3, ordningsaxiomen O1–O5, kongruensaxiomen K1–K6 och kontinuitetsaxiomet, samt följande parallellaxiom

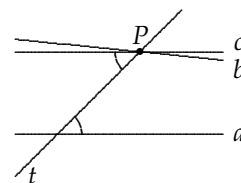
Det euklidiska parallellaxiomet För varje linje a och varje punkt P utanför a finns det exakt en linje b genom P som är parallell med a .

I kapitel 2 visade vi att det euklidiska parallellaxiomet är ekvivalent med ett antal påståenden (se satserna 2.8.3 och 2.13.6). Dessa ekvivalenta påståenden blir nu förstuds satser i euklidisk geometri. Vi nöjer oss här med att skriva upp tre av dessa satser. För att underlätta för läsare som inte i detalj studerat föregående kapitel ger vi också bevisen, trots viss upprepning.

Sats 3.1.1 (Alternatvinkelsatsen) Alternatvinklar med avseende på en transversal till två parallella linjer är kongruenta.

Bevis. (Jmf sats 2.8.3.) Vi erinrar först om att följande omvändning till sats 3.1.1 är en sats i neutral geometri: Om en transversal skär två linjer så att ett par av alternatvinklar är kongruenta, så är de båda linjerna parallella (sats 2.8.1). Beviset för den satsen utnyttjar inte parallellaxiomet utan bygger enbart på ett av kongruensfallen för trianglar (V-S-V-kriteriet).

Antag nu att a och b är två parallella linjer med en transversal t som skär b i P . Låt c vara den linje genom P som har egenskapen att alternatvinklar till a och c med avseende på transversalen t är kongruenta. Då är alltså a och c parallella. Eftersom det bara finns en parallell linje till a genom P följer det att $c = b$, och detta innebär att alternatvinklarna till a och b med avseende på transversalen t är kongruenta. \square



Figur 3.1

Sats 3.1.2 \parallel är en ekvivalensrelation på mängden av alla linjer, dvs

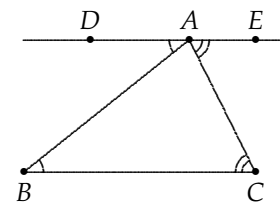
$$a \parallel c \ \& \ b \parallel c \Rightarrow a \parallel b.$$

Bevis. (Jmf sats 2.8.3.) Antag motsatsen, dvs att det finns linjer a , b och c så att $a \parallel c$, $b \parallel c$ men $a \not\parallel b$. Då skär a och b varandra i en punkt P . Detta innebär emellertid att det genom P går minst två med c parallella linjer, vilket är en motsägelse. \square

Sats 3.1.3 I varje triangel är vinkelsumman $2R$.

Bevis. (Jmf sats 2.13.6.) I beviset för sats 2.13.6 härleds sats 3 ur det euklidiska parallellaxiomet via en komplicerad kedja av implikationer. Vi ger därför här ett enkelt bevis, baserat på sats 3.1.1.

Låt $\triangle ABC$ vara en godtycklig triangel. På den med BC parallella linjen genom A väljes två punkter D och E på omse sidor om A och så att D ligger på samma sida om linjen AC som B . Enligt sats 3.1.1 är nu $\angle B^\circ = \angle BAD^\circ$ och $\angle C^\circ = \angle CAE^\circ$, så det följer att $\angle B^\circ + \angle A^\circ + \angle C^\circ = \angle BAD^\circ + \angle BAC^\circ + \angle CAE^\circ = 2R$. \square



Figur 3.2

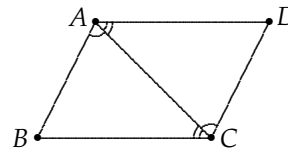
Vi har tidigare definierat en *parallelogram* som en fyrhörning (dvs enkel polygon med fyra hörn) vars motstående sidor är kongruenta. Nästa sats visar att i euklidisk geometri finns det flera möjliga definitioner.

Sats 3.1.4 För en fyrhörning $ABCD$ är följande tre påståenden ekvivalenta:

- (i) Motstående sidor är kongruenta, dvs fyrhörningen är en parallelogram.
- (ii) Motstående sidor är parallella.
- (iii) Motstående vinklar är kongruenta.

Bevis. (i) \Rightarrow (ii) och (i) \Rightarrow (iii): Se sats 2.8.4.

(ii) \Rightarrow (i): Om motstående sidor är parallella, så är på grund av sats 3.1.1 $\angle DAC \equiv \angle BCA$ och $\angle DCA \equiv \angle BAC$. V-S-V-kriteriet ger därför att $\triangle DAC \equiv \triangle BCA$, och det följer speciellt att $DA \equiv BC$ och $DC \equiv BA$.



Figur 3.3

(iii) \Rightarrow (ii): Om motstående vinklar är kongruenta, så är $\angle A^\circ + \angle B^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\mathbf{R} = 2\mathbf{R}$, eftersom en fyrhörnings vinkelsumma är $4\mathbf{R}$ i euklidisk geometri. Detta medför att alternatvinklarna till \overline{AD} och \overline{BC} med avseende på transversalen \overline{AB} är kongruenta. Det följer att sidorna AD och BC är parallella (sats 2.8.1). På motsvarande sätt är AB och DC parallella. \square

Med *rektangel* menas en fyrhörning vars samtliga vinklar är räta.

ÖVNINGAR

- 3.1 Visa att en rektangel är en parallelogram.
- 3.2 Visa att en parallelogram är en rektangel om och endast om de båda diagonalerna är lika långa.
- 3.3 Visa att en parallelogram är en romb om och endast om diagonalerna är vinkelräta.
- 3.4 Visa att det inte existerar några rektanglar i hyperbolisk geometri.

3.2 Likformighet

I Elementa behandlas inte likformighetsläran förrän i Bok 6, och anledningen till denna sena introduktion är att Euklides först måste diskutera Eudoxos proportionalitetslära. Vi förfogar emellertid över ett kraftfullt verktyg som Euklides inte hade, nämligen de reella talen, och kan därför gå direkt fram.

De reella talen introduceras i geometrin via kontinuitetsaxiomet (eller det svagare arkimediska axiomet), med vars hjälp *längden* av en sträcka definieras som ett *reellt tal*. Förhållandet mellan två sträckor kan därför definieras som kvoten mellan deras längder. Eudoxos och Euklides kunde däremot inte definiera själva förhållandet som sådant, utan – och detta är poängen – de kunde bara definiera likhet och olikhet mellan förhållanden (jmf avsnitt 1.3). Euklides tvingades därför ägna en hel bok (Bok 5) av Elementa åt satser om proportionalitet. Dessa satser är triviala för oss men bevisen blir ganska invecklade om de måste baseras på Eudoxos definition av likhet.

Det är lämpligt att skriva upp några sådana proportionalitetsegenskaper här. Vi kommer i fortsättningen att använda vissa av dem utan vidare kommentarer. Bokstäverna a, b, c, \dots betecknar godtyckliga reella tal, men förekommande nämnare förutsätts

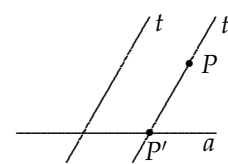
förstås vara nollskilda.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \& \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \& \quad \frac{b}{e} = \frac{d}{f} &\Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{c}{f}. \end{aligned}$$

Efter denna introduktion skall vi nu återvända till de geometriska begreppen. Först en definition:

Låt a och t vara två icke-parallella linjer. För varje punkt P finns det en unik linje t' genom P så att $t' \parallel t$, och linjen t' skär a i en unik punkt P' . Punkten P' kallas *projektionen av P på a parallellt med t* .

Tydligt är $P' = P$ om och endast om P ligger på linjen a .



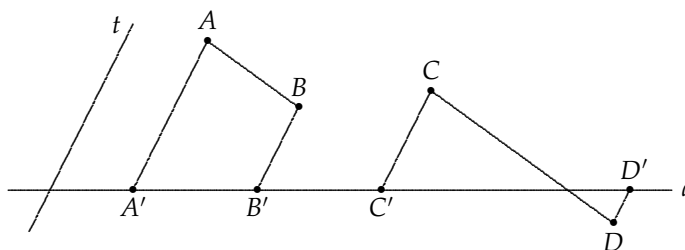
Figur 3.4

Om PQ är en sträcka som inte är parallell med t , så är de projicerade punkterna P' och Q' skilda, dvs $P'Q'$ är en sträcka på a . Varje punkt R på sträckan PQ projiceras på en punkt R' som ligger på sträckan $P'Q'$. Vi kallar därför sträckan $P'Q'$ för *projektionen av PQ på a (parallellt med t)*.

Följande sats är fundamental för läran om parallellprojektioner och likformighet.

Sats 3.2.1 Låt a och t vara två skärande linjer. Om AB och CD är två sträckor som är parallella inbördes men ej med t , och om $A'B'$ resp. $C'D'$ betecknar deras projektioner på a parallellt med t , så är

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|}.$$



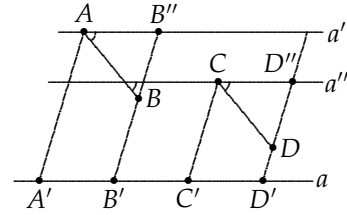
Figur 3.5

Bevis. Vi visar satsen i etapper.

Steg 1: $|AB| = |CD| \Rightarrow |A'B'| = |C'D'|$.

Låt $|AB| = |CD|$, och antag först att $AB \parallel a$ och därmed också $CD \parallel a$. Då ligger antingen AB på a , i vilket fall $A'B' = AB$, eller också är $ABB'A'$ en parallelogram, och då är $A'B' \equiv AB$. I båda fallen är $|A'B'| = |AB|$. Analogt gäller förstås att $|C'D'| = |CD|$, och följaktligen är $|A'B'| = |C'D'|$.

Antag därefter att AB ej är parallell med a . Låt a' och a'' vara linjerna genom A resp. C med $a' \parallel a$ och $a'' \parallel a$, och låt B'' och D'' beteckna projektionerna av B och D på a' resp. a'' (se fig 3.6). Betrakta trianglarna $\triangle ABB''$ och $\triangle CDD''$. På grund av alternatvinkelsatsen är $\angle A \equiv \angle C$ och $\angle B \equiv \angle D$, så det följer ur V-S-V-kriteriet att trianglarna är kongruenta. Speciellt är alltså $|AB''| = |CD''|$. Därmed är vi tillbaka på det fall som vi redan visat ovan, ty $A'B'$ och $C'D'$ är projektionerna av AB'' och CD'' på a . Således är $|A'B'| = |C'D'|$.



Figur 3.6

Steg 2: $|AB| = n|CD| \Rightarrow |A'B'| = n|C'D'|$.

Om $|AB| = n|CD|$, så finns det punkter $A_0 - A_1 - A_2 - \dots - A_n$ med $A_0 = A$, $A_n = B$ och $|A_{k-1}A_k| = |CD|$ för $k = 1, 2, \dots, n$. Enligt steg 1 är $|A'_{k-1}A'_k| = |C'D'|$, så det följer att $|A'B'| = n|C'D'|$.

Steg 3: $|AB| < |CD| \Rightarrow |A'B'| < |C'D'|$.

Om $|AB| < |CD|$, så finns det en punkt E på sträckan CD så att $|AB| = |CE|$. Eftersom E' ligger på $C'D'$ är $|A'B'| = |C'E'| < |C'D'|$ enligt steg 1.

Steg 4: AB och CD är godtyckliga sträckor.

Låt n vara ett positivt heltal, och dela sträckan AB i n lika delar. Låt EF vara en av dessa delsträckor så att $|AB| = n|EF|$. Låt slutligen m vara det heltal som uppfyller

$$m|EF| \leq |CD| < (m+1)|EF|.$$

För de projicerade sträckorna $A'B'$, $C'D'$ och $E'F'$ gäller enligt stegen 2 och 3 att

$$|A'B'| = n|E'F'| \quad \text{och} \quad m|E'F'| \leq |C'D'| < (m+1)|E'F'|.$$

Genom att dividera de båda olikheterna ovan med $|AB|$ resp. $|A'B'|$ får vi olikheterna

$$\frac{m}{n} \leq \frac{|CD|}{|AB|} < \frac{m+1}{n} \quad \text{och} \quad \frac{m}{n} \leq \frac{|C'D'|}{|A'B'|} < \frac{m+1}{n}.$$

Följaktligen är

$$-\frac{1}{n} < \frac{|CD|}{|AB|} - \frac{|C'D'|}{|A'B'|} < \frac{1}{n}.$$

Denna olikhet gäller för varje positivt heltal n . Det följer att

$$\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|A'B'|},$$

vilket är ekvivalent med likheten i satsen. \square

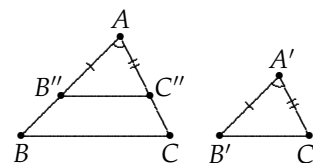
Låt oss påminna om att två trianglar kallas *likformiga* (förkortat \sim) om motsvarande vinklar i trianglarna är kongruenta. Eftersom alla euklidiska trianglar har vinkelsumma $2\mathbf{R}$ räcker det förstås att kräva att två vinklar i den ena triangeln skall vara kongruenta med respektive motsvarande vinklar i den andra triangeln. I följande viktiga sats ges två andra kriterier för likformighet.

Sats 3.2.2 (Likformighetssatsen) För trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är följande tre villkor ekvivalenta:

- (i) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
(ii) $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$ och $\angle A \equiv \angle A'$
(iii) $\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$.

Bevis. (i) \Rightarrow (ii) och (i) \Rightarrow (iii): Antag att $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Då är speciellt $\angle A \equiv \angle A'$. Välj B'' och C'' på \overrightarrow{AB} resp. \overrightarrow{AC} så att $|AB''| = |A'B'|$ och $|AC''| = |A'C'|$.

Enligt S-V-S-kriteriet är $\triangle B''AC'' \equiv \triangle B'A'C'$, varför $\angle B'' \equiv \angle B' \equiv \angle B$. Linjerna $\overline{B''C''}$ och \overline{BC} är således parallella (sats 2.8.1) (eller sammanfallande). Sträckorna AC'' och AC kan därför uppfattas som projektioner av AB'' och AB på linjen \overline{AC} parallellt med linjen \overline{BC} . Det följer nu av sats 3.2.1 att



Figur 3.7

$$\frac{|AC''|}{|AB''|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

vilket innebär att

$$\frac{|A'C'|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

och denna likhet är ekvivalent med likheten i (ii). Därmed har vi bevisat implikationen (i) \Rightarrow (ii).

Om $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, så är också $\triangle BCA \sim \triangle B'C'A'$, så den redan visade implikationen ger att

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|B'A'|}{|BA|}.$$

Därför gäller också (iii).

(ii) \Rightarrow (i): Antag att (ii) gäller. Välj B'' på strålen \overrightarrow{AB} så att $|AB''| = |A'B'|$. Den med BC parallella linjen genom B'' skär \overrightarrow{AC} i en punkt C'' , och alternatvinkelsatsen medför att $\angle B \equiv \angle AB''C''$ och $\angle C \equiv \angle AC''B''$. Trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle AB''C''$ är med andra ord likformiga. Enligt implikationen (i) \Rightarrow (ii) är därför

$$\frac{|AB''|}{|AB|} = \frac{|AC''|}{|AC|}.$$

På grund av vårt antagande är emellertid

$$\frac{|AB''|}{|AB|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|},$$

så det följer att

$$\frac{|AC''|}{|AC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|},$$

dvs $|AC''| = |A'C'|$. Trianglarna $\triangle AB''C''$ och $\triangle A'B'C'$ är således kongruenta (S-V-S-kriteriet), och detta medför förstås att trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är likformiga, dvs (i) gäller.

(iii) \Rightarrow (i): Antag att (iii) gäller och låt k beteckna de tre kvoternas gemensamma värde. Låt $\triangle A''B''C''$ vara en triangel med $\angle A'' \equiv \angle A$, $|A''B''| = k|AB|$ och $|A''C''| = k|AC|$. På grund av implikationerna (ii) \Rightarrow (i) och (i) \Rightarrow (iii) gäller då dels att $\triangle A''B''C'' \sim \triangle ABC$, dels att $|B''C''| = k|BC|$. Vårt antagande medför därför att $|A''B''| = |A'B'|$, $|A''C''| = |A'C'|$ och $|B''C''| = |B'C'|$, varför trianglarna $\triangle A''B''C''$ och $\triangle A'B'C'$ är kongruenta (S-S-S-kriteriet). Följaktligen är $\triangle A'B'C'$ likformig med $\triangle ABC$, dvs (i) gäller. \square

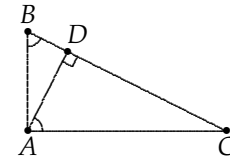
Likformighetssatsen är mycket användbar. Vi illustrerar detta genom att bevisa några välbekanta satser med hjälp av likformighetsresonemang.

Sats 3.2.3 (Pythagoras sats) *Antag att $\triangle ABC$ är rätvinklig vid hörnet A . Då är*

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2.$$

Bevis. Låt D vara fotpunkten på hypotenusan för höjden från hörnet A . Då är $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ och $\triangle DAC \sim \triangle ABC$, varför

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \text{och} \quad \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$



Figur 3.8

Det följer att

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |DB| \cdot |BC| + |DC| \cdot |BC| = (|DB| + |DC|) \cdot |BC| = |BC|^2. \quad \square$$

Pythagoras sats har följande omvändning.

Sats 3.2.4 *Antag att sidorna i triangeln $\triangle ABC$ uppfyller*

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2.$$

Då är vinkeln vid hörnet A rät.

Bevis. Låt $\triangle A'B'C'$ vara en triangel med rät vinkel vid hörnet A' och med $|A'B'| = |AB|$ och $|A'C'| = |AC|$. Enligt förutsättningarna och Pythagoras sats tillämpad på $\triangle A'B'C'$ är då

$$|B'C'|^2 = |A'B'|^2 + |A'C'|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2,$$

dvs $|B'C'| = |BC|$. Trianglarna $\triangle A'B'C'$ och $\triangle ABC$ är således kongruenta (S-S-S-kriteriet), och det följer att $\angle A$ är rät. \square

Vi har hittills bara berört areabegreppet i förbigående. Men antag att vi vill definiera arean av en triangel; enligt vad vi lärt oss i skolan bör vi då definiera arean av en triangel med bas b och höjd h som $\frac{bh}{2}$. Det finns emellertid en svårighet med denna definition som vi måste reda ut. En triangel har ju tre sidor och det är därför tänkbart att uttrycket bh antar olika värden beroende på vilken sida som betraktas som bas. Detta inträffar faktiskt i hyperbolisk geometri! I euklidisk geometri är emellertid värdet detsamma för alla tre sidorna, vilket är kontentan av följande sats.

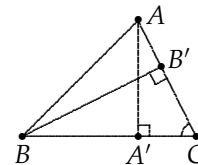
Sats 3.2.5 Låt i $\triangle ABC$ punkten A' vara fotpunkten på sidolinjen \overline{BC} för höjden från hörnet A och punkten B' vara fotpunkten på sidolinjen \overline{AC} för höjden från hörnet B . Då är

$$|AA'| \cdot |BC| = |BB'| \cdot |AC|.$$

Bevis. Trianglarna $\triangle AA'C$ och $\triangle BB'C$ är likformiga, varför

$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

(Fallet $A' = B' = C$ är förstås trivialt.) \square



Figur 3.9

Sats 3.2.6 (Bisektrissatsen) Låt A' beteckna skärningspunkten mellan BC och bisektrisen till vinkeln $\angle A$ i triangeln $\triangle ABC$. Då gäller att

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

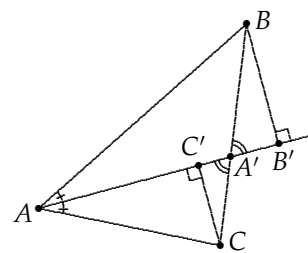
Bevis. Låt B' och C' vara fotpunkterna för normalerna från B och C mot bisektrisen. Trianglarna $\triangle ABB'$ och $\triangle ACC'$ är likformiga, varför

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|B'B|}{|C'C|}.$$

Om $B' = C' = A'$ (vilket inträffar om $\triangle ABC$ är likbent med BC som bas), så är beviset klart. I annat fall är $\triangle A'B'B'$ och $\triangle A'C'C'$ två likformiga trianglar med

$$\frac{|B'B|}{|C'C|} = \frac{|A'B|}{|A'C|},$$

vilket tillsammans med likheten ovan ger satsen. \square



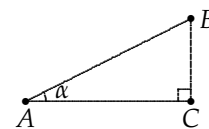
Figur 3.10

Likformighetssatsen är en förutsättning för den geometriska definitionen av sinus och cosinus. Låt nämligen $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara två rätvinkliga trianglar med räta vinklar vid hörnen C och C' och med $\angle A = \angle A' = \alpha$. Då är trianglarna definitionsmässigt likformiga, och det följer att

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|A'B'|}.$$

I en rätvinklig triangel beror med andra ord kvoten mellan en katets längd och hypotenusans längd enbart på den mot kateten stående vinkelns storlek α och inte på det speciella valet av triangel. Vi kan därför entydigt definiera *sinus* för vinkeln α som denna kvot, dvs

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}.$$



Figur 3.11

Analogt kan *cosinus* för α definieras som

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Detta definierar sinus och cosinus för alla vinklar i intervallet mellan 0 och \mathbf{R} . Definitionerna utsträcks på sedvanligt maner till godtyckliga triangelvinklar genom att man sätter

$$\sin \beta = \sin(2\mathbf{R} - \beta) \quad \text{och} \quad \cos \beta = -\cos(2\mathbf{R} - \beta)$$

för $\mathbf{R} < \beta < 2\mathbf{R}$, samt

$$\sin \mathbf{R} = 1 \quad \text{och} \quad \cos \mathbf{R} = 0.$$

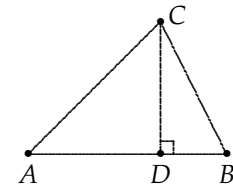
Det är inte vår avsikt att utveckla någon trigonometrisk teori här. Som demonstration och för framtida bruk skall vi dock formulera och bevisa två trigonometriska formler.

Sats 3.2.7 (Sinussatsen) *I varje triangel $\triangle ABC$ gäller sambandet*

$$\frac{\sin \angle A^\circ}{|BC|} = \frac{\sin \angle B^\circ}{|AC|}.$$

Bevis. Vi betraktar enbart det fall då vinklarna $\angle A$ och $\angle B$ är spetsiga och överlåter åt läsaren att genomföra de triviala modifikationer som behövs då en av dessa vinklar är rät eller trubbig. Höjden från C skär sidan AB i en punkt D , och enligt definitionen av sinus är

$$|CD| = |AC| \cdot \sin \angle A^\circ = |BC| \cdot \sin \angle B^\circ. \quad \square$$



Figur 3.12

Som sista tillämpning i det här avsnittet på likformighetssatsen visar vi följande generalisering av bisektrissatsen.

