

**Grundläggande kurs i**  
**Transformteori**

**Lars-Åke Lindahl**

2013



# Innehåll

<b>Förord</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>1 Inledning</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Transformer . . . . .	1
1.2 Några exempel . . . . .	2
<b>2 Rekvisita</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1 Komplexvärda funktioner . . . . .	13
2.2 Följder och serier . . . . .	19
2.3 Absolutintegrabla funktioner . . . . .	27
2.4 Omkastning av gränsprocesser . . . . .	32
2.5 Diracmättet . . . . .	37
2.6 Summationskärnor . . . . .	41
<b>3 Fourierserier</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1 Periodiska funktioner . . . . .	45
3.2 Trigonometriska polynom . . . . .	48
3.3 Rummet $L^1(\mathbf{T})$ . . . . .	52
3.4 De trigonometriska polynomets koefficienter . . . . .	55
3.5 Fourierkoefficienterna . . . . .	56
3.6 Sinus- och cosinusserier . . . . .	59
3.7 Egenskaper hos fourierkoefficienterna . . . . .	62
3.8 Abelsummation . . . . .	65
3.9 Entydighet . . . . .	69
3.10 Parsevals formel . . . . .	71
3.11 Punktvis konvergens . . . . .	79
3.12 Gibbs fenomen . . . . .	84
3.13 Formler för godtycklig periodlängd . . . . .	87
<b>4 Tillämpningar på fourierserien</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1 Toner . . . . .	89
4.2 Svängande strängen . . . . .	91
4.3 Värmeledning i en stav . . . . .	95
4.4 Dirichlets problem för en skiva . . . . .	100

<b>5</b>	<b>Fouriertransformen</b>	<b>103</b>
5.1	Introduktion . . . . .	103
5.2	Fouriertransformen . . . . .	105
5.3	Egenskaper och räkneregler . . . . .	107
5.4	Fouriertransformering och derivering . . . . .	109
5.5	Faltning . . . . .	112
5.6	Värmeledningkärnan . . . . .	114
5.7	Inversionsformler . . . . .	116
5.8	Plancherels formel . . . . .	120
5.9	Poissons summationsformel . . . . .	127
5.10	Fourieranalys i högre dimensioner . . . . .	128
5.11	Fouriertransformen för mått . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Tillämpningar på fouriertransformen</b>	<b>133</b>
6.1	Värmeledningsekvationen på $\mathbf{R}$ . . . . .	133
6.2	Samplingssatsen . . . . .	135
6.3	Linjära tidsinvarianta system . . . . .	137
6.4	Heisenbergs osäkerhetsprincip . . . . .	142
6.5	Centrala gränsvärdessatsen . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Laplacetransformen</b>	<b>149</b>
7.1	Laplacetransformens definition . . . . .	149
7.2	Räkneregler . . . . .	154
7.3	Deriverbarhet och entydighet . . . . .	156
7.4	Derivatans transform och linjära differentialekvationer . . . . .	161
7.5	Begynnelsevärdes- och slutvärdesregeln . . . . .	164
7.6	Kausala LTI-system . . . . .	166
7.7	Laplacetransformen för mått . . . . .	170
<b>8</b>	<b>Z-transformen</b>	<b>173</b>
8.1	Definition och egenskaper . . . . .	173
8.2	Translation och differensekvationer . . . . .	180
8.3	Faltning . . . . .	182
8.4	Diskreta kausala LTI-system . . . . .	184
	<b>Formler</b> . . . . .	<b>189</b>
	<b>Svar till övningsuppgifter</b> . . . . .	<b>197</b>
	<b>Sakregister</b> . . . . .	<b>203</b>

# Förord

Syftet med den här boken är att ge grundläggande kunskaper i transformteori och att visa på några av dess många tillämpningar. De transformer som behandlas är fourierserien och fouriertransformen, laplacetransformen och z-transformen.

För att tillgodogöra sig innehållet bör man behärska räkning med komplexa tal och ha förkunskaper i analys motsvarande en traditionell högskolekurs i flerdimensionell analys. Kunskaper i linjär algebra underlättar förståelsen men är inte absolut nödvändiga. En del exempel är hämtade från andra områden av matematiken, t. ex. sannolikhetsteorin, men dem kan man hoppa över om de är obegripliga på grund av otillräckliga förkunskaper.