Sats 3.2.8 *Låt A' vara en punkt på sidolinjen \overline{BC} i $\triangle ABC$ annan än något av hörnen. Då är*

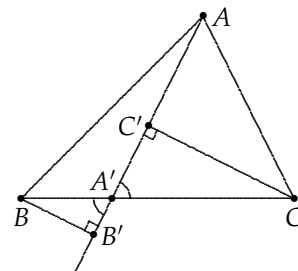
$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AB| \cdot \sin \angle A'AB^\circ}{|AC| \cdot \sin \angle A'AC^\circ}.$$

Bevis. Låt B' och C' vara fotpunkterna på $\overline{AA'}$ för normalerna från hörnen B och C . Då är $\triangle A'BB' \sim \triangle A'CC'$, varför

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}.$$

(Likheten gäller förstås trivialt i undantagsfallet $B' = C' = A'$.) Definitionen av sinus ger slutligen

$$\frac{|BB'|}{|CC'|} = \frac{|AB| \cdot \sin \angle A'AB^\circ}{|AC| \cdot \sin \angle A'AC^\circ}. \quad \square$$



Figur 3.13

ÖVNINGAR

- 3.5 I en rätvinklig triangel är kateterna 5 och 12 cm. Bestäm längden av höjden mot hypotenusan.
- 3.6 I en romb förhåller sig diagonalerna som 3 : 4. Bestäm diagonalernas längder om rombens omkrets är 40 cm.
- 3.7 Punkten P ligger inuti rektangeln $ABCD$. Dess avstånd till hörnen A , B och C är 3, 4 resp. 5. Bestäm avståndet till hörnet D .
- 3.8 I $\triangle ABC$ är $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ och $|CA| = 7$. Bestäm höjden från hörnet C .
- 3.9 I $\triangle ABC$ är $|BC| = a$, $|CA| = b$ och $|AB| = c$. Sätt $p = \frac{a+b+c}{2}$. Visa att höjden h från hörnet A uppfyller sambandet

$$a^2 h^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c),$$

dvs visa *Hérons formel*

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

för arean T av triangeln.

- 3.10 Triangeln $\triangle ABC$ är likbent med $|AB| = |AC| = 6$ och $|BC| = 3$. Bestäm längden av bisektrisen från hörnet B .
- 3.11 Visa bisektrissatsens omvändning: Om A' ligger på sidan BC i triangeln $\triangle ABC$ och om $|A'B|/|A'C| = |AB|/|AC|$, så är $\overline{AA'}$ bisektrisen till $\angle A$.
- 3.12 Bisektrisen till yttervinkeln vid hörnet A i $\triangle ABC$ skär sidolinjen \overline{BC} i en punkt D . Visa att $|DB|/|DC| = |AB|/|AC|$.
- 3.13 Härled sats 3.2.5 ur sats 3.2.7 och vice versa.
- 3.14 Bevisa *cosinussatsen*: Om i $\triangle ABC$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ och $\angle A^\circ = \alpha$, så gäller
- $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$
- 3.15 Låt $ABCD$ vara en parallelogram. Bevisa *parallelogramlagen*:
- $$|AC|^2 + |BD|^2 = 2|AB|^2 + 2|BC|^2.$$
- 3.16 Konstruera med hjälp av passare och linjal de två punkter som delar en given sträcka i tre lika delar.
- 3.17 En enhetssträcka och två sträckor av längd a och b är givna. Konstruera sträckor av längd ab och a/b med hjälp av passare och linjal.

3.3 Delningsförhållande

Låt a vara en linje. Om vi fixerar två punkter O och E på a sant väljer OE som enhetssträcka, så finns det en unik bijektion $\zeta: a \rightarrow \mathbf{R}$ med egenskaperna

$$\begin{aligned} \zeta(O) &= 0, & \zeta(E) &= 1 & \text{och} \\ |\zeta(P) - \zeta(Q)| &= |PQ| & \text{för alla } P, Q & \text{ på } a. \end{aligned}$$

Avbildningen ζ kallas *koordinatfunktionen* med O som *origo*, OE som *enhetssträcka* och \overrightarrow{OE} som *positiv axel*. Talet $\zeta(P)$ är *koordinaten* för punkten P . (Se korollariet till sats 2.11.4.)

Om koordinatfunktionen framgår av sammanhanget eller är oväsentlig för resonemanget, betecknar vi ofta koordinaten för en punkt med samma symbol som punkten själv, dvs P kan stå både för en punkt och för punktens koordinat.

Koordinatfunktionen är naturligtvis inte entydigt bestämd av linjen a , men det finns ett enkelt samband mellan två godtyckliga koordinatfunktioner för en linje. Låt nämligen ζ och ζ' vara två koordinatfunktioner med ζ som ovan, och sätt

$$d = \zeta'(O) \quad \text{och} \quad c = \zeta'(E) - \zeta'(O) = \zeta'(E) - d.$$

Betrakta den avbildning η , som definieras av att

$$\eta(P) = \frac{\zeta'(P) - d}{c};$$

den är bijektiv, $\eta(O) = 0$, $\eta(E) = 1$ och

$$|\eta(P) - \eta(Q)| = \left| \frac{\zeta'(P) - \zeta'(Q)}{c} \right| = \frac{|\zeta'(P) - \zeta'(Q)|}{|\zeta'(E) - \zeta'(O)|} = \frac{\|PQ\|}{\|OE\|},$$

där $\|\cdot\|$ betecknar det unika längdmått som fås om man som enhetssträcka väljer den enhetssträcka som hör till koordinatavbildningen ζ' . De båda längdmåtten $|\cdot|$ och $\|\cdot\|/\|OE\|$ tilldelar sträckan OE samma mått 1, så de är därför identiska, dvs

$$\frac{\|PQ\|}{\|OE\|} = |PQ|.$$

Följaktligen är

$$|\eta(P) - \eta(Q)| = |PQ|.$$

Bijektionen $\eta: a \rightarrow \mathbf{R}$ uppfyller således de villkor som bestämmer ζ entydigt. Det följer att $\eta = \zeta$, dvs

$$\zeta'(P) = c\zeta(P) + d \quad \text{för alla } P \text{ på } a.$$

Detta bevisar följande sats.

Sats 3.3.1 *Sambandet mellan två koordinatfunktioner ζ och ζ' till en linje a har formen*

$$\zeta' = c\zeta + d$$

där c och d är reella konstanter och $c \neq 0$.

Eftersom $\zeta'(P) - \zeta'(Q) = c(\zeta(P) - \zeta(Q))$, beror differensen $\zeta(P) - \zeta(Q)$ på valet av koordinatfunktion ζ . Däremot är tydligen kvoten $(\zeta(P) - \zeta(Q)) / (\zeta(R) - \zeta(S))$ mellan två sådana differenser oberoende av ζ ! Om P , A och B är punkter på linjen a , så beror därför kvoten

$$\frac{\zeta(P) - \zeta(A)}{\zeta(B) - \zeta(P)}$$

enbart av punkterna. Vi kan därför sätta

$$\mu(P; A, B) = \frac{\zeta(P) - \zeta(A)}{\zeta(B) - \zeta(P)}$$

för $P \neq B$.

Tydligen är $\mu(P; A, A) = -1$ för alla $P \neq A$. Om $A \neq B$ kallas $\mu(P; A, B)$ för ett delningsförhållande; vi säger att P delar sträckan från A till B i förhållandet $\mu(P; A, B)$.

Sats 3.3.2 Antag att A och B är två skilda punkter på linjen a . Då är $\mu(\cdot) = \mu(\cdot; A, B)$ en bijektiv funktion från $a \setminus \{B\}$ till $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ och

$$\begin{aligned}\mu(P) > 0 &\Leftrightarrow A - P - B \\ \mu(P) = 0 &\Leftrightarrow P = A \\ -1 < \mu(P) < 0 &\Leftrightarrow P - A - B \\ \mu(P) < -1 &\Leftrightarrow A - B - P\end{aligned}$$

Bevis. Eftersom definitionen av μ inte beror på valet av koordinatfunktion, kan vi välja den koordinatfunktion som ger A och B koordinaterna 0 resp. 1. Vi får då

$$\mu(P) = \frac{P}{1-P} \quad (= -1 + \frac{1}{1-P}).$$

Påståendena i satsen verifieras nu enkelt. □

Innan vi går vidare i vårt studium av delningsförhållandet behöver vi utvidga vårt geometriska språk. Mängden av alla linjer genom en given punkt P kallas för ett *linjeknippe av första slaget*, och mängden av alla linjer som är parallella med en given linjen kallas ett *linjeknippe av andra slaget* eller ett *parallellknippe*. För varje parallellknippe \mathcal{K} inför vi en symbol $\infty_{\mathcal{K}}$. (Om parallellknippet framgår av sammanhanget, skriver vi kortare ∞ istället för $\infty_{\mathcal{K}}$.) Vi kallar $\infty_{\mathcal{K}}$ för en *oändlighetspunkt* och säger att $\infty_{\mathcal{K}}$ ligger på varje linje som ingår i parallellknippet \mathcal{K} . Däremot ligger $\infty_{\mathcal{K}}$ utanför alla andra linjer.

Med dessa konventioner har två parallella linjer en unik skärningspunkt, nämligen den till linjerna hörande oändlighetspunkten. Fördelen med vårt utvidgade språk är således att varje par av linjer har en unik skärningspunkt, och vi behöver i den fortsatta diskussionen inte skilja på olika fall beroende på om linjerna är parallella eller ej.

Observera att om A är en riktig punkt och ∞ är en oändlighetspunkt, så finns det en unik linje som går genom A och ∞ , nämligen den linje genom \overline{A} som tillhör det mot ∞ ($= \infty_{\mathcal{K}}$) svarande parallellknippet \mathcal{K} . Linjen betecknas förstås $\overline{A\infty}$.

För att två skilda oändlighetspunkter skall bestämma en unik linje, måste vi slutligen utvidga vårt språk med en symbol ℓ_{∞} , som vi kallar *oändlighetslinjen*. På oändlighetslinjen ligger alla oändlighetspunkterna men inte några riktiga punkter.

Två riktiga linjer är parallella om de inte har någon gemensam riktig punkt. I konsekvens med detta betraktar vi oändlighetslinjen såsom varande *parallell* med varje annan linje.

Observera att vår utvidgning med oändlighetspunkter och oändlighetslinjen gäller språket och inte de primitiva begreppen *punkt* och *linje*. Oändlighetspunkterna och oändlighetslinjen berörs således inte av våra axiom; de är enbart "språkliga symboler" som införts för att vi skall kunna formulera ett antal definitioner, satser och bevis på ett enkelt och bekvämt sätt.

När vi i fortsättningen av detta och följande två avsnitt 3.4 och 3.5 talar om punkter och linjer så inkluderar vi också oändlighetspunkter och oändlighetslinjen. Om vi behöver framhäva att en punkt eller linje är en "riktig" punkt eller linje, så kallar vi den *äkta*.

Vi återvänder nu till delningsförhållandet $\mu(P; A, B)$. Eftersom $\mu(P; A, B) \rightarrow -1$ då $\zeta(P) \rightarrow \pm\infty$, är det naturligt att definiera

$$\mu(\infty; A, B) = -1$$

för oändlighetspunkten ∞ på linjen \overline{AB} .

Följande räkneregler kan ibland användas för att förenkla uttryck som innehåller produkter av delningsförhållanden.

Sats 3.3.3 (Cyklisk permutation) (i) Om A , B och C är tre äkta punkter i linje, så gäller att

$$\mu(A; B, C) \cdot \mu(B; C, A) \cdot \mu(C; A, B) = 1.$$

(ii) Antag att A_1, A_2, \dots, A_n är äkta punkter i linje och att P är en annan godtycklig punkt på samma linje. Då är

$$\mu(P; A_1, A_2) \cdot \mu(P; A_2, A_3) \cdot \dots \cdot \mu(P; A_n, A_1) = (-1)^n.$$

Bevis. (i) Produkten i vänsterledet är enligt definitionen

$$\frac{A - B}{C - A} \cdot \frac{B - C}{A - B} \cdot \frac{C - A}{B - C} = 1.$$

(ii) Om P är linjens oändlighetspunkt, så är alla n faktorerna lika med -1 . Om P är en äkta punkt, så är produkten lika med

$$\frac{P - A_1}{A_2 - P} \cdot \frac{P - A_2}{A_3 - P} \cdot \dots \cdot \frac{P - A_n}{A_1 - P} = (-1)^n. \quad \square$$

Det som gör delningsförhållandet till en så betydelsefull storhet är dess invarians under parallellprojektion. Vi har nämligen

Sats 3.3.4 (Invarianssatsen) Låt A och B vara äkta punkter på en linje a , och låt P vara en godtycklig punkt skild från B på a . Låt A' , B' och P' vara projektionerna av A , B och P på en linje b parallellt med en linje t som inte är parallell med a eller b . Då är

$$\mu(P; A, B) = \mu(P'; A', B').$$

Bevis. Om P är oändlighetspunkten på a så är P' oändlighetspunkten på b , och i detta fall är båda delningsförhållandena lika med -1 .

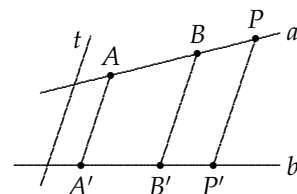
Antag därför att P är en äkta punkt; enligt sats 3.2.1 är då

$$\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|A'P'|}{|P'B'|}$$

dvs

$$|\mu(P; A, B)| = \frac{|P - A|}{|B - P|} = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|A'P'|}{|P'B'|} = \frac{|P' - A'|}{|B' - P'|} = |\mu(P'; A', B')|.$$

De båda delningsförhållandena har vidare samma tecken, ty parallellprojektion bevarar ordningen mellan punkter ($A - P - B \Rightarrow A' - P' - B'$). De är därför lika. \square



Figur 3.14

ÖVNINGAR

3.18 A och B är givna punkter. Konstruera med passare och linjal den punkt P som delar sträckan från A till B i förhållandet

a) 1 b) 2 c) -2 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\sqrt{2}$

3.19 Punkterna A och B är givna liksom sträckorna PQ och RS . Konstruera med hjälp av passare och linjal de punkter C och D som uppfyller

$$\mu(C; A, B) = \frac{|PQ|}{|RS|} \quad \text{och} \quad \mu(D; A, B) = -\frac{|PQ|}{|RS|}.$$

3.20 Bevisa *Stewarts sats*: Om A , B och C är punkter i linje och P är en godtycklig punkt, så är

$$|PA|^2(C - B) + |PB|^2(A - C) + |PC|^2(B - A) + (C - B)(A - C)(B - A) = 0.$$

[Ledning: Reducera med hjälp av Pythagoras sats det allmänna fallet till det fall då P ligger på linjen genom A , B och C .]

3.21 Använd Stewarts sats för att beräkna längderna av

a) medianerna

b) bisektriserna

i en triangel med sidolängderna a , b och c .

3.22 Bevisa *Steiner–Lehmus sats*: Om bisektriserna till två vinklar i en triangel är lika långa, så är triangeln likbent.

[Ledning: Använd resultatet i föregående övning.]

3.4 Cevas och Menelaos satser

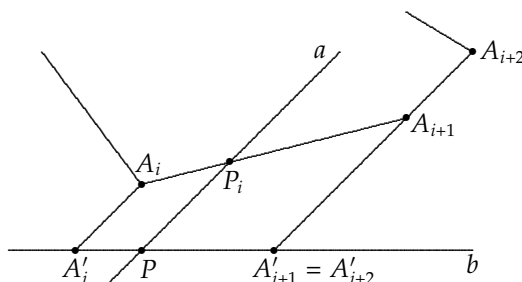
Från de tre hörnen i en triangel kan man dra ett antal geometriskt intressanta linjer som – tagna tre i taget – skär varandra i en punkt. Medianerna, bisektriserna och höjderna är typiska exempel på sådana linjer. Med hjälp av delningsförhållanden kan man formulera ett enkelt kriterium för att linjer från en triangels tre hörn skall ha en gemensam skärningspunkt (Cevas sats). Ett analogt kriterium innehåller ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att tre punkter på en triangels sidolinjer skall ligga i linje (Menelaos sats). I det här avsnittet skall vi bevisa och tillämpa dessa två viktiga resultat.

Den ena riktningen av Menelaos sats följer som specialfall av följande mer generella resultat.

Sats 3.4.1 Låt A_1, A_2, \dots, A_n vara n äkta punkter och antag att a är en linje som inte passerar genom någon av dessa punkter. Sätt $A_{n+1} = A_1$ och låt P_i beteckna skärningspunkten mellan linjen a och linjen $A_i A_{i+1}$ för $i = 1, 2, \dots, n$. Då är

$$\prod_{i=1}^n \mu(P_i; A_i, A_{i+1}) = (-1)^n.$$

Bevis. Fallet att a är oändlighetslinjen är trivialt, ty då är alla skärningspunkterna P_i oändlighetspunkter, varför $\mu(P_i; A_i, A_{i+1}) = -1$ för alla i . Antag därför att a är en äkta linje, och låt b vara en annan linje som skär a i en äkta punkt P . Kalla projektionen av punkterna A_i på b parallellt med a för A'_i . (Se fig 3.15.)



Figur 3.15

Om a inte är parallell med linjen $\overline{A_i A_{i+1}}$, så är P_i en äkta punkt vars projektion på b är P . Invarianssatsen ger därför i detta fall att

$$\mu(P_i; A_i, A_{i+1}) = \mu(P; A'_i, A'_{i+1}).$$

Denna likhet gäller emellertid även ifall a är parallell med $\overline{A_i A_{i+1}}$, ty i så fall är P_i oändlighetspunkten på linjen $\overline{A_i A_{i+1}}$ och $A'_i = A'_{i+1} (\neq P)$, varför båda leden definitionsmässigt är lika med -1 . Med hjälp av (ii) i sats 3.3.3 får vi därför

$$\prod_{i=1}^n \mu(P_i; A_i, A_{i+1}) = \prod_{i=1}^n \mu(P; A'_i, A'_{i+1}) = (-1)^n. \quad \square$$

För trianglar $\triangle A_1 A_2 A_3$ är villkoret i sats 3.4.1 också tillräckligt för att punkterna P_i skall ligga i linje, som vi strax skall se.

En trippel (A', B', C') bestående av icke-hörnpunkter på sidolinjerna \overline{BC} , \overline{CA} och \overline{AB} till triangeln $\triangle ABC$ kallas en *menelaostrippel* till triangeln. En linje från ett hörn till en menelaospunkt på motstående sidolinje, t ex $\overline{AA'}$, kallas en *cevia*.

Observera att vi tillåter att oändlighetspunkter ingår i menelaostripplar. Exempelvis är den med sidolinjen \overline{BC} parallella linjen genom hörnet A en cevian; den fås nämligen som $\overline{AA'}$ då A' är oändlighetspunkten på sidolinjen \overline{BC} .

Sats 3.4.2 (Menelaos sats) *Låt (A', B', C') vara en menelaostrippel till triangeln $\triangle ABC$. De tre menelaospunkterna ligger i linje om och endast om*

$$(*) \quad \mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A) \cdot \mu(C'; A, B) = -1.$$

Bevis. Nödvändigheten av villkoret $(*)$, som vi kallar *menelaosvillkoret*, är ett specialfall av föregående sats. Antag omvänt att menelaosvillkoret är uppfyllt. Låt a vara linjen genom A' och B' ; vi skall visa att även C' ligger på a . Låt därför C'' beteckna skärningspunkten mellan a och sidolinjen \overline{AB} . Då är A' , B' , C'' menelaospunkter i linje, så vi kan använda den redan bevisade delen av satsen och erhåller sambandet

$$\mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A) \cdot \mu(C''; A, B) = -1.$$

Genom att dividera likheten ovan med likheten i $(*)$ erhåller vi

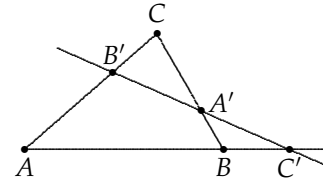
$$\mu(C''; A, B) = \mu(C'; A, B).$$

Det följer att $C'' = C'$, ty delningsförhållandet $\mu(P; A, B)$ bestämmer punkten P entydigt. Punkterna A' , B' och C' ligger således på linjen a . \square

Sats 3.4.3 (Cevas sats) *Låt (A', B', C') vara en menelaostrippel till triangeln $\triangle ABC$. De tre cevianerna $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ har en gemensam skärningspunkt om och endast om*

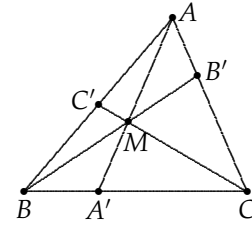
$$(\dagger) \quad \mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A) \cdot \mu(C'; A, B) = 1.$$

Vi kallar villkoret (\dagger) för *cevavillkoret*.



Figur 3.16

Bevis. Antag att de tre cevianerna skär varandra i punkten M . Minst en av menelaospunkterna måste vara en äkta punkt, och vi kan utan inskränkning anta att C' är äkta. Betrakta de två trianglarna $\triangle C'BC$ och $\triangle C'CA$. Trippeln (A', M, A) är en menelaostrippel av punkter i linje till den förstnämnda triangeln, och (B', B, M) är en menelaostrippel av punkter i linje till den sistnämnda triangeln. Enligt Menelaos sats är därför



Figur 3.17

$$\mu(A'; B, C) \cdot \mu(M; C, C') \cdot \mu(A; C', B) = -1 \quad \text{och} \quad \mu(B'; C, A) \cdot \mu(B; A, C') \cdot \mu(M; C', C) = -1.$$

Ihopmultiplikation ger

$$(\mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A)) \cdot (\mu(M; C, C') \cdot \mu(M; C', C)) \cdot (\mu(A; C', B) \cdot \mu(B; A, C')) = 1.$$

Den andra parentesen är lika med 1 på grund av räkneregeln (ii) i sats 3.3.3, och den tredje parentesen är på grund av (i) och (ii) i samma sats

$$= \frac{1}{\mu(C'; B, A)} = \mu(C'; A, B).$$

Därmed har vi visat att cevavillkoret är uppfyllt.

Antag omvänt att cevavillkoret är uppfyllt. Låt M vara skärningspunkten till cevianerna $\overline{AA'}$ och $\overline{BB'}$, och betrakta linjen \overline{CM} ; denna skär sidolinjen \overline{AB} i en punkt C'' . Vi har nu att visa att $C'' = C'$, ty detta är liktydigt med att de tre givna cevianerna skär varandra i en punkt (i M). Den redan bevisade delen av Cevas sats ger emellertid att

$$\mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A) \cdot \mu(C''; A, B) = 1.$$

Det följer därför av cevavillkoret att $\mu(C''; A, B) = \mu(C'; A, B)$, dvs att $C'' = C'$. \square

Menelaos sats härstammar från antiken, medan den närbesläktade Cevas sats inte upptäcktes förrän i slutet av 1600-talet; den publicerades 1678 av den italienske matematikern GIOVANNI CEVA (ca 1647–1736).

Med hjälp av Cevas sats skall vi nu visa de välkända resultaten om medianernas, bisektrisernas och höjdernas skärningspunkter. Vi erinrar om att en *median* i en triangel är en linje genom ett hörn och motstående sidas mittpunkt.

Sats 3.4.4 *De tre medianerna i en triangel går genom en punkt, som kallas triangelns tyngdpunkt.*

Bevis. För mittpunkterna A' , B' och C' på sidorna BC , CA och AB i triangeln $\triangle ABC$ gäller $\mu(A'; B, C) = \mu(B'; C, A) = \mu(C'; A, B) = 1$, så cevavillkoret är uppenbarligen uppfyllt. \square

Sats 3.4.5 *De tre inre bisektriserna i en triangel går genom en punkt (inskrivna cirkelns medelpunkt).*

Bevis. (Se sats 2.12.7 för ett alternativt bevis.) Låt bisektriserna till hörnen A , B och C i triangeln $\triangle ABC$ skära motstående sidor i punkterna A' , B' och C' . På grund av bisektrissatsen (sats 3.2.6) är

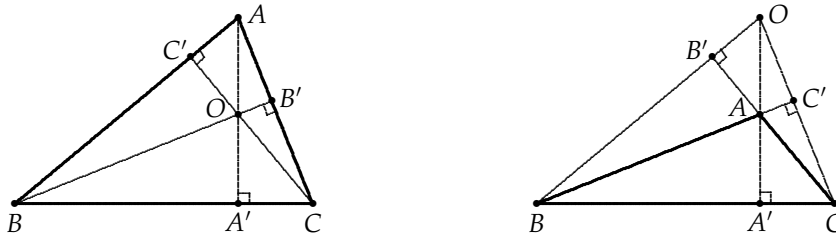
$$\mu(A'; B, C) = \frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad \mu(B'; C, A) = \frac{|BC|}{|BA|}, \quad \mu(C'; A, B) = \frac{|CA|}{|CB|},$$

varför

$$\mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A) \cdot \mu(C'; A, B) = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = 1.$$

Påståendet följer därför ur Cevas sats. \square

Sats 3.4.6 De tre höjderna i en triangel går genom en punkt, som kallas triangelns ortocentrum.



Figur 3.18

Ortocentrum O i spetsvinklig resp. trubbvinklig triangel $\triangle ABC$

Bevis. Om triangeln är rätvinklig, så går samtliga höjder genom hörnet med rät vinkel. Antag därför att $\triangle ABC$ ej är rätvinklig, och låt A' , B' och C' vara fotpunkterna för höjderna från hörnen A , B och C . Om triangeln är spetsvinklig så ligger alla tre fotpunkterna på triangelsidorna, och om den är trubbvinklig ligger två av fotpunkterna utanför triangelsidorna. I båda fallen är produkten av de tre delningsförhållandena $\mu(A'; B, C)$, $\mu(B'; C, A)$ och $\mu(C'; A, B)$ positiv. För att visa att cevavillkoret är uppfyllt räcker det därför att visa att beloppet av denna produkt är 1.

Betrakta de rätvinkliga triangelarna $\triangle AA'C$ och $\triangle BB'C$; triangelarna är likformiga eftersom $\angle ACA' = \angle BCB'$, och det följer att

$$\frac{|CB'|}{|CA'|} = \frac{|CB|}{|CA|}.$$

Analogt fås

$$\frac{|AC'|}{|AB'|} = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \text{och} \quad \frac{|BA'|}{|BC'|} = \frac{|BA|}{|BC|}.$$

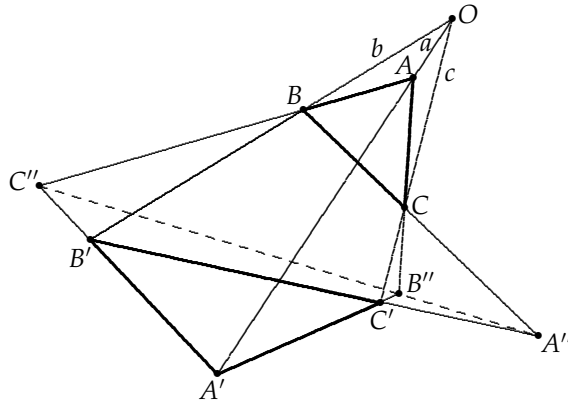
Genom att multiplicera ihop dessa likheter erhåller vi

$$\begin{aligned} |\mu(A'; B, C) \cdot \mu(B'; C, A) \cdot \mu(C'; A, B)| &= \frac{|BA'|}{|CA'|} \cdot \frac{|CB'|}{|AB'|} \cdot \frac{|AC'|}{|BC'|} \\ &= \frac{|CB'|}{|CA'|} \cdot \frac{|AC'|}{|AB'|} \cdot \frac{|BA'|}{|BC'|} = \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|BA|}{|BC|} = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kallas *kopolära* om det finns tre linjer a , b och c med gemensam skärningspunkt O så att a går genom A och A' , b går genom B och B' , samt c går genom C och C' . Triangelarna kallas *koaxiala* om det finns tre punkter A'' , B'' och C'' i linje så att A'' ligger på sidolinjerna \overline{BC} och $\overline{B'C'}$, B'' ligger på sidolinjerna \overline{CA} och $\overline{C'A'}$ och C'' ligger på sidolinjerna \overline{AB} och $\overline{A'B'}$.

Vi har formulerat definitionerna av kopolaritets och koaxialitet så att de skall vara meningsfulla för varje par av trianglar. Om motsvarande hörn i de båda triangelarna är skilda, så är förstas linjerna a , b och c entydigt bestämda (som $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$), och

om motsvarande sidolinjer är skilda, så är punkterna A'' , B'' och C'' entydigt bestämda som skärningspunkter till motsvarande sidolinjer.



Figur 3.19

Följande sats är grundläggande inom den sk projektiva geometrin.

Sats 3.4.7 (Desargues sats) *Kopolära trianglar är koaxiala, och omvänt.*

Bevis. Man verifierar lätt att två trianglar är såväl kopolära som koaxiala om ett par av motsvarande hörn sammanfaller eller om ett par av motsvarande sidolinjer sammanfaller.

Vi inskränker oss därför till att betrakta trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ i vilka motsvarande hörn och motsvarande sidolinjer är skilda. Sätt $a = \overline{AA'}$, $b = \overline{BB'}$, $c = \overline{CC'}$, och låt A'' , B'' , C'' beteckna skärningspunkterna mellan i tur och ordning \overline{BC} och $\overline{B'C'}$, \overline{CA} och $\overline{C'A'}$, samt \overline{AB} och $\overline{A'B'}$. Vi skall visa att linjerna a , b och c har en gemensam punkt O om och endast om punkterna A'' , B'' och C'' ligger i linje.

Antag först att linjerna a , b och c skär varandra i en äkta punkt O . Då är (A'', C', B') en menelaostrippel av punkter i linje till $\triangle OBC$, (B'', A', C') en menelaostrippel av punkter i linje till $\triangle OCA$, och (C'', B', A') en menelaostrippel av punkter i linje till $\triangle OAB$. Menelaos sats ger därför de tre likheterna

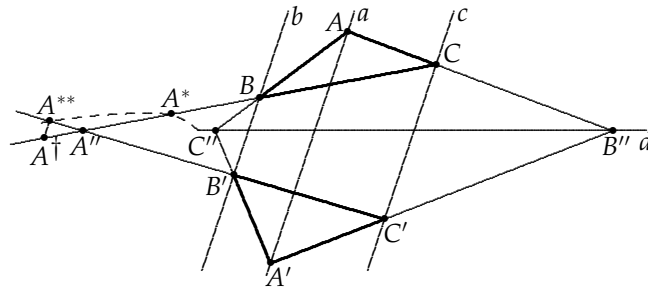
$$\begin{aligned}\mu(A''; B, C) \cdot \mu(C'; C, O) \cdot \mu(B'; O, B) &= -1, \\ \mu(B''; C, A) \cdot \mu(A'; A, O) \cdot \mu(C'; O, C) &= -1, \\ \mu(C''; A, B) \cdot \mu(B'; B, O) \cdot \mu(A'; O, A) &= -1.\end{aligned}$$

Ihopmultiplikation av de tre vänsterleden under iakttagande av (ii) i sats 3.3.3 ger

$$\mu(A''; B, C) \cdot \mu(B''; C, A) \cdot \mu(C''; A, B) = -1.$$

Men (A'', B'', C'') är en menelaostrippel till triangeln $\triangle ABC$, så det följer därför av ovanstående likhet att punkterna A'' , B'' och C'' ligger i linje.

Antag härnäst att skärningspunkten O är en oändlighetspunkt, dvs att linjerna a , b och c är parallella. Vi skall visa att A'' , B'' och C'' ligger i linje med ett motsägelseargument. Antag nämligen att de tre punkterna ej ligger i linje; då är linjerna $\overline{A''B''}$ och $\overline{B''C''}$ skilda, icke-parallella linjer så minst en av dem, $d = \overline{B''C''}$ säg, är inte parallell med linjen a . Låt nu A^* och A^{**} vara skärningspunkterna mellan d och \overline{BC} resp. d och $\overline{B'C'}$. Se fig. 3.20.



Figur 3.20

Enligt antagande är $A^{**} \neq A^*$, och vidare är projektionen A^\dagger av A^{**} på \overline{BC} parallellt med a skild från A^* . (A^*, B'', C'') och (A^{**}, B'', C'') är menelaostripplar av punkter i linje till trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$, varför

$$\begin{aligned} \mu(A^*; B, C) \cdot \mu(B''; C, A) \cdot \mu(C''; A, B) &= -1 \quad \text{och} \\ \mu(A^{**}; B', C') \cdot \mu(B''; C', A') \cdot \mu(C''; A', B') &= -1. \end{aligned}$$

Eftersom delningsförhållande är invariant under parallellprojektion, i det här fallet projektion parallellt med linjen a , är vidare

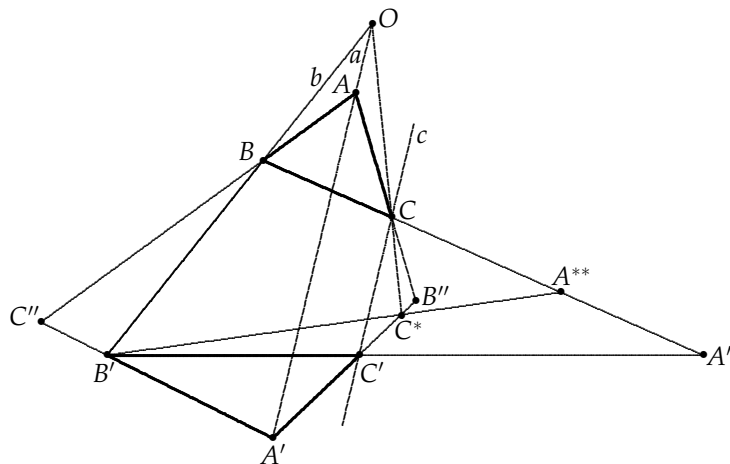
$$\begin{aligned} \mu(A^{**}; B', C') &= \mu(A^\dagger; B, C), & \mu(B''; C', A') &= \mu(B''; C, A) \quad \text{och} \\ \mu(C''; A', B') &= \mu(C''; A, B). \end{aligned}$$

Det följer därför ur de två likheterna ovan att

$$\mu(A^*; B, C) = \mu(A^\dagger; B, C),$$

dvs att $A^* = A^\dagger$, vilket är en motsägelse. Därmed är den ena riktningen av Desargues sats bevisad.

Antag omvänt att trianglarna är koaxiala, dvs att A'', B'', C'' ligger på en linje x . Låt O vara skärningspunkten mellan linjerna a och b . Vi skall visa att O också ligger på c . Låt för den skull C^* beteckna skärningspunkten mellan linjen \overline{OC} och sidolinjen $\overline{A'C'}$. Se fig. 3.21.



Figur 3.21

Om $C^* = C'$ så är saken klar, så antag därför att $C^* \neq C'$. Eftersom trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C^*$ är kopolarä kan vi tillämpa den redan bevisade delen av Desargues sats för att dra slutsatsen att de är koaxiala, dvs skärningspunkten A^{**} mellan sidolinjerna \overline{BC} och $\overline{B'C^*}$ ligger i linje med punkterna B'' och C'' . Detta innebär att A^{**} ligger på x , och eftersom $C^* \neq C'$ är $A^{**} \neq A''$. Punkterna A^{**} och A'' ligger emellertid också på \overline{BC} , varför $x = \overline{BC}$.

Med exakt samma argument visar vi att $x = \overline{CA}$. Följaktligen är $\overline{BC} = \overline{CA}$, vilket är en motsägelse. Därmed är Desargues sats fullständig bevisad. \square

Desargues sats gäller även för trianglar som ligger i olika plan, och beviset ovan går igenom även i detta fall.

ÖVNINGAR

- 3.23 Visa att de yttre bisektriserna till två hörn i en triangel samt den inre bisektrisen till det tredje hörnet går genom en punkt.
- 3.24 Visa att de yttre bisektriserna i en triangel skär motstående sidolinjer i tre punkter som ligger i linje.
- 3.25 Visa att de inre bisektriserna till två av hörnen i en triangel samt den yttre bisektrisen till det återstående hörnet skär motstående sidolinjer i tre punkter som ligger i linje.
- 3.26 Den i triangeln $\triangle ABC$ inskrivna cirkeln tangerar sidorna BC , CA och AB i punkterna A' , B' och C' . Visa att cevianerna $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ går genom en punkt (triangelns *Gergonnepunkt*).
- 3.27 De tre vidskrivna cirklarna tangerar sidorna i $\triangle ABC$ i punkterna A' , B' och C' . Visa att cevianerna $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ går genom en punkt (triangelns *Nagelpunkt*). (En *vidskrivnen* cirkel har sin medelpunkt utanför triangeln och tangerar en av sidorna och de övriga två sidolinjerna.)
- 3.28 Antag att cevianerna $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ i $\triangle ABC$ går genom punkten P . Visa att

$$\mu(P; A, A') = \mu(C'; A, B) + \mu(B'; A, C).$$

- 3.29 Visa med hjälp av föregående övning att triangelns tyngdpunkt delar medianerna i förhållandet 2 : 1.
- 3.30 Antag att cevianerna $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ i $\triangle ABC$ har en gemensam punkt P i det inre av triangeln. Visa att
- $$\frac{|PA'|}{|AA'|} + \frac{|PB'|}{|BB'|} + \frac{|PC'|}{|CC'|} = 1.$$
- 3.31 C' är en punkt på diagonallinjen \overline{AC} i parallelogrammen $ABCD$, B' ligger på sidolinjen \overline{AB} , D' på sidolinjen \overline{AD} och $A'B'C'D'$ är en parallelogram. Visa att linjerna \overline{AC} , $\overline{BD'}$ och $\overline{DB'}$ går genom en punkt.
- 3.32 På sidorna BC , CA och AB i triangeln $\triangle ABC$ konstrueras utvändigt liksidiga trianglar $\triangle BCA'$, $\triangle CAB'$ och $\triangle ABC'$. Visa att linjerna $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ går genom en punkt P_0 . (Om ingen triangelvinkel överstiger 120° , så är P_0 den punkt som minimerar uttrycket $|AP| + |BP| + |CP|$.)

3.5 Dubbelförhållande

Låt A , B , C , D vara fyra punkter på en linje, och antag till att börja med att punkterna A och B är äkta. Kvantiteten

$$(A, B; C, D) = \frac{\mu(C; A, B)}{\mu(D; A, B)}$$

kallas för *dubbelförhållandet* av punkterna A, B, C, D .

Om samtliga punkter är äkta är tydligen

$$(1) \quad (A, B; C, D) = \frac{C - A}{B - C} \cdot \frac{B - D}{D - A}$$

(där vi i högerledet följer vår konvention att beteckna en punkts koordinater med samma symbol som punkten), medan t ex

$$(A, B; C, \infty) = \frac{C - A}{C - B}$$

om ∞ är linjens oändlighetspunkt.

Genom att låta A resp. B gå mot oändligheten i högerledet av (1) inser vi att följande definition av dubbelförhållandet är naturlig i de fall då en av de två första punkterna är linjens oändlighetspunkt:

$$(\infty, B; C, D) = \frac{B - D}{B - C} \quad \text{och} \quad (A, \infty; C, D) = \frac{C - A}{D - A}.$$

Dubbelförhållandet beror av de fyra punkternas ordning; punkterna kan permuteras på 24 olika sätt, men de 24 motsvarande dubbelförhållandena antar högst sex olika värden. Vi har nämligen

Sats 3.5.1 Sätt $(A, B; C, D) = r$.

(i) *Dubbelförhållandets värde ändras inte då två punkter byter plats med varandra och samtidigt de två andra punkterna byter plats med varandra, dvs*

$$(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A) = r.$$

(ii) *Om endast de två första punkterna byter plats med varandra, så ändras dubbelförhållandets värde till $1/r$.*

(iii) *Om endast de två mellersta punkterna byter plats med varandra, så ändras dubbelförhållandets värde till $1 - r$.*

Beviset för sats 3.5.1 är en rättfram verifikation och utelämnas. Satsen har följande korollarium.

Korollarium Sätt $(A, B; C, D) = r$. Då är

(i) $(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A) = r$

(ii) $(B, A; C, D) = (A, B; D, C) = (C, D; B, A) = (D, C; A, B) = 1/r$

(iii) $(A, C; B, D) = (C, A; D, B) = (B, D; A, C) = (D, B; C, A) = 1 - r$

(iv) $(C, A; B, D) = (A, C; D, B) = (B, D; C, A) = (D, B; A, C) = 1/(1 - r)$

(v) $(C, B; A, D) = (B, C; D, A) = (A, D; C, B) = (D, A; B, C) = r/(r - 1)$

(vi) $(B, C; A, D) = (C, B; D, A) = (A, D; B, C) = (D, A; C, B) = (r - 1)/r$.

Om A, B, C, D är fyra punkter i linje med $(A, B; C, D) = -1$ så säges (A, B) och (C, D) vara två *harmoniska* punktpar.

I definitionen av harmoniska punktpar är, på grund av (i) och (ii) i korollariet ovan, dels ordningen mellan punktparen, dels den inbördes ordningen mellan punkterna inom varje par, oväsentlig. Exempelvis är (D, C) och (A, B) också harmoniska punktpar om (A, B) och (C, D) är harmoniska. Av den anledningen kan vi kalla två *sträckor* AB och CD *harmoniska* om motsvarande punktpar (A, B) och (C, D) är harmoniska.

För äkta punkter A och B är villkoret $(A, B; C, D) = -1$ ekvivalent med att $\mu(C; A, B) = -\mu(D; A, B)$, och följaktligen ligger den ena av punkterna C och D på

sträckan AB medan den andra ligger utanför. Vi ser också att det givet A , B och C alltid finns en fjärde punkt D så att (A, B) och (C, D) är harmoniska; punkten D kallas den *fjärde harmoniska punkten till AB och C* .

Den fjärde harmoniska punkten till en sträcka och dess mittpunkt är oändlighetspunkten.

I fortsättningen kommer vi ofta att utnyttja följande karakterisering av harmoniska sträckor.

Sats 3.5.2 Låt AB vara en sträcka med mittpunkt O , och låt C och D vara två punkter på linjen \overline{AB} . Sträckorna AB och CD är harmoniska om och endast om

$$(O - C) \cdot (O - D) = |OA|^2.$$

Bevis. Villkoret är oberoende av valet av koordinatsystem för linjen \overline{AB} . Vi väljer därför system så att A , O och B får koordinaterna -1 , 0 resp. 1 och kallar C :s och D :s koordinater för c resp. d . Då blir

$$(A, B; C, D) = \frac{c+1}{1-c} \cdot \frac{1-d}{d+1} = \frac{1+c-d-cd}{1-c+d-cd'}$$

varför

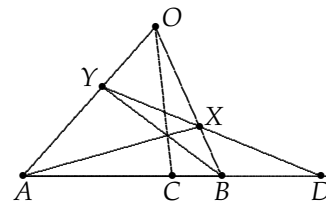
$$(A, B; C, D) = -1 \Leftrightarrow cd = 1 \Leftrightarrow (O - C)(O - D) = |OA|^2. \quad \square$$

Sats 3.5.3 Låt (C, X, Y) och (D, X, Y) vara menelaostripplar till $\triangle OAB$. Om cevianerna \overline{OC} , \overline{AX} och \overline{BY} har en gemensam punkt och om menelaospunkterna D , X och Y ligger i linje, så är (A, B) och (C, D) harmoniska punktpar.

Bevis. Cevas och Menelaos satser ger

$$\begin{aligned} \mu(C; A, B) \cdot \mu(X; B, O) \cdot \mu(Y; O, A) &= 1 \quad \text{och} \\ \mu(D; A, B) \cdot \mu(X; B, O) \cdot \mu(Y; O, A) &= -1, \end{aligned}$$

varur följer att $\mu(C; A, B) = -\mu(D; A, B)$. □



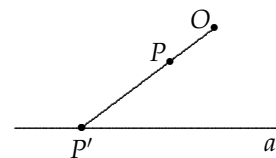
Figur 3.22

Sats 3.5.3 visar att man kan konstruera den fjärde harmoniska punkten D till en given sträcka AB och punkt C med enbart linjal: Välj först O godtyckligt utanför linjen \overline{AB} och X godtyckligt på sidan OB i $\triangle OAB$. Bestäm därefter skärningspunkten M mellan cevianerna \overline{OC} och \overline{AX} , samt skärningspunkten Y mellan sidolinjen \overline{OA} och linjen \overline{BM} . Låt slutligen D vara skärningspunkten mellan \overline{XY} och \overline{AB} .

Anledningen till att delningsförhållandet är så användbart är att det är invariant under parallellprojektion. På liknande sätt förklaras dubbelförhållandets betydelse av dess invarians under en mer generell typ av projektion, som vi nu skall definiera.

Låt a' vara en äkta linje, och låt O vara en punkt utanför a' . För varje punkt $P \neq O$ finns det en unik punkt P' på a' så att O , P och P' ligger i linje. Avbildningen $P \mapsto P'$ kallas *centralprojektion från O på a'* eller med O som centrum.

Observera att vi får parallellprojektion som specialfall genom att låta centrum O vara en oändlighetspunkt.



Figur 3.23

Sats 3.5.4 *Dubbelförhållandet är invariant under centralprojektion, dvs om A, B, C, D är fyra punkter utefter en linje a och om A', B', C', D' är deras bilder med avseende på en centralprojektion med centrum i en punkt O utanför a , så är*

$$(A', B'; C', D') = (A, B; C, D).$$

Bevis. Högst en av de fyra punkterna A, B, C, D är en oändlighetspunkt, och motsvarande gäller för deras bildpunkter. Vi kan därför utan inskränkning anta att A, B, A' och B' är äkta punkter. Betrakta dessa fyra punkter i ordningen $ABB'A'$. Linjen \overline{OC} skär linjerna $\overline{AB}, \overline{BB'}, \overline{B'A'}$ och $\overline{A'A}$ i punkterna C, O, C' resp. O, C' , och sats 3.4.1 ger därför

$$\mu(C; A, B) \cdot \mu(O; B, B') \cdot \mu(C'; B', A') \cdot \mu(O; A', A) = (-1)^4 = 1,$$

varur följer att

$$\mu(C; A, B) \cdot \mu(C'; B', A') = \mu(O; A, A') \cdot \mu(O; B', B).$$

Produkten $\mu(C; A, B) \cdot \mu(C'; B', A')$ är med andra ord oberoende av punkten C ! Följaktligen är

$$\mu(C; A, B) \cdot \mu(C'; B', A') = \mu(D; A, B) \cdot \mu(D'; B', A'),$$

dvs

$$(A, B; C, D) = \frac{\mu(C; A, B)}{\mu(D; A, B)} = \frac{\mu(D'; B', A')}{\mu(C'; B', A')} = (D', C'; B', A') = (A', B'; C', D'). \quad \square$$

Korollarium 1 *Låt A_1, A_2, A_3, A_4 vara fyra punkter på en linje a , låt A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 vara fyra punkter på en annan linje a' , och antag att det finns en punkt O så att A_2, A_3 och A_4 projiceras på A'_2, A'_3 resp. A'_4 under centralprojektion från O . Då projiceras A_1 på A'_1 under samma centralprojektion om och endast om*

$$(*) \quad (A_1, A_2; A_3, A_4) = (A'_1, A'_2; A'_3, A'_4).$$

Bevis. Låt A''_1 vara bilden på a' av A_1 under centralprojektion från O ; då är

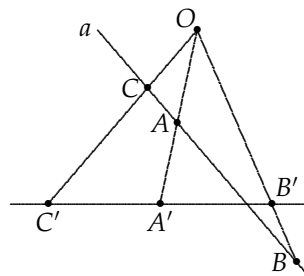
$$(A_1, A_2; A_3, A_4) = (A''_1, A'_2; A'_3, A'_4),$$

varför $A'_1 = A''_1$ om och endast om $(*)$ gäller. \square

Korollarium 2 *Låt a och a' vara två linjer som skär varandra i en punkt A . Låt A_1, A_2, A_3 vara tre andra punkter på a och A'_1, A'_2, A'_3 tre andra punkter på a' . Då skär linjerna $\overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}$ och $\overline{A_3A'_3}$ varandra i en punkt om och endast om*

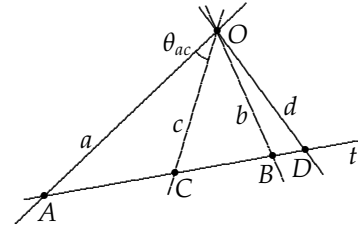
$$(A_1, A_2; A_3, A) = (A'_1, A'_2; A'_3, A).$$

Bevis. Låt O vara skärningspunkten mellan linjerna $\overline{A_2A'_2}$ och $\overline{A_3A'_3}$. Under centralprojektion från O på a' projiceras A_2, A_3 och A på A'_2, A'_3 och A . Korollarium 1 ger därför att $\overline{A_1A'_1}$ går genom O om och endast om villkoret i korollarium 2 är uppfyllt. \square



Figur 3.24

På grund av sats 3.5.4 är det möjligt att definiera *dubbelförhållandet* $(a, b; c, d)$ för fyra linjer ur ett linjeknippe. Antag nämligen att a, b, c och d är fyra linjer genom en (äkta eller oändlig) punkt O , och låt t och t' vara två linjer som inte går genom O och skär de fyra förstnämnda linjerna i punkterna A, B, C, D resp. A', B', C', D' . Enligt sats 3.5.4 är då $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Kvantiteten $(A, B; C, D)$ beror således enbart av linjerna a, b, c, d och inte av transversalen t . Detta berättigar till definitionen



Figur 3.25

$$(a, b; c, d) = (A, B; C, D).$$

För linjer a, b, c, d ur ett linjeknippe av första slaget kan vi uttrycka dubbelförhållandet $(a, b; c, d)$ med hjälp av sinus för vinklarna mellan linjerna. Antag att linjerna går genom O , och låt t vara en transversal till linjerna med äkta skärningspunkter i A, B, C resp. D . Sätt $\theta_{ac} = \angle AOC^\circ$, $\theta_{cb} = \angle COB^\circ$, $\theta_{ad} = \angle AOD^\circ$ och $\theta_{db} = \angle DOB^\circ$. Enligt sats 3.2.8 tillämpad på triangeln $\triangle OAB$ gäller då

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|OA| \cdot \sin \theta_{ac}}{|OB| \cdot \sin \theta_{cb}} \quad \text{och} \quad \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|OA| \cdot \sin \theta_{ad}}{|OB| \cdot \sin \theta_{db}}.$$

Division ger

$$\frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{\sin \theta_{ac}}{\sin \theta_{cb}} \cdot \frac{\sin \theta_{db}}{\sin \theta_{ad}}.$$

Följaktligen är

$$(a, b; c, d) = (A, B; C, D) = \pm \frac{\sin \theta_{ac}}{\sin \theta_{cb}} \cdot \frac{\sin \theta_{db}}{\sin \theta_{ad}},$$

där plustecknet skall väljas om punkterna C och D båda ligger på sträckan AB eller båda ligger utanför samma sträcka, och minustecknet skall väljas ifall en av punkterna C och D ligger på sträckan AB .

Vi kan uppfatta θ_{ac} som vinkeln mellan linjerna a och c ; det spelar därvid ingen roll vilken av de båda supplementvinklarna som vi väljer, ty supplementvinklar har samma sinus.

Sammanfattningsvis har vi kommit fram till följande sats.

Sats 3.5.5 För linjer a, b, c och d ur ett linjeknippe av första slaget är

$$(a, b; c, d) = \epsilon \cdot \frac{\sin \theta_{ac}}{\sin \theta_{cb}} \cdot \frac{\sin \theta_{db}}{\sin \theta_{ad}},$$

där θ_{xy} betecknar vinkeln mellan linjerna x och y , och koefficienten ϵ är lika med $+1$ om linjerna c och d endast går genom två av de fyra vinkelområden som definieras av linjerna a och b , och $\epsilon = -1$ i övriga fall.

Sats 3.5.6 Låt a_1, a_2, a_3, a_4 vara fyra linjer ur ett linjeknippe genom O , och låt a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 vara fyra linjer ur ett annat linjeknippe genom O' med $a_1 \neq a'_1$. Låt $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, beteckna skärningspunkten mellan a_i och a'_i (en godtycklig punkt på a_i om $a_i = a'_i$), och antag att A_2, A_3 och A_4 ligger i linje. Då ligger A_1 på samma linje om och endast om

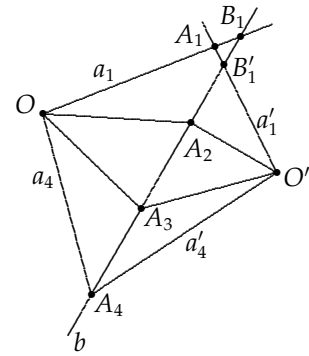
$$(*) \quad (a_1, a_2; a_3, a_4) = (a'_1, a'_2; a'_3, a'_4).$$

Bevis. Kalla linjen genom A_2 , A_3 och A_4 för b . Denna linje skär a_1 i en punkt B_1 och a'_1 i en punkt B'_1 . Vi skall visa att $B_1 = B'_1$ ($= A_1$) om och endast om (*) gäller.

Enligt definitionen av dubbelförhållanden för linjer är

$$(a_1, a_2; a_3, a_4) = (B_1, A_2; A_3, A_4) \quad \text{och} \\ (a'_1, a'_2; a'_3, a'_4) = (B'_1, A_2; A_3, A_4),$$

så likheten (*) gäller om och endast om $(B_1, A_2; A_3, A_4) = (B'_1, A_2; A_3, A_4)$, dvs om och endast om $B_1 = B'_1$. \square



Figur 3.26

Korollarium Antag att a_1, a_2, a_3 är tre linjer ur ett linjeknippe genom O , att a'_1, a'_2, a'_3 är tre linjer ur ett annat linjeknippe genom O' , samt att ingen av dessa linjer sammanfaller med förbindelseslinjen $a = \overline{OO'}$. Låt A_i beteckna skärningspunkten mellan a_i och a'_i för $i = 1, 2, 3$. Då gäller att A_1, A_2, A_3 ligger i linje om och endast om

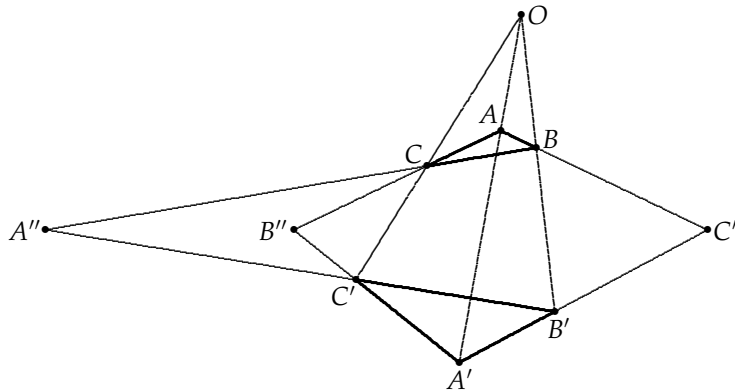
$$(**) \quad (a_1, a_2; a_3, a) = (a'_1, a'_2; a'_3, a).$$

Bevis. Låt b vara linjen $\overline{A_2A_3}$, vilken skär a i en punkt A_4 . Enligt satsen ovan ligger A_1 på samma linje som A_2, A_3 och A_4 , dvs på samma linje som A_2 och A_3 , om och endast om (***) gäller. \square

Som exempel på hur man kan använda sig av dubbelförhållanden ger vi ett alternativt bevis för ena riktningen av Desargues sats.

Desargues sats Kopolära trianglar är koaxiala.

Bevis. Vi använder beteckningarna i beviset för Desargues sats i föregående avsnitt (jmf fig 3.27).



Figur 3.27

Antag alltså att $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ och $\overline{CC'}$ går genom O . Vi får då

$$\begin{aligned} (\overline{AA''}, \overline{AB''}; \overline{AC''}, \overline{AA'}) &= (\overline{AA''}, \overline{AC}; \overline{AB}, \overline{AO}) && \text{(samma linjer)} \\ &= (\overline{OA''}, \overline{OC}; \overline{OB}, \overline{AO}) && \text{(korollarier till sats 3.5.6)} \\ &= (\overline{OA''}, \overline{OC'}; \overline{OB'}, \overline{A'O}) && \text{(samma linjer)} \\ &= (\overline{A'A''}, \overline{A'C'}; \overline{A'B'}, \overline{A'O}) && \text{(korollarier till sats 3.5.6)} \\ &= (\overline{A'A''}, \overline{A'B''}; \overline{A'C''}, \overline{AA'}) && \text{(samma linjer).} \end{aligned}$$

Likheten mellan ytterleden medför enligt korollarier till sats 3.5.6 att A'', B'' och C'' ligger i linje. \square

ÖVNINGAR

- 3.33 Inre och yttre bisektrisen till hörnet C i $\triangle ABC$ skär sidolinjen \overline{AB} i punkterna D och E . Visa att D och E delar sträckan AB harmoniskt.
- 3.34 Antag att D och E är punkter på sidolinjen \overline{AB} i $\triangle ABC$ och att $\overline{CD} \perp \overline{CE}$. Visa att \overline{CD} och \overline{CE} är de två bisektriserna till hörnet C om och endast om D och E delar sidan AB harmoniskt.
- 3.35 Punkterna A , B och C på linjen a är givna, liksom talet r . Konstruera en fjärde punkt D på a så att $(A, B; C, D) = r$.
- 3.36 Två skärande linjer a och b och en punkt P utanför dessa är givna. Konstruera en sträcka med ändpunkterna på linjerna som delas av P i ett givet förhållande.
- 3.37 Verifiera följande metod att konstruera den fjärde harmoniska punkten D till en given sträcka AB och punkt C : Välj en punkt P utanför linjen \overline{AB} och låt a vara den med \overline{AP} parallella linjen genom B . Linjen a skär \overline{PC} i en punkt M ; avsätt N på a så att B blir mittpunkt till sträckan MN . Drag slutligen linjen \overline{PN} ; denna skär linjen \overline{AB} i den sökta punkten D .
- 3.38 a) Låt A' , B' , C' vara mittpunkterna på sidorna BC , CA och AB i $\triangle ABC$. Visa att $(\overline{A'A}, \overline{A'B}; \overline{A'B'}, \overline{A'C'}) = -1$.
- b) Visa att samma slutsats gäller om A' , B' och C' istället är höjdernas fotpunkter.

3.6 Analytisk geometri

Vi har tidigare visat hur man i neutral geometri kan införa koordinater för punkter på en linje. På så sätt åstadkommer man en ett-ett-motsvarighet, som bevarar ordning och avstånd, mellan linjens punkter och de reella talen. I euklidisk geometri kan man identifiera planet med \mathbf{R}^2 genom att på välkänt sätt införa ett rätvinkligt koordinatsystem. Vi skall beskriva detta mycket kortfattat samt härleda linjens och cirkelns ekvationer.

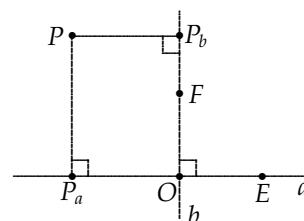
Fixera två linjer a och b som skär varandra under rät vinkel i en punkt O samt en enhetssträcka, och välj punkter E och F på a resp. b så att $|OE| = |OF| = 1$. Låt $\zeta: a \rightarrow \mathbf{R}$ och $\eta: b \rightarrow \mathbf{R}$ vara de entydigt bestämda koordinatfunktionerna för linjerna som uppfyller $\zeta(O) = \eta(O) = 0$ och $\zeta(E) = \eta(F) = 1$.

Låt för punkter P i planet P_a beteckna parallellprojektionerna av P på a parallellt med b , och låt analogt P_b vara projektionen av P på b parallellt med a . Sätt slutligen $x(P) = \zeta(P_a)$ och $y(P) = \eta(P_b)$. Man verifierar omedelbart att avbildningen

$$P \mapsto (x(P), y(P))$$

är en bijektion mellan planet och \mathbf{R}^2 . Avbildningen kallas en *koordinatavbildning*, och paret $(x(P), y(P))$ är *koordinaterna* för punkten P . Linjerna a och b brukar kallas x - och y -axlar.

Koordinaterna beror naturligtvis av valet av koordinatavbildning (dvs av valet av a , b , E och F), men i fortsättningen antar vi att denna är fixerad.



Figur 3.28

Om P och Q är två punkter, så är på grund av Pythagoras sats:

$$|PQ|^2 = |P_a Q_a|^2 + |P_b Q_b|^2.$$

Nu är $|P_a Q_a| = |\xi(P_a) - \xi(Q_a)| = |x(P) - x(Q)|$, och analogt är $|P_b Q_b| = |y(P) - y(Q)|$. Det följer att

$$|PQ| = \sqrt{(x(P) - x(Q))^2 + (y(P) - y(Q))^2}.$$

Detta är den så kallade *avståndsformeln* för avståndet mellan två punkter P och Q .

Koordinater gör det möjligt att använda algebraiska metoder på geometriska problem. De geometriska objekten beskrivs med ekvationer. En ekvation i två variabler säges vara *ekvationen för en punktmängd* M om ekvationens lösningsmängd L har följande egenskap:

$$(x, y) \in L \Leftrightarrow (x, y) \text{ är koordinaterna för en punkt i } M.$$

Ur avståndsformeln följer det omedelbart att *ekvationen för en cirkel* med radie r och medelpunkt i punkten med koordinaterna (x_0, y_0) är

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Vi skall avslutningsvis bestämma *linjens ekvation*. Låt c vara en linje, och låt (x, y) beteckna koordinaterna för en godtycklig punkt P . Vi skiljer på tre olika fall.

Fall 1: Linjen c är parallell med x -axeln a .

Antag att c skär y -axeln i punkten A med koordinaterna $(0, y_0)$. Tydligt ligger P på c om och endast om $P_b = A$, dvs om och endast om $y = \eta(P_b) = \eta(A) = y_0$. I detta fall är således linjens ekvation

$$y = y_0.$$

Fall 2: Linjen c är parallell med y -axeln.

På motsvarande sätt fås att linjens ekvation är av typen

$$x = x_0.$$

Fall 3: Linjen c är varken parallell med x - eller y -axeln.

Varje linje som är parallell med y -axeln b skär linjen c i en unik punkt. Låt A och B med koordinaterna $(0, \ell)$ resp. $(1, k + \ell)$ vara linjens skärningspunkter med y -axeln resp. med linjen $x = 1$. Låt slutligen P med koordinaterna (x, y) vara en godtycklig punkt skild från A på linjen c .

Invariansatsen medför att $\mu(P; B, A) = \mu(P_a; B_a, A_a) = \mu(P_b; B_b, A_b)$. Den sista likheten ger i koordinatform

$$\frac{1-x}{x-0} = \frac{k+\ell-y}{y-\ell},$$

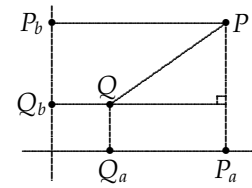
vilket efter förenkling blir $y = kx + \ell$. Denna ekvationen satisfieras förstås också av A 's koordinater. Ekvationen för linjen c är således

$$y = kx + \ell.$$

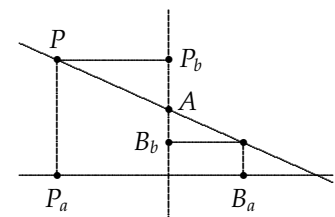
Vi kan sammanfatta de tre olika fallen på formen

$$Ax + By + C = 0,$$

där minst en av konstanterna A och B är skild från 0. Naturligtvis bestämmer inte linjen konstanterna A , B och C entydigt; två tripplar (A, B, C) och (A', B', C') ger nämligen samma linje om den ena trippeln är en multipel av den andra.



Figur 3.29



Figur 3.30

3.7 Motsägelsefrihet och kategoricitet

I kapitel 2 visade vi i olika exempel och övningar att den Cartesianska modellen är en modell för den neutrala geometrins axiomsystem (se exempel 7 i avsnitt 2.2 och övningarna 2.5, 2.17 och 2.33). I den Cartesianska modellen svara punkter mot talpar $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, och linjer kan identifieras med linjära ekvationer av typen $Ax + By + C = 0$ (där $A^2 + B^2 \neq 0$). Två skilda sådana linjer $Ax + By + C = 0$ och $A'x + B'y + C' = 0$ är parallella om och endast om ekvationssystemet

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

saknar lösning, något som inträffar om och endast om det finns en konstant $k \neq 0$ så att $A' = kA$, $B' = kB$ och $C' \neq kC$.

I den Cartesianska modellen finns det därför, givet en linje $Ax + By + C = 0$ och en punkt (x_0, y_0) utanför linjen (dvs med $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$), exakt en med den givna linjen parallell linje genom (x_0, y_0) , nämligen linjen

$$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0.$$

Det euklidiska parallellaxiomet är således sant i den Cartesianska modellen, och därmed har vi bevisat följande sats om euklidisk geometri.

Sats 3.7.1 *Den euklidiska geometrin är motsägelsefri (förutsatt att teorin för reella tal är motsägelsefri).*

En modell för hyperbolisk geometri kan inte vara isomorf med en modell för euklidisk geometri, så den neutrala geometrin är en icke-kategorisk teori. Däremot är alla modeller för euklidisk geometri inbördes isomorfa. Vi har nämligen följande resultat.

Sats 3.7.2 *Euklidisk geometri är kategorisk.*

Bevis. Fixera ett koordinatsystem i det euklidiska planet. För varje modell erhåller vi därigenom följande ett-ett-motsvarighet mellan å ena sidan de primitiva begreppens tolkningar i modellen och å andra sidan konkreta algebraiska objekt:

$$\begin{array}{ll} \text{Punkten } P \text{ med koordinaten } (x_0, y_0) & \leftrightarrow \text{talparet } (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2 \\ \text{Linjen } a \text{ med ekvationen } Ax + By + C = 0 & \leftrightarrow \text{ekvationen } Ax + By + C = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \text{Punkten } P \text{ ligger mellan punkterna } P_1 \text{ och } P_2 \\ \text{med koordinaterna } (x_1, y_1) \text{ och } (x_2, y_2) \end{array} \right\} & \leftrightarrow \begin{cases} x_0 = tx_1 + (1-t)x_2 & \text{och} \\ y_0 = ty_1 + (1-t)y_2, & \text{där} \\ 0 < t < 1 \end{cases} \end{array}$$

Begreppet *kongruens* mellan sträckor och mellan vinklar kan slutligen översättas till algebraiska ekvationer med hjälp av avståndsformeln och cosinussatsen, ty

$$\begin{aligned} AB \equiv A'B' &\Leftrightarrow |AB| = |A'B'| \quad \text{och} \\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C' &\Leftrightarrow \cos \angle BAC^\circ = \cos \angle B'A'C'^\circ \\ &\Leftrightarrow \frac{|CA|^2 + |AB|^2 - |BC|^2}{2|CA| \cdot |AB|} = \frac{|C'A'|^2 + |A'B'|^2 - |B'C'|^2}{2|C'A'| \cdot |A'B'|}. \end{aligned}$$

I den högra kolumnen i "lexikonet" ovan återfinns vi emellertid de primitiva begreppens tolkningar i den Cartesianska modellen, så lexikonet definierar en isomorfi mellan en godtycklig modell och den Cartesianska modellen. Följaktligen är alla modeller isomorfa med varandra. \square

3.8 Cirklar

I föregående kapitel studerade vi cirklar i neutral geometri. Det här och följande två avsnitt skall vi ägna åt euklidiska cirklar. Vi använder som tidigare beteckningen $\mathcal{C}(O; r)$ för cirkeln med medelpunkt O och radie r .

I neutral geometri finns det, givet tre punkter som inte ligger i linje, högst en cirkel genom de tre punkterna, men tre sådana punkter bestämmer inte alltid en cirkel. Nu har vi däremot

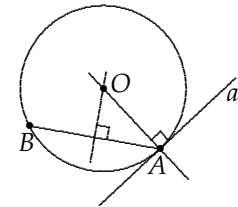
Sats 3.8.1 *Genom tre punkter A, B, C som inte ligger i linje går det en unik cirkel.*

Bevis. Satsen är innehållen i sats 2.13.6, men för läsarens skull upprepar vi det korta beviset. Mittpunktsnormalerna till sträckorna AB och BC skär varandra i en punkt O . Cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$, där $r = |OA|$, går genom A, B och C . \square

Sats 3.8.1 kan förstås också uttryckas på följande ekvivalenta vis. Varje triangel har en unik omskriven cirkel. Mittpunktsnormalerna till de tre sidorna i en triangel har en gemensam punkt (omskrivna cirkelns medelpunkt).

Sats 3.8.2 *Låt A vara en punkt på och B en punkt utanför linjen a . Det finns en unik cirkel genom B som tangerar a i punkten A .*

Bevis. Mittpunktsnormalen till sträckan AB och normalen till a genom punkten A skär varandra i en punkt O . Cirkeln $\mathcal{C}(O; r)$, där $r = |OA|$, går genom B och tangerar a i punkten A . \square



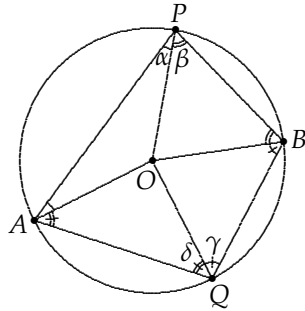
Figur 3.31

Vi övergår nu till att studera vinklar inskrivna i cirkelbågar.

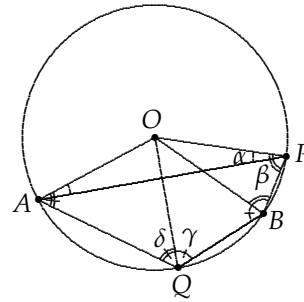
Sats 3.8.3 *Låt A och B vara två punkter på en cirkel. Om punkterna P och Q ligger på var sin av de båda cirkelbågarna mellan A och B , så är*

$$\angle APB^\circ + \angle AQB^\circ = 2R.$$

Bevis. Antag först att cirkelns medelpunkt O inte ligger på någon av korderna AP , PB , BQ eller QA , och betrakta de fyra likbenta triangelarna $\triangle AOP$, $\triangle POB$, $\triangle BOQ$ och $\triangle QOA$. Sätt $\alpha = \angle OAP^\circ = \angle OPA^\circ$, $\beta = \angle OPB^\circ = \angle OBP^\circ$, $\gamma = \angle OBQ^\circ = \angle OQB^\circ$ och $\delta = \angle OQA^\circ = \angle OAQ^\circ$.



Figur 3.32



Figur 3.33

Om O ligger i det inre av fyrhörningen $APBQ$, så är

$$\angle APB^\circ + \angle AQB^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2} \cdot \text{vinkelsum}(APBQ) = \frac{1}{2} \cdot 4\mathbf{R} = 2\mathbf{R}.$$

Om O ligger i det yttre av fyrhörningen, t ex så att O och fyrhörningen ligger på var sin sida om kordan AP , så är istället

$$\angle APB^\circ + \angle AQB^\circ = -\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2} \cdot \text{vinkelsum}(APBQ) = \frac{1}{2} \cdot 4\mathbf{R} = 2\mathbf{R}.$$

Om slutligen O ligger på fyrhörningens rand, t ex på kordan AP , så är

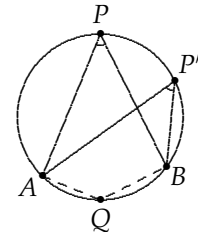
$$\angle APB^\circ + \angle AQB^\circ = \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{2} \cdot \text{vinkelsum}(APBQ) = \frac{1}{2} \cdot 4\mathbf{R} = 2\mathbf{R}. \quad \square$$

Korollarium 1 (Periferivinkelsatsen) Om P och P' ligger på samma cirkelbåge mellan A och B , så är $\angle APB^\circ = \angle AP'B^\circ$.

Bevis. Låt Q vara en punkt på den motsatta cirkelbågen. Enligt sats 3.8.3 är

$$\angle APB^\circ + \angle AQB^\circ = \angle AP'B^\circ + \angle AQB^\circ \quad (= 2\mathbf{R}),$$

så det följer att $\angle APB^\circ = \angle AP'B^\circ$. \square



Figur 3.34

Korollarium 2 (Thales sats) Antag att AB är diameter i en cirkel och att P ligger på en av halvcirkelarna mellan A och B . Då är vinkeln $\angle APB$ rät.

Bevis. Påståendet följer naturligtvis direkt ur sats 2.13.6, men vi skall här härleda det ur resultatet ovan. Låt Q vara en punkt på den motsatta halvcirkeln. Av symmetriskäl och på grund av korollariet ovan är då $\angle APB^\circ = \angle AQB^\circ$, och sats 3.8.3 ger därför att $\angle APB^\circ = \mathbf{R}$. \square

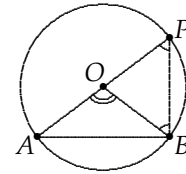
Låt AB vara en korda i en cirkel och låt P vara en punkt på cirkeln. Enligt periferivinkelsatsen är $\angle APB^\circ$ oberoende av P :s läge så länge som P ligger på samma cirkelbåge mellan A och B . Det gemensamma värdet som fås för den cirkelbåge som ligger på samma sida om kordan AB som cirkelns medelpunkt O , kallar vi för *kordans periferivinkel*, och vinkeln $\angle AOB^\circ$ kallas *kordans medelpunktsvinkel*. Vi har förutsatt att AB ej är en diameter. För en diameter AB har $\angle APB^\circ$ enligt Thales sats samma värde \mathbf{R} för alla punkter P på cirkeln (utom A och B), så diameters periferivinkel är \mathbf{R} medan dess medelpunktsvinkel naturligtvis definieras som $2\mathbf{R}$.

Korollarium 3 (Periferi-medelpunktsvinkelsatsen) *En kordas medelpunktsvinkel är lika med dubbla periferivinkeln.*

Bevis. För diametrar är saken klar, så antag att AB är en korda som inte går genom medelpunkten O . Välj P på cirkeln och diametralt motsatt A , och betrakta den likbenta triangeln $\triangle BOP$. Eftersom $\angle AOB$ är en yttervinkel till denna triangel, är

$$\angle AOB^\circ = \angle OPB^\circ + \angle OBP^\circ = 2 \cdot \angle APB^\circ,$$

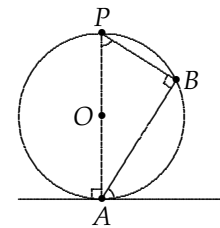
vilket bevisar korollariet. \square



Figur 3.35

Korollarium 4 *Den icke-trubbiga vinkeln mellan en tangent och en korda från tangeringspunkten är lika med kordans periferivinkel.*

Bevis. Låt A beteckna tangeringspunkten, och låt α vara storleken av den icke-trubbiga vinkeln mellan tangenten och kordan AB . Om $\alpha = \mathbf{R}$, så är AB en diameter, och i detta fall stämmer uppenbarligen korollariet. Så antag därför att $\alpha < \mathbf{R}$. Då ligger medelpunkten O utanför kordan AB . Låt P vara den mot A diametralt belägna punkten på cirkeln. Då är $\angle ABP^\circ = \mathbf{R}$, varför $\angle APB^\circ + \angle PAB^\circ = \mathbf{R}$. Å andra sidan är $\alpha + \angle PAB^\circ = \mathbf{R}$, så det följer att $\alpha = \angle APB^\circ$. \square



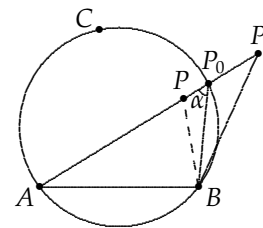
Figur 3.36

Periferivinkelsatsen har följande omvändning.

Sats 3.8.4 *Låt AB vara en given sträcka, och låt α vara storleken av en given vinkel. Mängden av alla punkter P som ligger på en sida om sträckan AB och som uppfyller $\angle APB^\circ = \alpha$, är en cirkelbåge mellan A och B .*

Bevis. Låt C vara en punkt på den givna sidan om sträckan AB så att $\angle ACB^\circ = \alpha$, och betrakta cirkeln genom punkterna A , B och C . Alla punkter P på cirkelbågen \widehat{ACB} uppfyller då villkoret $\angle ACP^\circ = \alpha$ enligt periferivinkelsatsen; vi skall visa att det inte finns några andra punkter som duger.

Antag därför att P ligger på den givna sidan om sträckan AB . Strålen \overrightarrow{AP} skär cirkelbågen \widehat{ACB} i en punkt P_0 och $\angle AP_0B^\circ = \alpha$. Om nu P ligger i det yttre av cirkeln, så är $\angle AP_0B$ en yttervinkel till $\triangle P_0PB$, varför $\angle APB^\circ < \alpha$, och om P ligger i det inre av cirkeln, så är istället $\angle APB$ en yttervinkel till $\triangle PP_0B$ och det följer att $\angle APB^\circ > \alpha$. I båda fallen är $\angle APB^\circ \neq \alpha$, så likhet kan bara gälla för punkter P på cirkelbågen \widehat{ACB} . \square



Figur 3.37

En fyrhörning $ABCD$ kallas en *cirkelfyrhörning* om det finns en cirkel som går genom de fyra hörnen. Cirkelfyrhörningar karakteriseras av följande sats.

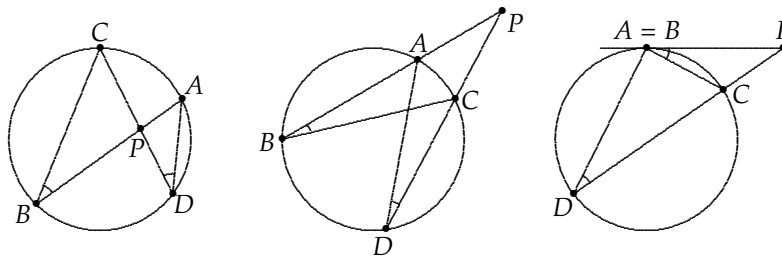
Sats 3.8.5 *Fyrhörningen $ABCD$ är en cirkelfyrhörning om och endast om summan av motstående vinklar är $2\mathbf{R}$.*

Bevis. Om $ABCD$ är en cirkelfyrhörning, så ligger A och C på en cirkel genom B och D och på var sin sida om kordan BD , så det följer ur sats 3.8.3 att $\angle A^\circ + \angle C^\circ = 2\mathbf{R}$.

Antag omvänt att $\angle DAB^\circ + \angle BCD^\circ = 2R$. Låt C vara cirkeln genom de tre punkterna A , B och D . På grund av satserna 3.8.3 och 3.8.4 måste varje punkt P , som ligger på motsatt sida om BD jämfört med A och som uppfyller $\angle BPD^\circ = 2R - \angle DAB^\circ$, ligga på den av de båda cirkelbågarna av C mellan B och D som inte innehåller A . Speciellt ligger alltså C på den bågen, dvs cirkeln C går genom samtliga hörn i fyrhörningen $ABCD$. \square

Sats 3.8.6 (Kordasatsen) *Två linjer antas skära en given cirkel i punkterna A och B , resp. C och D , samt varandra i en punkt P , som inte ligger på cirkeln. (Vi tillåter att t ex A och B sammanfaller, dvs att motsvarande linje är en tangent.) Då gäller*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$



Figur 3.38

Bevis. Betrakta trianglarna $\triangle PAD$ och $\triangle PCB$. På grund av periferivinkelsatsen (eller korollarium 4 om A och B sammanfaller) är $\angle PDA \equiv \angle PBC$, och vinklarna $\angle DPA$ och $\angle BPC$ är antingen vertikalkvinklar eller identiska, så $\angle DPA \equiv \angle BPC$. Följaktligen är trianglarna likformiga, och det följer därför att

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|},$$

dvs $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$. \square

Korollarium *Låt $C(O; r)$ vara en cirkel, och låt P vara en godtycklig punkt. Antag att a är en linje genom P och att a skär cirkeln i punkterna A och B (som förstås sammanfaller om a är en tangent). Då är produkten*

$$(P - A) \cdot (P - B)$$

oberoende av linjen a . Vidare är

$$(P - A) \cdot (P - B) = |OP|^2 - r^2.$$

Bevis. Uttrycket $(P - A) \cdot (P - B)$ är uppenbarligen negativt, noll eller positivt allteftersom P ligger i det inre, på eller i det yttre av cirkeln. Påståendet i korollariet gäller därför speciellt i det fall då P ligger på cirkeln, och om P inte ligger på cirkeln så följer det ur sats 3.8.6 att uttrycket $(P - A) \cdot (P - B) = \pm |PA| \cdot |PB|$ är oberoende av valet av a . Genom att speciellt välja linjen genom cirkelns medelpunkt erhåller vi

$$(P - A) \cdot (P - B) = (P - O + r) \cdot (P - O - r) = (P - O)^2 - r^2 = |OP|^2 - r^2. \quad \square$$

Produkten $(P - A) \cdot (P - B)$ kallas punktens P potens med avseende på den givna cirkeln $C(O; r)$.

Låt A och B vara två punkter på en cirkel, och låt P vara en tredje punkt på cirkeln. På grund av sats 3.8.3 och periferivinkelsatsen är $\sin \angle APB^\circ$ oberoende av P 's läge på

cirkeln. Vi skall utnyttja detta faktum för att definiera dubbelförhållandet av fyra punkter på en cirkel.

Låt A, B, C, D vara fyra punkter på en cirkel och låt P vara en femte punkt. Betrakta dubbelförhållandet $(\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC}, \overline{PD})$ av de fyra linjerna ur linjeknippen genom P ; enligt sats 3.5.5 är

$$(*) \quad (\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC}, \overline{PD}) = \epsilon \cdot \frac{\sin \angle APC^\circ}{\sin \angle CPB^\circ} \cdot \frac{\sin \angle DPB^\circ}{\sin \angle APD^\circ},$$

och högerledet är på grund av anmärkningen i stycket ovanför oberoende av punkten P . Vi kan därför definiera dubbelförhållandet $(A, B; C, D)$ av fyra punkter på en cirkel som

$$(A, B; C, D) = (\overline{PA}, \overline{PB}; \overline{PC}, \overline{PD}),$$

där P är en godtycklig femte punkt på cirkeln.

Sats 3.8.7 Låt A, B, C, D vara fyra punkter på en cirkel. Då är

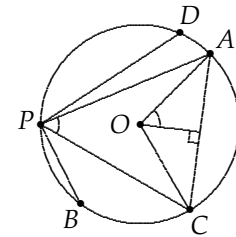
$$(A, B; C, D) = \epsilon \cdot \frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|DB|}{|AD|},$$

där $\epsilon = 1$ om C och D ligger på samma cirkelbåge mellan A och B , och $\epsilon = -1$ om C och D ligger på olika cirkelbågar mellan A och B .

Bevis. Låt O vara cirkelns medelpunkt och r dess radie, och låt P vara en femte punkt på cirkeln. På grund av periferi-medelpunktsvinkelsatsen är

$$|AC| = 2r \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \angle AOC^\circ\right) = 2r \cdot \sin \angle APC^\circ.$$

Motsvarande gäller förstås för $|CB|$, $|DB|$ och $|AD|$. Insättning i (*) ger nu resultatet. \square

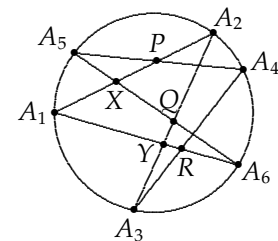


Figur 3.39

Som tillämpning på dubbelförhållande visar vi *Pascals "mystiska" hexagramsats*.

Sats 3.8.8 Antag att den sexsidiga polygonen $A_1A_2 \dots A_6$ har sina hörn på en cirkel. Då ligger skärningspunkterna mellan de tre paren av motsatta sidolinjer $\overline{A_1A_2}$ och $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_2A_3}$ och $\overline{A_5A_6}$, samt $\overline{A_3A_4}$ och $\overline{A_6A_1}$ i linje.

Bevis. Kalla skärningspunkterna P, Q resp. R , och låt X och Y vara skärningspunkterna mellan sidolinjerna $\overline{A_1A_2}$ och $\overline{A_5A_6}$ resp. $\overline{A_2A_3}$ och $\overline{A_6A_1}$. Punkterna A_1, A_2, P och X ligger i linje, så vi kan bilda dubbelförhållandet $(A_1, A_2; P, X)$. Med hjälp av definitionerna av dubbelförhållandet för linjeknippen och för punkter på en cirkel får vi nu



Figur 3.40

$$\begin{aligned} (A_1, A_2; P, X) &= (\overline{A_5A_1}, \overline{A_5A_2}; \overline{A_5P}, \overline{A_5X}) = (\overline{A_5A_1}, \overline{A_5A_2}; \overline{A_5A_4}, \overline{A_5A_6}) = (A_1, A_2; A_4, A_6) \\ &= (\overline{A_3A_1}, \overline{A_3A_2}; \overline{A_3A_4}, \overline{A_3A_6}) = (\overline{A_3A_1}, \overline{A_3Y}; \overline{A_3R}, \overline{A_3A_6}) = (A_1, Y; R, A_6). \end{aligned}$$

På grund av likheten mellan ytterleden går linjerna $\overline{A_2Y}$, \overline{PR} och $\overline{XA_6}$ genom en punkt (korollarium 2 till sats 3.5.4). Men linjerna $\overline{A_2Y} = \overline{A_2A_3}$ och $\overline{XA_6} = \overline{A_5A_6}$ skär varandra i Q , så det följer att \overline{PR} går genom Q , dvs P, Q och R ligger i linje. \square

ÖVNINGAR

- 3.39 Utnyttja Thales sats för att konstruera tangenten från en punkt utanför en cirkel med hjälp av passare och linjal.
- 3.40 Cirkeln C_1 ligger inuti cirkeln C_2 samt tangerar denna i punkten A . Från den i C_2 diametralt motsatta punkten B dras en av de båda tangenterna till C_1 ; tangenten tangerar C_1 i punkten C samt skär C_2 i D . Visa att $\angle BAD^\circ = 2 \cdot \angle BAC^\circ$.
- 3.41 Triangeln $\triangle ABC$ är liksidig. En stråle från C skär sidan AB i punkten D och omskrivna cirkeln i punkten P . Visa att

$$\frac{1}{|PD|} = \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}.$$

- 3.42 A och B är två punkter på en cirkel med radie r . C är en inre punkt och $\triangle ABC$ är liksidig. Cirkeln $C(A; |AB|)$ skär den förstnämnda cirkeln i punkten D (och B), och linjen \overline{CD} skär samma cirkel i E . Visa att $|CE| = r$.
- 3.43 Konstruera de fyra gemensamma tangenterna till två cirklar som ligger i varandras yttre med hjälp av passare och linjal.
- 3.44 Två fyrar A och B har koordinaterna $(0,0)$ och $(1,0)$. Ett fartyg F seglar utefter en kurs som är parallell med x -axeln och i x -axelns riktning. I ett visst ögonblick observerar man från fartyget att vinkeln $\angle AFB$ är rät. När fartyget har seglat ytterligare 1 längdenhet är vinkeln $\angle AFB$ 60° . Var befinner sig fartyget vid det sistnämnda tillfället? Lös problemet såväl analytiskt som konstruktivt med passare och linjal.
- 3.45 Visa *Pappos sats*: Låt P_1, P_3, P_5 vara tre punkter i linje och låt P_2, P_4, P_6 vara tre punkter utefter en annan linje. Då ligger skärningspunkterna mellan de tre paren $\overline{P_1P_2}$ och $\overline{P_4P_5}$, $\overline{P_2P_3}$ och $\overline{P_5P_6}$, samt $\overline{P_3P_4}$ och $\overline{P_6P_1}$ i linje.
- 3.46 Visa att i varje triangel ligger höjdernas skärningspunkt H , tyngdpunkten T och omskrivna cirkelns medelpunkt O i linje, och T delar sträckan HO i förhållandet $2:1$. (Linjen genom H, T och O kallas triangelns *eulerlinje*.)

3.9 Ortogonala cirklar

Två skärande linjer ger upphov till fyra vinklar som parvis är kongruenta (vertikalvinklarna); den icke-trubbiga vinkeln kallas *vinkeln mellan linjerna*.

Vinkeln mellan en cirkel och en skärande linje definierar vi nu som vinkeln mellan linjen och cirkelns tangent i en av skärningspunkterna, och med *vinkeln mellan två skärande cirklar* menas vinkeln mellan cirklarnas tangenter i en av skärningspunkterna. (I båda fallen är det naturligtvis likgiltigt vilken av skärningspunkterna som väljs.)

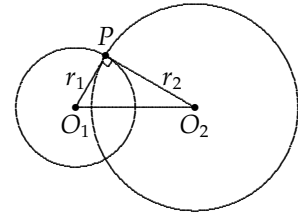
Två kurvor (linjer eller cirklar) kallas *ortogonal* om de skär varandra under rät vinkel. I det här avsnittet skall vi studera ortogonala cirklar, och vi startar med ett triviale kriterium för ortogonalitet.

Sats 3.9.1 *Följande tre villkor är ekvivalenta:*

- (i) Cirklarna $C(O_1; r_1)$ och $C(O_2; r_2)$ är ortogonal.
- (ii) Cirklarna skär varandra i en punkt P och $\angle O_1PO_2$ är rät.
- (iii) $|O_1O_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$.

En omedelbar konsekvens av (iii) är förstås att i ortogonala cirklar ligger vardera cirkelns medelpunkt utanför den andra cirkeln.

Bevis. Vinkeln mellan två linjer är densamma som vinkeln mellan deras normaler, och tangenten till en cirkel är vinkelrät mot radien till tangeringspunkten. Detta medför att villkoren (i) och (ii) är ekvivalenta. Ekvivalensen mellan (ii) och (iii) är en omedelbar konsekvens av Pythagoras sats med omvändning. (Observera att villkoret (iii) medför att cirkelarna skär varandra.) \square

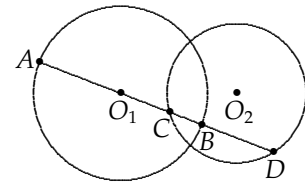


Figur 3.41

Ortogonalitet är intimt förknippat med harmonisk delning. Vi har nämligen

Sats 3.9.2 *Antag att stömlinjen till diametern AB i cirkeln $C_1 = C(O_1; r_1)$ skär en annan cirkel $C_2 = C(O_2; r_2)$ i två punkter C och D . Då är de båda cirkelarna ortogonala om och endast om diametern AB delas harmoniskt av punkterna C och D .*

Bevis. Enligt sats 3.5.2 är sträckorna AB och CD harmoniska om och endast om $(O_1 - C) \cdot (O_1 - D) = r_1^2$, dvs om och endast om O_1 's potens med avseende på cirkeln $C(O_2; r_2)$ är r_1^2 . Å andra sidan är denna potens enligt korollariet till kordasatsen lika med $|O_1O_2|^2 - r_2^2$. Sträckorna AB och CD är således harmoniska om och endast om $r_1^2 = |O_1O_2|^2 - r_2^2$, vilket på grund av sats 3.9.1 bevisar satsen. \square

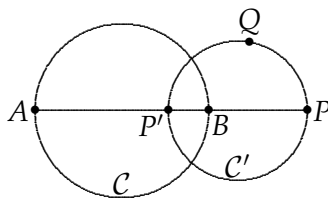


Figur 3.42

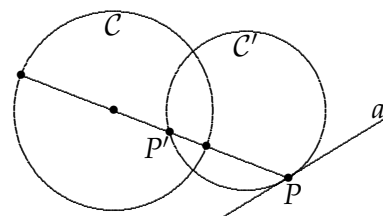
Korollarium 1 *Givet en cirkel C och två punkter P och Q , som inte ligger i linje med cirkelns medelpunkt, finns det en unik med C ortogonal cirkel C' som går genom P och Q .*

Bevis. Om både P och Q ligger på C , så är skärningspunkten mellan mittpunktsnormalen till kordan PQ och cirkelns tangent i punkten P medelpunkt i den unika ortogonala cirkeln C' .

Antag därför att P inte ligger på C , och låt AB vara den diameter i C som ligger i linje med P . (Se fig. 3.43.) Låt P' vara den fjärde harmoniska punkten till AB och P . En med C ortogonal cirkel genom P måste enligt föregående sats gå genom P' , och omvänt är varje cirkel genom P och P' ortogonal mot C . Eftersom P , Q och P' inte ligger i linje, finns det en unik cirkel C' som går genom dessa tre punkter, och denna cirkel är därför den sökta ortogonala cirkeln. \square



Figur 3.43



Figur 3.44

Korollarium 2 *Givet en cirkel C , en linje a som inte går genom cirkelns medelpunkt, samt en punkt P på a som inte ligger på cirkeln, finns det en unik med C ortogonal cirkel C' som tangerar a i punkten P .*

Bevis. Låt P' vara som i beviset för korollarium 1. Cirkeln C' måste gå genom P' och tangera a i P , och enligt sats 3.8.2 finns det en unik sådan cirkel. \square

Låt $C_1 = C(O_1; r_1)$ och $C_2 = C(O_2; r_2)$ vara två cirklar. Mängden av alla punkter P som har samma potens med avseende på de båda cirklarna, dvs som uppfyller

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2,$$

kallas cirklarnas *radikalaxel*.

Om cirklarna är koncentriska, så är radikalaxeln tom. För icke-koncentriska cirklar karakteriseras radikalaxeln av följande sats.

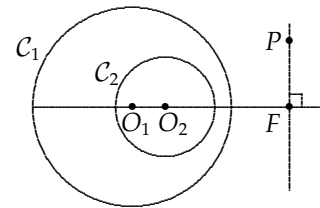
Sats 3.9.3 Låt $C_1 = C(O_1; r_1)$ och $C_2 = C(O_2; r_2)$ vara två icke-koncentrisk cirklar.

- (i) Radikalaxeln till de båda cirklarna är normal till förbindelsen $\overline{O_1O_2}$ mellan medelpunkterna.
- (ii) Om cirklarna skär eller tangerar varandra i en punkt, så går radikalaxeln genom denna punkt.
- (iii) Om C_2 ligger i det inre av C_1 , så skär radikalaxeln strålen $\overrightarrow{O_1O_2}$ utanför C_1 .
- (iv) Om slutligen cirklarna ligger i varandras yttre, så skär radikalaxeln sträckan O_1O_2 i en punkt utanför de båda cirklarna.

Bevis. (i): Låt P vara en punkt utanför linjen $\overline{O_1O_2}$, och låt F vara fotpunkten på $\overline{O_1O_2}$ för normalen genom P . Pythagoras sats ger

$$\begin{aligned} |PO_1|^2 &= |PF|^2 + |FO_1|^2 && \text{och} \\ |PO_2|^2 &= |PF|^2 + |FO_2|^2, && \text{varför} \end{aligned}$$

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2 \Leftrightarrow |FO_1|^2 - r_1^2 = |FO_2|^2 - r_2^2.$$



Figur 3.45

Detta visar att P tillhör radikalaxeln om och endast om F gör det.

För att bevisa (i) behöver vi således endast visa att det finns exakt en punkt F på $\overline{O_1O_2}$ som tillhör radikalaxeln. Inför för den skull koordinater på linjen $\overline{O_1O_2}$ så att O_1 blir origo och O_2 får koordinaten 1. En punkt F med koordinaten x tillhör radikalaxeln om och endast om

$$x^2 - r_1^2 = (x - 1)^2 - r_2^2,$$

och denna ekvation har en unik lösning, nämligen

$$(1) \quad x = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 + 1).$$

(ii): Punkter på en cirkel har potens noll med avseende på cirkeln. Radikalaxeln måste därför gå genom eventuella skärnings- eller tangeringspunkter till de båda cirklarna.

(iii) och (iv): Om cirklarna inte skär varandra så kan inte heller radikalaxeln skära någon av cirklarna. För att mera precist visa var radikalaxeln skär linjen $\overline{O_1O_2}$ använder vi oss av koordinatsystemet ovan. Ur (1) följer lätt att

$$\begin{aligned} r_2 + 1 < r_1 &\Leftrightarrow x > r_1 && \text{och} \\ r_1 + r_2 < 1 &\Leftrightarrow r_1 < x < 1 - r_2, \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med påståendena i (iii) och (iv). \square

Sats 3.9.4 Låt C_1 och C_2 vara två icke-koncentriska cirklar, och antag att cirkeln $C = C(O; r)$ är ortogonal mot C_1 . Då är C ortogonal mot C_2 om och endast om medelpunkten O ligger på radikalaxeln till C_1 och C_2 .

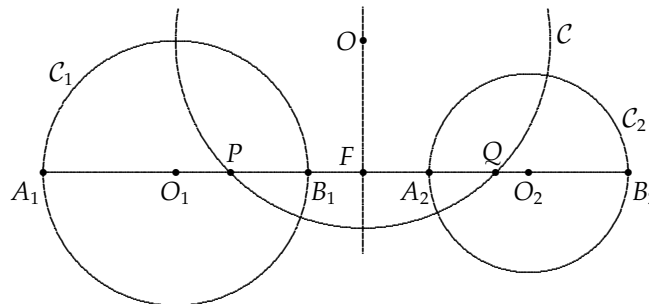
Bevis. Sätt $C_1 = C(O_1; r_1)$ och $C_2 = C(O_2; r_2)$. Enligt förutsättningarna och sats 3.9.1 är $|OO_1|^2 = r_1^2 + r^2$. Cirkeln C är därför ortogonal mot C_2 , dvs $|OO_2|^2 = r_2^2 + r^2$, om och endast om

$$r^2 = |OO_1|^2 - r_1^2 = |OO_2|^2 - r_2^2,$$

dvs om och endast om O ligger på radikalaxeln till C_1 och C_2 . \square

Sats 3.9.5 Låt $C_1 = C(O_1; r_1)$ och $C_2 = C(O_2; r_2)$ vara två icke-koncentriska cirklar, och låt $C = C(O; r)$ vara en cirkel som är ortogonal mot både C_1 och C_2 och vars medelpunkt således ligger på radikalaxeln till C_1 och C_2 . Då gäller:

- (i) Om C_1 och C_2 skär varandra i två punkter, så skär C inte linjen $\overline{O_1O_2}$.
- (ii) Om C_1 och C_2 tangerar varandra, så tangerar C linjen $\overline{O_1O_2}$.
- (iii) Om C_1 och C_2 inte skär eller tangerar varandra, så skär C linjen $\overline{O_1O_2}$ i två punkter P och Q som är oberoende av C . Punkterna P och Q är harmoniska delningspunkter till såväl diametern A_1B_1 i C_1 som diametern A_2B_2 i C_2 .



Figur 3.46

Bevis. Låt F vara skärningspunkten mellan $\overline{O_1O_2}$ och radikalaxeln till C_1 och C_2 . Sats 3.9.1 och Pythagoras sats, tillämpad på $\triangle O_1OF$, ger

$$r^2 + r_1^2 = |OO_1|^2 = |FO_1|^2 + |FO|^2.$$

Enligt sats 3.9.3 är $|FO_1| < r_1, = r_1$ resp. $> r_1$ allteftersom C_1 och C_2 skär varandra i två punkter, tangerar varandra resp. ej skär varandra. Det följer därför av ekvationen ovanför att $|FO| > r, = r$ och $< r$ i de respektive fallen. Detta bevisar (i), (ii) och att C skär $\overline{O_1O_2}$ i två punkter P och Q om C_1 och C_2 inte skär varandra. Pythagoras sats ger nu

$$|FP|^2 + |FO|^2 = |OP|^2 = r^2 = |FO_1|^2 + |FO|^2 - r_1^2,$$

dvs

$$|FP|^2 = |FO_1|^2 - r_1^2 \quad (= F\text{:s potens m.a. på cirkeln } C_1).$$

Den sista ekvationen visar att P 's läge är oberoende av valet av ortogonal cirkel C , och motsvarande gäller förstås för den andra skärningspunkten Q . Slutligen delar P och Q såväl diametern i C_1 som diametern i C_2 harmoniskt på grund av sats 3.9.2. \square

Korollarium Låt A_1B_1 och A_2B_2 vara två sträckor i linje, och antag att sträckorna inte har några gemensamma ändpunkter och att antingen den ena sträckan är en delsträcka av den andra eller också att de båda sträckorna är disjunkta. Då finns det två punkter P och Q som delar såväl A_1B_1 som A_2B_2 harmoniskt.

Bevis. Om sträckorna har gemensam mittpunkt, så duger denna och oändlighetspunkten. Låt annars C_i vara cirkeln med A_iB_i som diameter, $i = 1, 2$, och välj en cirkel C med medelpunkt på radikalaxeln till C_1 och C_2 och ortogonal mot C_1 . Då skär C linjen $\overline{O_1O_2}$ i de sökta punkterna P och Q . \square

ÖVNINGAR

- 3.47 a är avståndet mellan två skärande cirkelns medelpunkter, b är den gemensamma kordans längd, och r och r' är cirkelns radier. Visa att cirkelns är ortogonala om och endast om $ab = 2rr'$.
- 3.48 Låt AB vara diameter i en cirkel, och antag att linjerna \overline{PA} och \overline{PB} skär cirkeln igen i punkterna Q resp. R . Visa att cirkeln genom P , Q och R är ortogonal mot den givna cirkeln.
- 3.49 Tre cirkelns, vars medelpunkter inte ligger i linje, är givna. Bilda de tre radikalaxlarna till cirkelns tagna parvis. Visa att dessa har en gemensam punkt (som kallas de tre cirkelns radikalcentrum.)
- 3.50 En godtycklig cirkel skär två icke-koncentriska, icke-skärande cirkelns i punkterna A_1, B_1 resp. A_2, B_2 . Låt P vara skärningspunkten till linjerna $\overline{A_1B_1}$ och $\overline{A_2B_2}$. Visa att normalen genom P mot förbindelselinjen mellan de sistnämnda cirkelns medelpunkter är dessa cirkelns radikalaxel.

3.10 Inversion

Många geometriska problem kan förenklas med hjälp av någon lämplig transformation. I det här avsnittet skall vi studera en mycket användbar sådan transformation, nämligen inversion.

Fixera en cirkel $C = C(O; r)$. För varje punkt $P \neq O$ finns det en unik punkt P' på strålen \overrightarrow{OP} så att

$$|OP'| \cdot |OP| = r^2.$$

Avbildningen $P \mapsto P'$ avbildar mängden av alla punkter utom O bijektivt på sig själv. Avbildningen kallas *inversion i cirkeln C* , och punkten O är *inversionscentrum*.

Observera att $(P')' = P$, dvs inversion är en *involutiv* avbildning (en avbildning som sammanfaller med sin invers). Punkterna P och P' kallas *inversa punkter* med avseende på cirkeln C (eller med avseende på den givna inversionen).

Punkterna på cirkeln C är *fixpunkter*, dvs avbildas på sig själva. Punkter utanför C avbildas på punkter innanför cirkeln, och omvänt. För att på ett naturligt sätt kunna definiera inversen även till medelpunkten O inför vi i detta avsnitt en *oändlighetspunkt* ∞ , som vi låter ligga på *alla* linjer, och sätter

$$O' = \infty \quad \text{och} \quad \infty' = O.$$

(Observera att vi här använder en annan konvention beträffande oändlighetspunkter än i avsnitt 3.3.)

Inversion hänger nära ihop med harmonisk delning, och följande sats är bara en omformulering av sats 3.5.2.

Sats 3.10.1 Antag att P inte ligger på cirkeln C , och låt AB vara den diameter på vars stömlinje P ligger. Då delar P och P' diametern AB harmoniskt.

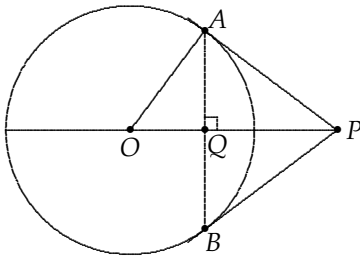
Vi har redan beskrivit ett par olika sätt att konstruera den fjärde harmoniska punkten och därmed alltså den inversa punkten till en given punkt och cirkel (sats 3.5.3 och övning 3.37). Nästa sats ger upphov till ytterligare en konstruktion.

Sats 3.10.2 Antag att P ligger utanför cirkeln C , och låt A och B vara tangeringspunkterna för de båda tangenterna från P . Då är skärningspunkten mellan kordan AB och sträckan OP den inversa punkten till P .

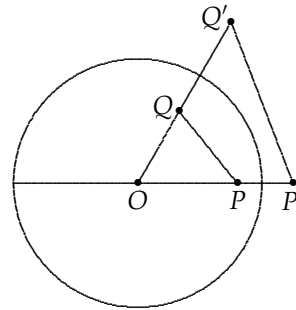
Bevis. Låt cirkelns radie vara r , och kalla skärningspunkten Q . Likformighet ger (se fig. 3.47)

$$\frac{|OP|}{|OA|} = \frac{|OA|}{|OQ|},$$

$$\text{dvs } |OQ| \cdot |OP| = |OA|^2 = r^2. \quad \square$$



Figur 3.47



Figur 3.48

Sats 3.10.3 Låt P och Q vara två punkter som inte ligger i linje med inversionscentrum O . Då är $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$.

Bevis. (Jmf fig. 3.48.) Den definierande identiteten $|OP'| \cdot |OP| = |OQ'| \cdot |OQ| = r^2$ medför att

$$\frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP|}.$$

Eftersom $\angle POQ = \angle Q'OP'$, följer nu påståendet ur likformighetsatsen. \square

Korollarium Om P och P' resp. Q och Q' är inversa punkter med avseende på cirkeln $C(O; r)$, så är

$$|P'Q'| = \frac{|PQ| \cdot r^2}{|OP| \cdot |OQ|}.$$

Bevis. Antag först att O , P och Q bildar en triangel; då är på grund av sats 3.10.3

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|OP'|}{|OQ|} = \frac{|OP'| \cdot |OP|}{|OQ| \cdot |OP|} = \frac{r^2}{|OP| \cdot |OQ|}.$$

Antag därefter att P och Q ligger på en linje genom O , och inför koordinater för denna linje med O som origo. Om vi som vanligt betecknar övriga punkters koordinater med samma symboler som punkterna själva, så är

$$P' = \frac{r^2}{P} \quad \text{och} \quad Q' = \frac{r^2}{Q}$$

varför

$$|P'Q'| = |P' - Q'| = \left| \frac{r^2}{P} - \frac{r^2}{Q} \right| = r^2 \frac{|P - Q|}{|P| \cdot |Q|} = r^2 \frac{|PQ|}{|OP| \cdot |OQ|}. \quad \square$$

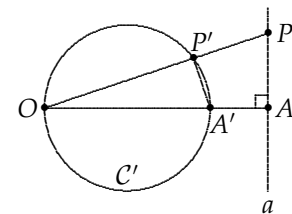
Följande sex satser med korollarier förklarar varför inversioner är användbara för att förenkla problem om cirklar och linjer.

Sats 3.10.4 Under inversion i cirkeln $C_0 = C(O; r)$ avbildas

- (i) varje linje genom O på sig själv;
- (ii) varje linje utanför O på en cirkel genom O ;
- (iii) varje cirkel genom O på en linje som inte passerar genom O ;
- (iv) varje cirkel som inte går genom O på en cirkel som inte går genom O .

Bevis. (i) är uppenbart.

(ii) Låt a vara en linje som ej passerar genom O , och låt A beteckna fotpunkten på a för normalen från O . Låt P vara en godtycklig punkt skild från A på a , och betrakta inverserna A' och P' . Enligt sats 3.10.3 är $\triangle OP'A' \sim \triangle OAP$, så det följer att $\angle OP'A'$ är rät. Punkten P' ligger således på cirkeln C' med OA' som diameter.

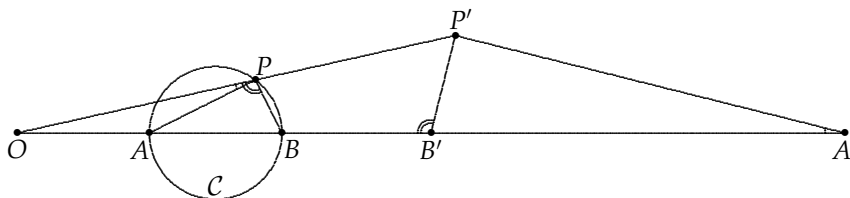


Figur 3.49

Omvänt är varje punkt Q på cirkeln C' invers till en punkt på linjen a , ty O är invers till oändlighetspunkten ∞ på a , och om $Q \neq O$ så skär strålen \overrightarrow{OQ} linjen a i en punkt R , vars invers enligt ovan är Q .

(iii) följer genom att vända på resonemanget i (ii).

(iv) Antag att C är en cirkel som ej går genom O . Låt AB vara den diameter i C som ligger i linje med O , och låt P vara en tredje punkt på cirkeln. Betrakta inverserna A' , B' och P' .



Figur 3.50

Enligt sats 3.10.3 är $\triangle OA'P' \sim \triangle OPA$ och $\triangle OB'P' \sim \triangle OPB$, varför $\angle OA'P' \equiv \angle OPA$ och $\angle OB'P' \equiv \angle OPB$. Beroende på om O ligger på eller utanför diametern AB så gäller

$$\angle APB^\circ = \angle OPA^\circ + \angle OPB^\circ = \angle OA'P'^\circ + \angle OB'P'^\circ = 2R - \angle A'P'B'^\circ$$

resp.

$$\angle APB^\circ = \angle OPB^\circ - \angle OPA^\circ = \angle OB'P'^\circ - \angle OA'P'^\circ = \angle A'P'B'^\circ.$$

Vinkeln $\angle APB$ är rät enligt Thales sats, och i båda fallen blir därför också $\angle A'P'B'$ rät. Följaktligen ligger P' på cirkeln C' med $A'B'$ som diameter. Varje punkt Q på C' är invers till en punkt på C , ty resonemanget ovan visar att Q' ligger på C och $(Q')' = Q$. \square

Anmärkning. Av beviset ovan följer att i fall (ii) är den givna linjen a parallell med bildcirkelns tangent i O .

På grund av sats 3.10.4 är det lämpligt att inte skilja på linjer och cirklar i samband med inversioner. Vi inför därför några förenklande konventioner.

Med en "cirkel" (inom citationstecken!) menas en cirkel eller en linje.

Två linjer säges *tangera* varandra i (oändlighetspunkten) om de är parallella. Detta innebär att vi meningsfullt kan tala om två tangerande "cirklar". Observera att två godtyckliga "cirklar" tangerar varandra om och endast om de har exakt en gemensam punkt (oändlighetspunkten inräknad).

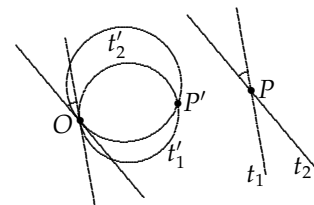
Slutligen säges två punkter P och Q vara *inversa med avseende på en given linje a* om de är varandras spegelbilder i linjen, dvs om a är mittpunktsnormal till sträckan PQ . Oändlighetspunkten ∞ betraktas som invers till sig själv med avseende på alla linjer.

Korollarium *Tangerande "cirklar" avbildas under inversion på tangerande "cirklar".*

Bevis. Eftersom inversion är en bijektiv avbildning bevaras egenskapen att ha exakt en skärningspunkt. \square

Sats 3.10.5 *Två "cirklar" som skär varandra under vinkeln α avbildas under inversion på "cirklar" som skär varandra under samma vinkel.*

Bevis. Låt C_1 och C_2 vara två "cirklar" som skär varandra i punkten P . Vi skall visa att bilderna C'_1 och C'_2 skär varandra under samma vinkel i punkten P' . Låt därför t_1 och t_2 vara tangenterna till C_1 resp. C_2 i P (om t ex C_1 redan är en linje så tar vi förstås $t_1 = C_1$), och låt t'_1 och t'_2 vara deras bilder under inversionen. Enligt korollariet ovan tangerar t'_1 "cirkeln" C'_1 och t'_2 "cirkeln" C'_2 , så vinkeln mellan C'_1 och C'_2 är densamma som vinkeln mellan t'_1 och t'_2 .



Figur 3.51

Vi har alltså att visa att vinkeln mellan t_1 och t_2 är densamma som vinkeln mellan t'_1 och t'_2 . Men t_1 och t_2 är linjer. Om dessa skär varandra i inversionscentrum O , så är $t'_1 = t_1$ och $t'_2 = t_2$, och saken är klar. I annat fall är t'_1 och t'_2 cirklar genom O och P' , och vinkeln vid O är densamma som vinkeln vid P' . Enligt anmärkningen efter sats 3.10.4 är emellertid tangenterna till t'_1 och t'_2 vid O parallella med linjerna t_1 och t_2 . Vinklarna är således lika. \square

Korollarium *Ortogonal "cirklar" avbildas under inversion på ortogonal "cirklar".*

Sats 3.10.6 *Låt P och Q vara två punkter som inte ligger på "cirkeln" C_0 .*

- (i) *Om P och Q är varandras inverser med avseende på C_0 , så är varje "cirkel" C genom P och Q ortogonal mot C_0 .*
- (ii) *Omvänt, om det går två mot "cirkeln" C_0 ortogonal "cirklar" C_1 och C_2 genom punkterna P och Q , så är dessa punkter inversa med avseende på C_0 .*

Bevis. (i) Antag först att C_0 är en cirkel och att P och Q är inversa punkter. En av dessa, P säg, ligger då på en diameter AB i cirkeln C_0 , och Q är enligt sats 3.10.1 den fjärde harmoniska punkten till sträckan AB och punkten P . Det följer därför av sats 3.9.2 att varje cirkel C genom P och Q är ortogonal mot C_0 . Givetvis är också "cirkeln" \overline{PQ} (diameterens förlängning) ortogonal mot C_0 .

Om "cirkeln" C_0 är en linje, så är denna linje mittpunktsnormal till sträckan PQ . Varje cirkel genom P och Q har därför sin medelpunkt på linjen C_0 och är följaktligen ortogonal mot C_0 , liksom "cirkeln" \overline{PQ} .

(ii) Fallet att C_0 är en linje lämnas som enkel övning åt läsaren. Vi antar därför att C_0 är en cirkel med medelpunkt O . På grund av sats 3.10.1 räcker det att visa att P och Q delar en diameter i C_0 harmoniskt.

Om den ena av de två med C_0 ortogonala cirklarna genom P och Q är en linje, så skär denna linje cirkeln C_0 i två diametralt motsatta punkter A och B . Det följer nu av sats 3.9.2 att punkterna P och Q delar diametern AB harmoniskt.

Om båda "cirklarna" C_1 och C_2 är cirklar, så betraktar vi linjen \overline{OP} ; denna skär C_0 i två punkter A och B , C_1 i P och ytterligare en punkt R , samt C_2 i P och ytterligare en punkt S . Sträckan AB är en diameter i cirkeln C_0 , och på grund av sats 3.9.2 delas denna diameter harmoniskt av såväl punkterna P och R som P och S . Det följer att $R = S$. Punkten R är således den andra skärningspunkten mellan cirklarna C_1 och C_2 , dvs $R = Q$, vilket innebär att P och Q delar diametern AB harmoniskt. \square

Sats 3.10.7 Låt $P \mapsto P'$ beteckna inversionen med avseende på "cirkeln" C_0 . Låt C vara en annan "cirkel", och antag att punkterna R och S är inversa punkter med avseende på "cirkeln" C . Då är bildpunkterna R' och S' inversa punkter med avseende på bildcirkeln "bildcirkeln" C' ($= \{P' \mid P \in C\}$).

Bevis. Låt C_1 och C_2 vara två "cirklar" genom R och S ; dessa är ortogonala mot C enligt satsen ovan. Korollariet till sats 3.10.5 ger att C'_1 och C'_2 är ortogonala mot C' , så det följer därför av sats 3.10.6 (ii) att skärningspunkterna R' och S' till C'_1 och C'_2 är inversa med avseende på C' . \square

Sats 3.10.8 Antag att cirklarna C_1 och C_2 inte skär eller tangerar varandra. Då finns det en inversion som avbildar dessa cirklar på två koncentriska cirklar.

Bevis. Låt A_1B_1 och A_2B_2 vara diametrar längs samma linje i cirklarna C_1 och C_2 . Enligt korollariet till sats 3.9.5 finns det två punkter P och Q som är harmoniska med avseende på både A_1B_1 och A_2B_2 . Punkterna P och Q är på grund av sats 3.10.1 inversa punkter med avseende på såväl C_1 som C_2 . Under en godtycklig inversion med P som inversionscentrum avbildas P på oändlighetspunkten ∞ och Q på en punkt O , och ∞ och O är inversa med avseende på bildcirklarna C'_1 och C'_2 enligt föregående sats. Det följer att O är medelpunkt i båda dessa cirklar, som således är koncentriska. \square

Dubbelförhållandet $(A, B; C, D)$ är definierat för fyra punkter på en "cirkel". Enligt sats 3.10.4 ligger de inversa punkterna med avseende på en godtycklig inversion på en "cirkel", så dubbelförhållandet $(A', B'; C', D')$ är också väldefinierat.

Sats 3.10.9 Dubbelförhållandet $(A, B; C, D)$ av fyra punkter på en "cirkel" är invariant under inversion $P \mapsto P'$ med avseende på en godtycklig "cirkel", dvs

$$(A', B'; C', D') = (A, B; C, D).$$

Bevis. Om vi bortser från det fall då någon av punkterna är oändlighetspunkten, så är

$$(A, B; C, D) = \epsilon \frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|DB|}{|AD|},$$

där $\epsilon = -1$ om A och B separerar C och D , dvs om exakt en av punkterna C och D ligger på sträckan AB (då "cirkeln" är en linje) eller på var sin cirkelbåge mellan A och

B (då "cirkeln" är en cirkel), och $\epsilon = 1$ i övriga fall. I cirkelfallet är detta sats 3.8.7, och i linjefallet följer formeln enkelt från definitionen.

Man verifierar lätt att A' och B' separerar C' och D' om och endast om A och B separerar C och D . Koefficienten ϵ är med andra ord invariant under inversion.

Antag nu att inversionscentrum O är skilt från de fyra punkterna A, B, C och D . Korollariet till sats 3.10.3 ger då efter insättning och förenkling

$$(A', B'; C', D') = \epsilon \frac{|A'C'|}{|C'B'|} \cdot \frac{|D'B'|}{|A'D'|} = \epsilon \frac{|AC|}{|CB|} \cdot \frac{|DB|}{|AD|} = (A, B; C, D).$$

Vi överlåter åt läsaren att verifiera invariansen i de fall då någon av punkterna är oändlighetspunkten eller sammanfaller med inversionscentrum. \square

Som tillämpning på inversion visar vi två antika satser.

Sats 3.10.10 (Ptolemaios sats) *Låt $ABCD$ vara en cirkelfyrhörning. Då är*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|.$$

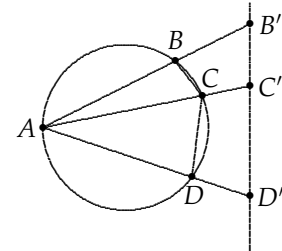
Bevis. Under inversion med A som centrum och r som radie avbildas den kring $ABCD$ omskrivna cirkeln på en linje. Låt B', C' och D' vara inverserna till B, C och D . Då är alltså

$$|B'D'| = |B'C'| + |C'D'|.$$

Korollariet till sats 3.10.3 ger därför

$$\frac{|BD| \cdot r^2}{|AB| \cdot |AD|} = \frac{|BC| \cdot r^2}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|CD| \cdot r^2}{|AC| \cdot |AD|},$$

vilket efter förenkling ger identiteten i satsen. \square



Figur 3.52

Sats 3.10.11 (Apollonius sats) *Låt A och B vara två punkter, och låt k vara ett positivt tal $\neq 1$. Mängden Γ av alla punkter P som uppfyller likheten*

$$|AP| = k \cdot |BP|$$

är en cirkel med CD som diameter, där C och D är de punkter på linjen \overline{AB} som delar sträckan AB i förhållandet k resp. $-k$.

Bevis. Punkterna C och D ligger definitionsmässigt på Γ . Invertera nu med avseende på en cirkel med medelpunkt C och godtycklig radie r . För de inversa punkterna till A, B och P gäller

$$|A'P'| = \frac{|AP| \cdot r^2}{|CA| \cdot |CP|} \quad \text{och} \quad |B'P'| = \frac{|BP| \cdot r^2}{|CB| \cdot |CP|},$$

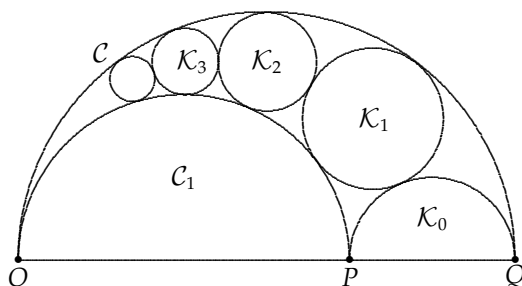
varför

$$\frac{|A'P'|}{|B'P'|} = \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{1}{k} = 1$$

precis då P ligger på Γ . Detta innebär att mittpunktsnormalen till sträckan $A'B'$ är invers bild till Γ . Under inversionen avbildas vidare linjen \overline{AB} på sig själv, varför Γ måste vara en med linjen \overline{AB} ortogonal cirkel genom C och D . Följaktligen är Γ cirkeln med CD som diameter. \square

ÖVNINGAR

- 3.51 a) Rita den figur som erhålles genom att invertera en kvadrat med avseende på den omskrivna cirkeln.
 b) Rita den figur som erhålles genom att invertera en kvadrat med ett av hörnen som inversionscentrum.
- 3.52 Bestäm centrum för en inversion som avbildar cirkelarna $x^2 + y^2 = 9$ och $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ på koncentriska cirklar.
- 3.53 Två cirklar skär varandra under rät vinkel vid A . O är en godtycklig punkt på en tredje cirkel, som tangerar de förstnämnda cirkelarna i punkterna B och C . Visa att cirkelarna genom O, A, B och O, A, C skär varandra under 45° vinkel.
 [Ledning: Invertera med O som centrum.]
- 3.54 Undersök vilket resultat som fås då Thales sats "En i en halvcirkel inskriven vinkel är rät" inverteras med avseende på cirkelns medelpunkt.
- 3.55 Två cirklar \mathcal{C}_1 och \mathcal{C}_2 skär varandra i A och B . Diameterlinjen i \mathcal{C}_1 genom B skär den andra cirkeln i punkten C , och diameterlinjen i \mathcal{C}_2 genom B skär \mathcal{C}_1 i D . Visa att medelpunkten till cirkeln genom B, C och D ligger på linjen \overline{AB} .
 [Ledning: Invertera med B som centrum.]
- 3.56 AC är en diameter i en given cirkel, B och D är två andra punkter på cirkeln, och sekanterna \overline{AB} och \overline{CD} skär varandra i en punkt O . Visa att cirkeln genom O, B, D är ortogonal mot den givna cirkeln.
- 3.57 Visa följande antika sats: Låt O, P och Q vara tre punkter i linje med $O - P - Q$, låt $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ och \mathcal{K}_0 vara halvcirklar, alla på samma sida om OQ och med OQ, OP resp. PQ som diameter. Låt $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \dots$ vara cirklar, som tangerar \mathcal{C} och \mathcal{C}_1 och med \mathcal{K}_n tangerande \mathcal{K}_{n-1} för $n = 1, 2, 3, \dots$. Låt slutligen r_n och h_n beteckna radien i \mathcal{K}_n resp. avståndet från medelpunkten i \mathcal{K}_n till OQ . Då är $h_n = 2nr_n$.
 [Ledning: Invertera med avseende på cirkeln $\mathcal{C}(O; t_n)$, där t_n är längden av tangenten från O till \mathcal{K}_n .]



Figur 3.53

3.11 Mohr–Mascheronis sats

I avsnitt 1.6 diskuterade vi *klassiska* eller – som de också kallas – *euklidiska* geometriska konstruktioner, dvs konstruktioner med passare och linjal, och skisserade beviset för att vissa konstruktionsuppgifter är omöjliga att utföra. Det kan i det sammanhanget vara av intresse att undersöka vad som kan utföras med andra hjälpmedel eller om man begränsar de euklidiska hjälpmedlen. Vi har t ex observerat att det inte spelar någon roll om man använder en "modern" låsbar passare eller en "euklidisk" passare, vars skänklar faller ihop då den lyfts från papperet.

Redan 1672 visade dansken GEORG MOHR följande överraskande resultat.

Sats 3.11.1 *Samtliga euklidiska konstruktioner i vilka de efterfrågade objekten är punkter kan utföras med enbart euklidisk passare.*

Inskränkningen till punkter beror naturligtvis på att man inte kan dra några fullständiga linjer med passare.

Mohrs upptäckt förefaller inte ha rönt någon uppmärksamhet utan glömdes bort för att återupptäckas 125 år senare av italienaren LORENZO MASCHERONI (1750–1800). Vi skall i det här avsnittet ge ett bevis för Mohr–Mascheronis sats med hjälp av inversion.

Låt oss först påminna om att i en euklidisk konstruktion är varje nykonstruerad punkt en skärningspunkt mellan antingen två cirklar, en cirkel och en linje, eller två linjer. En euklidisk konstruktion kan således brytas ned i ett ändligt antal steg av följande tre slag:

- (α) Bestäm med utgångspunkt från givna punkter M_1, A_1, M_2, A_2 skärningspunkterna X och Y till cirklarna med medelpunkt M_i och radie M_iA_i , $i = 1, 2$.
- (β) Bestäm med utgångspunkt från givna punkter M, A, B, C skärningspunkterna X och Y mellan linjen \overline{BC} och cirkeln med medelpunkt M och radie MA .
- (γ) Bestäm med utgångspunkt från givna punkter A, B, C, D skärningspunkten X mellan linjerna \overline{AB} och \overline{CD} .

I en euklidisk konstruktion utnyttjar vi passaren i (α) och (β), medan linjalen kommer till användning i (β) och (γ). För att bevisa Mohr–Mascheronis sats måste vi således visa att vi kan utföra (β) och (γ) med enbart passare. Vi skall göra så via en serie av konstruktioner, och för att underlätta beskrivningarna av dessa inför vi några kompakta beteckningar.

Cirkeln med medelpunkt M genom A betecknas $\mathcal{C}(M; A)$. För att ange att punkterna X och Y fås som skärningspunkter till cirklarna $\mathcal{C}(M; A)$ och $\mathcal{C}(N; B)$ skriver vi

$$\left| \frac{\mathcal{C}(M; A), \mathcal{C}(N; B)}{X, Y} \right|.$$

En geometrisk konstruktion med enbart passare kan nu beskrivas genom att kolumner av ovanstående typ staplas efter varandra i samma ordning som motsvarande steg (α) utförs. Allra först sätter vi dock kolumnen

$$\left| \frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{} \right|,$$

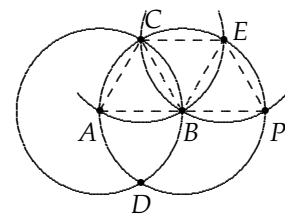
där P_1, P_2, \dots, P_n är de punkter som är givna från början. I en reglementsenlig konstruktion måste punkterna M_1, A_1, M_2, A_2 i (α) antingen vara givna eller tidigare konstruerade; detta innebär att de punkter som förekommer i en kolumns övre rad redan måste förekomma i tidigare kolumners undre rad.

Konstruktion 1 *Konstruera, givet två punkter A och B , den punkt P på strålen \overrightarrow{AB} som uppfyller $|AP| = 2|AB|$.*

Lösning: Följande konstruktion ger P (jmf figur 3.54).

$$\left| \frac{A, B}{} \left| \frac{\mathcal{C}(A; B), \mathcal{C}(B; A)}{C, D} \right| \left| \frac{\mathcal{C}(B; A), \mathcal{C}(C; B)}{A, E} \right| \left| \frac{\mathcal{C}(B; A), \mathcal{C}(E; B)}{C, P} \right| \right|.$$

Att P uppfyller de ställda kraven följer av att trianglarna $\triangle ABC$, $\triangle BCE$ och $\triangle BEP$ är liksidiga och kongruenta. \square



Figur 3.54

Konstruktion 2 *Konstruera, givet två punkter A och B , samt det naturliga talet n , den punkt P på strålen \overrightarrow{AB} som uppfyller $|AP| = 2^n|AB|$.*

Lösning: Upprepa konstruktion 1, andra gången med B bytt mot P etc, n gånger. \square

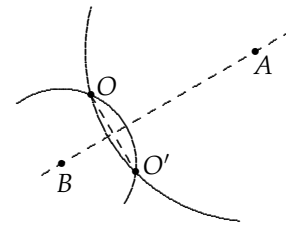
Som redan nämnts skall vi använda inversion för att visa att (β) och (γ) kan utföras med passare. Genom att invertera med avseende på någon lämplig cirkel avbildar vi cirkeln $\mathcal{C}(M; A)$ och linjen \overline{BC} i (β) resp. linjerna \overline{AB} och \overline{CD} i (γ) på två cirklar, vars skärningspunkter X' och Y' vi kan bestämma med passaren. Ytterligare en inversion ger oss sedan de ursprungliga skärningspunkterna X och Y . För att det hela skall fungera måste vi förstås visa hur man inverterar utan linjal.

Konstruktion 3 *Konstruera, givet punkterna O , A och B , spegelbilden O' av O i linjen \overline{AB} .*

Lösning:

$$\left| \frac{\overline{O, A, B}}{O, A, B} \left| \frac{\mathcal{C}(A; O), \mathcal{C}(B; O)}{O, O'} \right. \right|.$$

Sats 2.10.5 visar att \overline{AB} är mittpunktsnormal till sträckan OO' . \square



Figur 3.55

Konstruktion 4 *Konstruera, givet punkterna O , D och P , inversen P' av P med avseende på cirkeln $\mathcal{C}(O; D)$.*

Lösning: Om $|OP| > \frac{1}{2}|OD|$ så duger följande konstruktion (jmf figur 3.56).

$$\left| \frac{\overline{O, D, P}}{O, D, P} \left| \frac{\mathcal{C}(O; D), \mathcal{C}(P; O)}{E, F} \right. \left| \frac{\mathcal{C}(E; O), \mathcal{C}(F; O)}{O, P'} \right. \right|.$$

Triangeln $\triangle OPE$ och $\triangle OEP'$ blir nämligen likformiga, varför

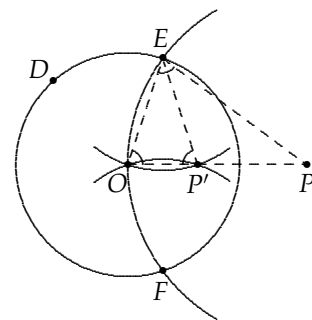
$$\frac{|OP|}{|OE|} = \frac{|OE|}{|OP'|},$$

dvs $|OP'| \cdot |OP| = |OE|^2 = |OD|^2$.

Villkoret $|OP| > \frac{1}{2}|OD|$ utnyttjades för att erhålla två skärningspunkter till cirkelarna $\mathcal{C}(O; D)$ och $\mathcal{C}(P; O)$. Om villkoret inte är uppfyllt, använder vi först konstruktion 2 för att konstruera en punkt Q på strålen \overrightarrow{OP} med $|OQ| = 2^n|OP| > \frac{1}{2}|OD|$. Därefter konstruerar vi inversen Q' till Q med hjälp av ovanstående konstruktion. Slutligen utnyttjas konstruktion 2 ytterligare en gång för att erhålla P' på strålen $\overrightarrow{OQ'}$ så att $|OP'| = 2^n|OQ'|$. Då är nämligen

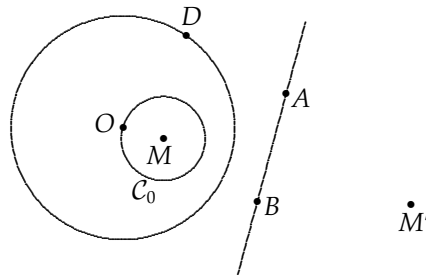
$$|OP'| \cdot |OP| = 2^n|OQ'| \cdot |OP| = |OQ'| \cdot |OQ| = |OD|^2,$$

dvs P' är invers till P . \square



Figur 3.56

Konstruktion 5 *Konstruera, givet tre punkter A , B och O som ej ligger i linje samt en punkt $D \neq O$, medelpunkten M i den cirkel $C_0 = C(M; O)$ som är invers till linjen \overline{AB} under inversion med avseende på cirkeln $C(O; D)$.*

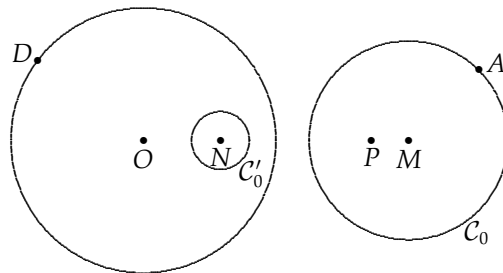


Figur 3.57

Lösning: Vi observerar först att M och oändlighetspunkten ∞ är inversa punkter med avseende på cirkeln C_0 . Deras inverser med avseende på cirkeln $C(O; D)$, dvs M' och O , är således inversa punkter med avseende på linjen \overline{AB} , dvs M' och O är varandras spegelpunkter i linjen. Vi erhåller därför den sökta punkten M på följande vis:

Konstruera först spegelbilden M' av O i linjen \overline{AB} med hjälp av konstruktion 3. Då är M invers till M' med avseende på cirkeln $C(O; D)$, och M fås med konstruktion 4. \square

Konstruktion 6 *Låt O , D , M , A vara givna punkter så att cirkeln $C_0 = C(M; A)$ ej passerar genom O . Konstruera medelpunkten N i den cirkel $C'_0 = C(N; A')$ som är invers till C_0 under inversion i cirkeln $C(O; D)$. (Här betecknar A' inversen till A med avseende på samma cirkel.)*



Figur 3.58

Lösning: N och ∞ är inversa punkter med avseende på cirkeln C'_0 , varför deras inverser N' och O med avseende på cirkeln $C(O; D)$ är inversa punkter med avseende på C_0 . Genom att utnyttja konstruktion 4 två gånger kan vi därför bestämma N på följande sätt:

Låt P vara inversen av O under inversion i cirkeln C_0 ; då är N inversen av P under inversion i cirkeln $C(O; D)$. \square

Bevis för sats 3.11.1 Vi skall verifiera att stegen (β) och (γ) i en euklidisk konstruktion kan utföras med passaren.

De eventuella skärningspunkterna X och Y till cirkeln $C = C(M; A)$ och linjen $d = \overline{BC}$ kan fås på följande sätt. Först väljes en punkt O som inte ligger på cirkeln C och linjen d . Inverserna C' och d' till C och d under inversion i cirkeln $C(O; A)$ blir då cirklar,

vars medelpunkter fås med konstruktionerna 6 och 5. Vidare ligger A' på C' och O på d' , så vi kan upprita cirklarna och därmed bestämma deras (eventuella) skärningspunkter X' och Y' . Punkterna X och Y är inverser till X' och Y' under inversion i $\mathcal{C}(O; A)$ och fås med konstruktion 4.

Den eventuella skärningspunkten X till linjerna \overline{AB} och \overline{CD} fås på ett analogt sätt. De båda linjerna inverteras med avseende på en godtycklig cirkel, vars medelpunkt O ligger utanför linjerna. De inversa bilderna är cirklar genom O och deras medelpunkter konstrueras med hjälp av konstruktion 5. Om cirklarna skär varandra i ytterligare en punkt, så är denna punkt inversen till X . Punkten X fås således genom ytterligare en inversion med hjälp av konstruktion 4. \square

Det är lätt att inse att linjalen inte räcker som hjälpmedel för att utföra de euklidiska konstruktionerna; exempelvis kan man inte konstruera en sträckas mittpunkt med enbart linjal. Men om man kompletterar linjalen med en "rostig passare", dvs en passare med fixerade skänklar, så kan man utföra alla euklidiska konstruktioner. Den rostiga passaren behöver vidare bara användas en gång och kan sedan slängas. Samtliga euklidiska konstruktioner av punkter är med andra ord utförbara med linjal givet en enda cirkel med känd medelpunkt. Detta resultat visades av Victor Poncelet och Jacob Steiner.

Alla euklidiska konstruktioner kan vidare utföras med en "dubbellinjal" eller med en "vinkel". Dubbellinjalen används för att dra parallella linjer på konstant avstånd och vinkeln för att dra linjer som skär varandra under konstant vinkel.

ÖVNINGAR

- 3.58 Konstruera, givet punkterna A och B , mittpunkten på sträckan AB med enbart passare.
- 3.59 Konstruera, givet hörnen i triangeln $\triangle ABC$, medelpunkten i den omskrivna cirkeln med enbart passare.
- 3.60 Konstruera, givet punkterna A och B , mittpunkten M på sträckan AB samt en punkt P utanför \overline{AB} , den med \overline{AB} parallella linjen genom P med enbart linjal.
- 3.61 Lös följande uppgifter med dubbellinjal:
- Konstruera, givet A och B , mittpunkten på sträckan AB .
 - Konstruera, givet A , B och P , den med \overline{AB} parallella linjen genom P .
 - Konstruera, givet A , B och P , normalen genom P till linjen \overline{AB} .

Litteraturanvisningar

Det mesta materialet i kapitel 3 och mycket mera finns i den utmärkat boken
Eves, H: *A Survey of Geometry*. Allyn and Bacon, 1972.

Den som önskar studera Hilberts axiomsystem i originaltappning kan göra så i engelsk översättning i

Hilbert, D: *The Foundations of Geometry*. Open Court Publishing Company, 1971.

Hilberts axiomsystem studeras i detalj i

Forder, H.G: *The Foundations of Euclidean Geometry*. Cambridge University Press, 1927. (Omtryckt i Dover, 1958.)

Andra läroböcker som kan rekommenderas är

Ewald, G: *Geometry: An Introduction*. Wadsworth, 1971.

Greenberg, M: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. Freeman, 1974.

Martin, G: *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. Springer-Verlag, 1975.

Ewald bygger upp geometrin med utgångspunkt från ett axiomsystem för speglingar, medan Greenberg använder sig av en modifierad version av Hilberts axiomsystem, och Martin utnyttjar ett axiomsystem som går tillbaka på G.D. Birkhoff.

Appendix

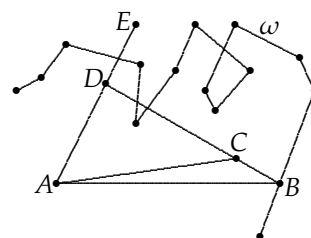
I kapitel 2.5 utelämnade vi bevisen för lemmorna 2.5.1, 2.5.4 och 2.5.6. Dessa bevisas nu här. Vi startar med det första lemmat.

Lemma 2.5.1 *Låt π vara en godtycklig polygon, och antag att punkterna P och Q ligger i samma komponent Ω till π . Då finns det ett hyggligt sträcktåg i Ω mellan P och Q .*

Bevis. Beviset bygger i sin tur på två lemmor.

Lemma 1 *Antag att sträcktåget ω och sträckan AB inte har någon gemensam punkt. På varje sida om AB finns det då en punkt C så att det inre av $\triangle ABC$ inte innehåller någon punkt från sträcktåget ω .*

Bevis. Antag att $\omega = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$, och sätt $a_i = \overline{P_{i-1}P_i}$ för $i = 1, 2, \dots, n$, och $b_j = \overline{AP_j}$ för $j = 0, 1, \dots, n$. På varje sida om AB finns det en punkt E som inte ligger på någon av linjerna a_i . Enligt korollariet till sats 2.3.2 finns det en punkt D på sträckan AE så att varken D eller någon punkt på AD ligger på någon av linjerna a_i . Av samma skäl finns det en punkt C på sträckan BD så att mängden $BC \cup \{C\}$ inte innehåller någon punkt från någon av linjerna a_i och b_j .



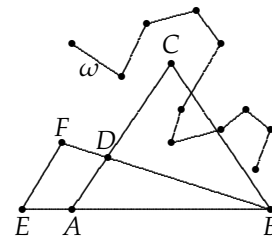
Figur 1

Vi skall visa att det inre av $\triangle ABC$ inte innehåller några punkter från sträcktåget ω , och antar därför motsatsen, dvs att det finns en inre punkt P i triangeln och ett index i så att P ligger på den slutna sträckan $[P_{i-1}P_i]$. Linjen a_i skär då enligt sats 2.4.3 antingen två sidor i triangeln $\triangle ABC$ eller en sida och motstående hörn. Vi har emellertid valt C så att a_i inte kan gå genom C eller skära sidan BC , och linjen a_i kan därför inte heller gå genom det motstående hörnet A . Vi har vidare valt D så att a_i inte kan gå genom sidan AD i $\triangle ABD$, så a_i kan inte heller gå genom det motstående hörnet B . Den enda återstående möjligheten är därför att a_i skär de båda sidorna AB och AC i $\triangle ABC$.

Eftersom den slutna sträckan $[P_{i-1}P_i]$ enligt förutsättningen inte skär sträckan AB , måste punkterna P_{i-1} och P_i ligga på samma sida om linjen \overline{AB} , och minst en av dem, säg P_i , ligger i det inre av $\triangle ABC$, ty annars skulle ingen punkt på $[P_{i-1}P_i]$ vara en inre punkt i triangeln. Detta medför emellertid att linjen $b_i = \overline{AP_i}$ skär sidan BC i en punkt, vilket strider mot valet av C . Denna motsägelse bevisar lemmat. \square

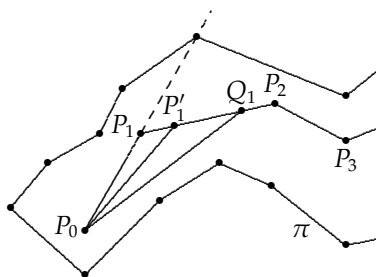
Lemma 2 Låt ω vara ett sträcktag som inte innehåller hörnet A eller någon punkt på sidorna AB och AC i $\triangle ABC$. Då finns det en punkt D på sidan AC så att ω inte skär det inre av $\triangle ABD$.

Bevis. Det finns en punkt E så att $E - A - B$ och så att sträckan EB inte innehåller någon punkt från sträcktaget ω . Lemma 1 ger en punkt F på samma sida om EB som C med egenskapen att ω inte skär det inre av $\triangle EBF$. Om C ligger i det inre eller på randen av $\triangle EBF$, så ligger det inre av $\triangle ABC$ i det inre av $\triangle EBF$, och i detta fall kan vi alltså välja $D = C$. Om C ligger i det yttre av $\triangle EBF$, så skär linjen \overline{AC} antingen sidan EF , sidan FB eller hörnet F i en punkt D , och eftersom det inre av $\triangle ABD$ ligger i det inre av $\triangle EBF$, skär inte ω det inre av $\triangle ABD$. \square



Figur 2

Bevis av lemma 2.5.1. Låt $\omega = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ vara ett sträcktag i en komponent Ω till π mellan P ($= P_0$) och Q ($= P_n$). Vi skall visa hur man kan modifiera ω så att man erhåller ett hyggligt sträcktag i Ω mellan P och Q . Lemma 2, tillämpat på triangeln $\triangle P_1 P_0 P_2$ och polygonen π , ger en punkt Q_1 på sidan $P_1 P_2$ så att det inre av $\triangle P_1 P_0 Q_1$ ligger i Ω . Antalet icke-hyggliga linjer genom P_0 är högst lika med antalet hörn i polygonen π , så vi kan därför välja en punkt P'_1 på sträckan $P_1 Q_1$ så att linjen $\overline{P_0 P'_1}$ är hygglig. Se fig. 3.



Figur 3

Sträcktaget $\langle P_0, P'_1, P_2, \dots, P_n \rangle$ är en sträcktag i Ω med hygglig linje $\overline{P_0 P'_1}$. På liknande sätt kan vi nu successivt välja punkter P'_2 på $P_2 P_3$, \dots , P'_{n-1} på $P_{n-1} P_n$ så att $\langle P_0, P'_1, P'_2, \dots, P'_{n-1}, P_n \rangle$ är ett sträcktag i Ω med hyggliga linjer $\overline{P'_{i-1} P'_i}$ för $i = 2, 3, \dots, n-1$. Välj slutligen på ett analogt sätt P''_{n-1} på $P'_{n-2} P'_{n-1}$ så att sträckan $\overline{P''_{n-1} P_n}$ ligger i Ω och så att linjen $\overline{P''_{n-1} P_n}$ är hygglig. Då är $\langle P_0, P'_1, \dots, P'_{n-2}, P''_{n-1}, P_n \rangle$ ett hyggligt sträcktag i Ω mellan P och Q . \square

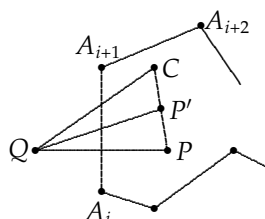
Lemma 2.5.4 Låt P och Q vara två punkter som inte tillhör randen av den enkla polygonen $\pi = A_1 A_2 \dots A_n$, och antag att sträckan PQ skär randen i exakt en punkt A . Om $A = A_i$ är ett hörn, som inte är rakt, antar vi dessutom att punkten P ligger i det inre av vinkeln $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$. Då tillhör P och Q olika komponenter av π .

Bevis. Fall 1: Linjen \overline{PQ} är hygglig.

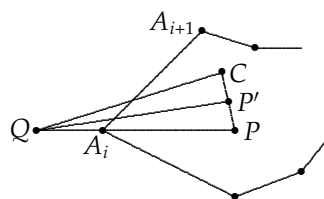
Sätt $r = \overrightarrow{PQ}$ och $s = -\overrightarrow{QP}$. Då är r och s hyggliga strålar från P resp. Q . Låt $N(r)$ resp. $N(s)$ beteckna antalet sidor i polygonen π som skärs av strålarna r resp. s . På grund av förutsättningarna är uppenbarligen $N(r) = N(s) + 1$, så det följer av lemma 2.5.3 att P och Q tillhör olika komponenter.

Fall 2: Linjen \overline{PQ} är godtycklig och sträckan PQ skär en sida av polygonen π , säg sidan A_iA_{i+1} .

Med hjälp av lemma 1, tillämpat på sträcktaget $\omega = \langle A_{i+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_i \rangle$ och sträckan PQ , får vi en punkt C så att det inre av triangeln $\triangle PQC$ inte innehåller någon punkt från sträcktaget ω , dvs från mängden $\partial\pi \setminus A_iA_{i+1}$. Vi kan utan inskränkning anta att C och P ligger på samma sida om A_iA_{i+1} (låt annars P och Q byta roll). Eftersom det bara går ändligt många icke-hyggliga linjer genom Q kan vi välja en punkt P' på sträckan PC så att linjen $\overline{P'Q}$ är hygglig. (Se fig. 4.)



Figur 4



Figur 5

Sträckan $P'Q$ skär polygonsidan A_iA_{i+1} . Den skär därför randen $\partial\pi$ i exakt en punkt, så det följer av fall 1 att P' och Q tillhör olika komponenter. Den slutna sträckan $[PP']$ skär inte randen, varför P och P' tillhör därför samma komponent. Följaktligen tillhör P och Q olika komponenter.

Fall 3: Sträckan PQ skär polygonen i ett rakt hörn A_i .

Ersätt polygonen π med den polygon $\tilde{\pi}$ som fås genom att stryka hörnet A_i samt ersätta sidorna $A_{i-1}A_i$ och A_iA_{i+1} med sidan $A_{i-1}A_{i+1}$. Polygonerna π och $\tilde{\pi}$ har samma komponenter, och PQ skär en sidan $A_{i-1}A_{i+1}$ i polygonen $\tilde{\pi}$. Vi befinner oss således i fall 2 och drar slutsatsen att P och Q tillhör olika komponenter av $\tilde{\pi}$ och därmed också av π .

Fall 4: PQ skär polygonen i ett icke-rakt hörn A_i och P ligger i det inre av vinkeln $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

Lemma 1 tillämpat på sträcktaget $\omega = \langle A_{i+1} \dots A_n A_1 A_{i-1} \rangle$ och sträckan PQ ger den här gången en punkt C så att det inre av triangeln $\triangle PQC$ inte innehåller någon punkt från ω . Vi kan vidare utan inskränkning anta att C ligger i det inre av vinkeln $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Vi kan slutligen välja en punkt P' på sidan PC så att linjen $\overline{QP'}$ är hygglig med avseende på polygonen π . Den slutna sträckan $[PP']$ skär inte randen $\partial\pi$, medan sträckan $P'Q$ skär en av sidorna A_iA_{i+1} och A_iA_{i-1} . (Jmf fig. 5.) Av fall 1 följer därför att P' och Q tillhör olika komponenter, medan P' och P tillhör samma komponent. Följaktligen tillhör P och Q olika komponenter. \square

Vi erinrar om att en följd $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ av trianglar kallas en *triangelkedja runt polygonen* $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ om

- (α) $\text{inre}(\Delta_i) \cap \partial\pi = \emptyset$ för $1 \leq i \leq n$,
- (β) $\text{inre}(\Delta_{i-1}) \cap \text{inre}(\Delta_i) \neq \emptyset$ för $2 \leq i \leq n$; och
- (γ) A_iA_{i+1} är en sida eller en del av en sida i triangeln Δ_i för $1 \leq i \leq n$.

Lemma 2.5.6 Låt $\pi = A_1A_2 \dots A_n$ vara en enkel polygon. Då finns det två triangelkedjor $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ och $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ runt π så att det inre av Δ_i och det inre av Δ'_i ligger på olika sidor om A_iA_{i+1} för varje i . De båda mängderna $M = \bigcup_{i=1}^n \text{inre}(\Delta_i)$ och $M' = \bigcup_{i=1}^n \text{inre}(\Delta'_i)$ är disjunkta och ligger i olika komponenter till π .

Bevis. Det räcker att visa lemmat för polygoner π utan raka hörn. (Om $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ är en triangelkedja runt en polygon π utan raka hörn, och om man bildar en ny polygon

$\tilde{\pi}$ genom att tillfoga ett rakt hörn A_* på sidan $A_i A_{i+1}$, så får vi en triangelkedja runt $\tilde{\pi}$ genom att ersätta triangeln $\Delta_i = \triangle BCD$, i där sidan BC antas innehålla polygonsidan $A_i A_{i+1}$, med de två trianglarna $\Delta_i^{(1)} = \triangle BED$ och $\Delta_i^{(2)} = \triangle FCD$, där $B - F - A_* - E - C$.)

Antag därför att $\pi = A_1 A_2 \dots A_n$ är en enkel polygon utan raka hörn. Vi börjar med att sätta $\Delta_1 = \triangle A_1 A_2 D$, där D är en punkt på $A_2 A_3$ med egenskapen att det inre av Δ_1 inte skär sträcktåget $\omega = \langle A_3, A_4, \dots, A_n, A_1 \rangle$, samt $\Delta'_1 = \triangle A_1 C' D'$, där C' och D' är valda så att $A_1 - A_2 - C'$, sidan $A_1 C'$ inte skär sträcktåget ω , D' och A_3 ligger på olika sidor om $A_1 A_2$, och det inre av Δ'_1 inte skär sträcktåg ω . (Punkterna D och D' existerar på grund av lemmorna 2 och 1.) Trianglarna Δ_1 och Δ'_1 uppfyller villkoren (α) och (γ) för $n = 1$, och deras inre ligger på olika sidor om polygonsidan $A_1 A_2$.

Vi skall genomföra ett induktionsbevis och antar därför att vi har konstruerat trianglarna $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ ($k < n$) så att villkoren $(\alpha) - (\gamma)$ i triangelkedjedefinitionen är uppfyllda när talet n byts mot k . Vidare antar vi att $\Delta_k = \triangle BCD$, där $B = A_k$ eller $B = A_k - A_{k+1}$, och antingen

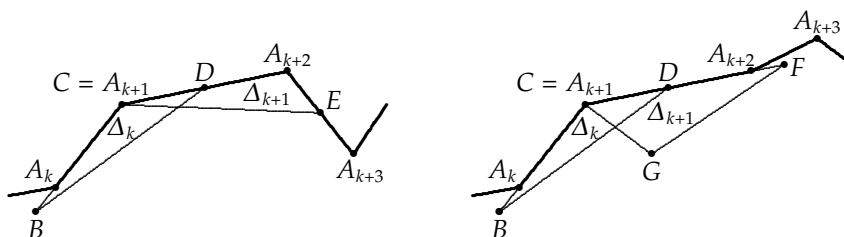
- (i) $C = A_{k+1}$ och $A_{k+1} - D - A_{k+2}$, eller
(ii) $A_k - A_{k+1} - C$.

Vi säger att triangeln Δ_k är av typ (i) om (i) gäller och av typ (ii) om (ii) gäller.

I fall (i) ligger D och A_{k+2} på samma sida om $A_k A_{k+1}$ och i fall (ii) på olika sidor.

Antag slutligen att trianglarna $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_k$ är konstruerade på motsvarande sätt. Observera att triangeln Δ_1 är av typ (i), medan Δ'_1 är av typ (ii).

Vi skall nu visa hur man konstruerar triangeln Δ_{k+1} så att $(\alpha) - (\gamma)$ gäller för följderna $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{k+1}$.



Figur 6

Konstruktion av Δ_{k+1} i det fall då Δ_k är av typ (i)

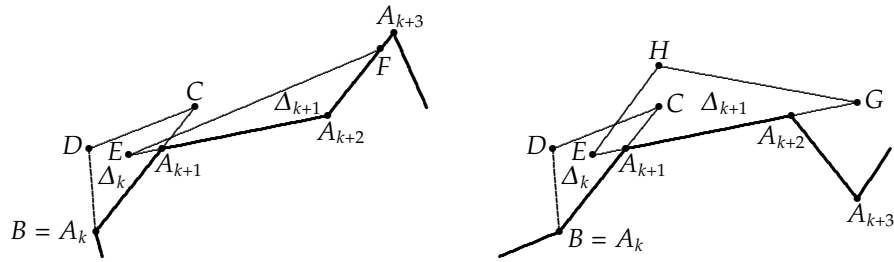
Om Δ_k är av typ (i) gör vi på följande sätt (jmf fig. 6). Antag att först att B och A_{k+3} ligger på samma sida om sidan $A_{k+1} A_{k+2}$. Då finns det på grund av lemma 2, tillämpat på $\triangle A_{k+2} A_{k+1} A_{k+3}$ och sträcktåget $\langle A_{k+3}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{k+1} \rangle$, en punkt E på sidan $A_{k+2} A_{k+3}$ så att det inre av $\triangle A_{k+1} A_{k+2} E$ inte innehåller någon punkt från $\partial\pi$. Triangeln $\Delta_{k+1} = \triangle A_{k+1} A_{k+2} E$ uppfyller $(\alpha) - (\gamma)$ och är av typ (i).

Antag nu att B och A_{k+3} ligger på olika sidor om $A_{k+1} A_{k+2}$. Då väljer vi först punkten F så att $A_{k+1} - A_{k+2} - F$ och så att sträckan $A_{k+1} F$ inte skär sträcktåget $\omega = \langle A_{k+3}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{k+1} \rangle$. Lemma 1 ger oss en punkt G på samma sida om $A_{k+1} F$ som B med egenskapen att det inre av $\triangle A_{k+1} F G$ inte skär sträcktåget ω och därmed inte heller polygonranden $\partial\pi$. Triangeln $\Delta_{k+1} = \triangle A_{k+1} F G$ uppfyller nu $(\alpha) - (\gamma)$ och är av typ (ii).

Om triangeln Δ_k är av typ (ii) (jmf fig. 7) börjar vi med att välja en punkt E i det inre av Δ_k så att $E - A_{k+1} - A_{k+2}$.

Om B och A_{k+3} ligger på olika sidor om $A_{k+1} A_{k+2}$ väljer vi sedan med hjälp av lemma 2, tillämpat på triangeln $\triangle E A_{k+2} A_{k+3}$ och sträcktåget $\omega = \langle A_{k+3}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_k \rangle$, en

punkt F på $A_{k+2}A_{k+3}$ så att ω och därmed också $\partial\pi$ inte skär det inre av $\triangle EA_{k+2}F$. Triangeln $\Delta_{k+1} = \triangle EA_{k+2}F$ uppfyller (α) – (γ) och är av typ (i).



Figur 7

Konstruktion av Δ_{k+1} i det fall då Δ_k är av typ (ii)

Om B och A_{k+3} ligger på samma sida om $A_{k+1}A_{k+2}$ väljer vi först G så att $E - A_{k+1} - A_{k+2} - G$ och så att EG inte skär sträcktåget $\omega = \langle A_{k+3}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_k \rangle$. Lemma 1 ger sedan en punkt H på samma sida om EG som C så att det inre av $\triangle EGH$ inte skär ω och därmed också inte randen $\partial\pi$. Triangeln $\Delta_{k+1} = \triangle EGH$ uppfyller (α) – (γ) och är av typ (ii).

Därmed är induktionssteget klart. Med hjälp av induktion får vi därför en triangelkedja $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ runt π . Helt analogt konstrueras en triangelkedja $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ med utgångspunkt från Δ'_1 .

Låt $P \in \text{inre}(\Delta_1) \subseteq M$ och $P' \in \text{inre}(\Delta'_1) \subseteq M'$. Eftersom det inre av Δ_1 och Δ'_1 ligger på olika sidor om polygonsidan A_1A_2 tillhör P och P' olika komponenter av π (lemma 2.5.4). Varje sträcktåg mellan P och P' måste därför skära polygonranden $\partial\pi$, och speciellt finns det inget sträcktåg i $M \cup M'$ mellan P och P' . Mängden $M \cup M'$ är därför inte sammanhängande. Av sats 2.5.3 (iii) följer därför att $M \cap M' = \emptyset$. Speciellt måste därför $\text{inre}(\Delta_i)$ och $\text{inre}(\Delta'_i)$ ligga på olika sidor om sidan A_iA_{i+1} för varje i . \square

Personregister

Apollonius, 17
Arkimedes, 13
Aristoteles, 3
Beltrami, 20
Biot, 18
Bolyai, Farkas, 19
Bolyai, Janos, 19
Cayley, 18
Chasles, 18
Demokritos, 11
Désargues, 18
Descartes, 18
Eudoxos, 6
Euklides, 4
Fermat, 18
Gauss, 19
Geminus, 19
Gergonne, 18
Grassman, 18
Heron, 18
Hilbert, 20
Hipparkos, 18
Hippokrates, 3, 12
Kant, 20
Klein, 18, 20
Lambert, 19
Legendre, 19
Lobachevsky, 19
Menelaos, 18
Mongé, 18
Möbius, 18
Pappos, 18
Pascal, 18
Pasch, 20
Peano, 20
Platon, 3
Plücker, 18
Poincaré, 20
Poncelet, 18
Proklos, 19
Ptolemaios, 18, 19
Pythagoras, 3
Riemann, 18
Saccheri, 19
von Staudt, 18
Steiner, 18
Thales, 3
Wallis, 19
Zenon, 12

Sakregister

- absolut geometri, 22
- Almagest, 18
- alternatvinkelsatsen, 97
- alternatvinklar, 54
- Apollonius sats, 138
- Arkimedes axiom, 14, 71, 73
- avstånd, 67
- avstånsformeln, 122
- axiom, 4
- bas, 48, 90
- basvinkel, 48
- ben, 35
- biangel, 90
- bisektris, 57, 58
- Cartesianska modellen, 27
- centralprojektion, 117
- Cevas sats, 110
- cevia, 110
- cirkel, 79
- "cirkel", 136
- cirkelbåge, 80
- cirkelfyrhörning, 126
- cirkelns ekvation, 122
- cirkelns kvadratur, 15
- cosinus, 104
- Dedekinds fullständighetsaxiom, 73
- defekt, 86
- delningsförhållande, 106
- Desargues sats, 113
- diagonal, 45
- diameter, 79
- dubbelförhållande, 116, 119
- dyadisk, 74
- ekvivalensklass, 33
- ekvivalensrelation, 33
- Elementa, 4, 7
- elliptiska modellen, 28
- enhetssträcka, 74, 76, 105
- enkel polygon, 38
- euklidisk biangel, 90
- euklidisk geometri, 96
- euklidiska parallellaxiomet, 92, 97
- eulerlinje, 129
- exponerad, 39
- fixpunkt, 133
- fjärde harmoniska punkten, 117
- fotpunkt, 59
- Gergonnepunkt, 115
- halvaxel, 76
- halvcirkel, 80
- halvlinje, 34
- halvplan, 34
- harmoniskt punktpar, 116
- Hérons formel, 105
- hygglig, 40
- hyperboliska parallellaxiomet, 19
- hyperbolisk biangel, 90
- hyperbolisk geometri, 96
- hypotenusa, 66
- höjd, 59
- hörn, 29, 37
- incidensaxiom, 23
- inre, 35, 39, 45, 90
- inre diagonal, 45
- inre vinklar, 54
- inskriven cirkel, 83
- intuitiva modellen, 26
- invarianssatsen, 108
- inversion, 133
- inversionscentrum, 133
- invers punkt, 133, 136
- involutiv, 133
- isomorf, 25
- kategorisk, 25
- katet, 66
- klassisk konstruktion, 15

- Kleins hyperboliska modell, 27
 koaxial, 112
 kommensurabel, 4
 komponent, 39
 koncentrisk, 83
 kongruensaxiomen, 47
 kongruent, 22, 47, 50
 konkavt hörn, 85
 konsistent, 25
 konstruktiva modellen, 27
 kontinuitetsaxiomet, 73
 konvex, 35
 konvext hörn, 85
 koordinat, 76, 105, 121
 koordinatfunktion, 76, 105, 121
 kopolär, 112
 korda, 80
 kordasatsen, 127
 kubens fördubbling, 15
 likbelägna vinklar, 54
 likbent, 48
 likformig, 89, 100
 likformighetssatsen, 104
 linje, 22, 23
 linjeknippe, 107
 linjens ekvation, 122
 längd, 60, 74, 75
 medelpunkt, 79
 median, 111
 mellan, 22, 28, 35, 72
 Menelaos sats, 110
 menelaostrippel, 110
 Metoden, 13
 mittpunkt, 56
 mittpunktsnormal, 69
 modell, 4, 24
 motsatt, 29, 34
 motsägelsefri, 25, 26
 Moultons modell, 32
 månghörning, 38
 mått, 62
 Nagelpunkt, 115
 neutral geometri, 22
 normal, 58
 ordningsaxiom, 29
 origo, 76, 105
 ortocentrum, 112
 ortogonala cirklar, 129
 oändlighetslinje, 107
 oändlighetspunkt, 107, 133
 Pappos sats, 129
 parallell, 23, 54
 parallellknippe, 107
 parallelogram, 56
 parallelogramlagen, 105
 parallellpostulatet, 8, 92
 parallellprojektion, 99
 Pascals hexagramssats, 128
 periferi, 29
 periferivinkelsatsen, 125
 periferi-medelpunktsvinkelsatsen, 126
 polygon, 37, 38
 positiv halvaxel, 76, 105
 postulat, 4
 potens, 127
 primitiva begrepp, 3
 projektion, 99, 117
 Ptolemaios sats, 138
 punkt, 22, 23 Pythagoras sats, 102
 radie, 79
 radikalaxel, 131
 radikalcentrum, 133
 rakt hörn, 85
 rand, 29, 34, 35, 38
 rät vinkel, 58
 rätvinklig, 66
 samma sida om, 33
 sammanhängande, 38
 sekant, 80
 separerande punkt, 72
 sida, 29, 34, 37
 sida-sida-sida-kriteriet, 53
 sida-vinkel-sida-kriteriet, 50
 sida-vinkel-vinkel-kriteriet, 53
 sidolinje, 29
 sidovinkel, 35
 sinus, 103
 sinussatsen, 104
 skärningspunkt, 23
 slutet sträcka, 37
 slutet polygonområde, 44
 snitt, 72
 spets, 35
 spetsig, 62
 spetsvinklig, 66
 Steiner–Lehmus sats, 109
 Stewarts sats, 109
 stråle, 34
 sträcka, 29, 37
 sträcktåg, 37
 stömlinje, 29

Śulvasūtras, 2
supplementvinkel, 29, 62
sönderdela, 44
tangent, 82
tanger, 136
tangeringspunkt, 82
Thales sats, 125
transversal, 54
triangel, 29
triangelkedja, 42
triangelolikheten, 69
trubbig, 62
trubbvinklig, 66
tyngdpunkt, 111
uttömningsmetoden, 12
vertikalvinkel, 35
vidskriven cirkel, 115
vinkel, 34, 35, 90
vinkeln tredelning, 15
vinkel-sida-vinkel-kriteriet, 51
vinkelsumma, 85
yttervinkel, 35
yttre, 35, 39, 80
yttre bisektris, 58
ändpunkt, 29