Boken är skriven i traditionell matematikerstil med definitioner, satsar och bevis. De flesta bevisen är korta och ganska enkla verifikationer av påståendena i satserna, men några bevis och då speciellt bevisen för konvergenssatserna är onekligen ganska invecklade och finurliga för dem som inte sett något liknande tidigare. Den som i första hand är intresserad av transformteorin för dess tillämpningars skull kan naturligtvis hoppa över detaljerna i dessa bevis men bör ändå försöka få ett hum om själva bevisidéerna. Om man förstår hur teorin hänger ihop så är det också enklare att tillämpa den på ett riktigt sätt.

Uppsala, augusti 2013  
*Lars-Åke Lindahl*



# Kapitel 1

## Inledning

### 1.1 Transformer

I den här boken ska vi studera fyra s. k. transformer – fouriertransformen för periodiska funktioner, fouriertransformen för allmänna funktioner definierade på  $\mathbf{R}$ , laplacetransformen och z-transformen.

Gemensamt för alla transformer är att de opererar på funktioner av en viss typ och resulterar i nya funktioner av en viss typ. En transform  $\mathcal{T}$  är med andra ord en avbildning  $\mathcal{T}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  från något rum av funktioner  $\mathcal{A}$  till något annat funktionsrum  $\mathcal{B}$ , men vi kallar också den genom transformeringen erhållna funktionen  $\mathcal{T}(f)$  för en transform.

Ett skäl att transformera en funktion kan vara att skaffa sig information om funktionen som inte är direkt tillgänglig men som uppenbarar sig hos transformen. Komplicerade samband som en funktion uppfyller, kan svara mot mycket enkla samband för den genom transformering erhållna funktionen – exempelvis kan en differentialekvation efter transformering bli en enkel algebraisk ekvation.

Att för en given funktion beräkna dess transform är inte speciellt komplicerat för de transformer som vi ska studera, men för att ha någon större nytta av transformen måste vi också kunna översätta egenskaper hos denna till egenskaper hos ursprungsfunktionen. Helst ska vi kunna rekonstruera en funktion utifrån kännedom om dess transform. En viktig uppgift för oss blir därför att visa att våra transformavbildningar är inverterbara och att erhålla metoder för att beräkna inverserna.

Ni kommer märka stora likheter hos de båda fouriertransformerna som vi ska studera, och det beror på att de egentligen är instanser av en och samma abstrakta fouriertransform. Laplacetransformen kan också ses som ett specialfall av fouriertransformen på  $\mathbf{R}$ .

Fourieranalysen, dvs. teorin för fouriertransformerna, handlar om att representera eller approximera funktioner som summor eller integraler av enkla trigonometriska funktioner. Det är en teori med många tillämpningar

inom såväl ren matematik som naturvetenskap och teknik. Som exempel på användningsområden kan nämnas teorin för partiella differentialekvationer, talteori, sannolikhetssteori, kryptologi, optik, kvantmekanik, signal- och bildbehandling, medicinsk diagnostik, kristallografi och akustisk fonetik.

Fourieranalysen har fått sitt namn efter den franske matematikern och fysikern Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) som använde sig av trigonometriska serier för att studera värmeledning.

## 1.2 Några exempel

Vad fourieranalys handlar om och hur fourieranalys används beskrivs kanske bäst av några exempel från olika tillämpningsområden. Vi inleder därför vårt studium av fourieranalysen med några exempel från vitt skilda områden. Eftersom det handlar om en introduktion går vi i det här kapitlet inte in på sådana subtiliteter som vilka villkor som krävs för att olika serier eller generaliserade integraler ska vara konvergenta – den diskussionen får anstå till senare kapitel.

### Musik

Fourieranalys kallas ibland också *harmonisk analys*. Den termen har förstås sitt ursprung inom musiken, så vad kan vara mer naturligt än att starta där.

En ton är ett hörbart ljud som uppstår då periodiska ljudvågor träffar örat. För hörbarhet krävs att tonhöjden, dvs. ljudvågens frekvens, ligger inom området ca 15–20 000 hertz och att tonstyrkan, dvs. ljudvågens amplitud, överstiger ett visst tröskelvärde.

De allra enklaste tonerna är rena sinussvängningningar och kan med noll som medelnivå modelleras som

$$A \sin(2\pi\nu t + \phi),$$

där  $A$  är amplituden,  $\nu$  är frekvensen,  $t$  är tidsvariabeln och  $\phi$  anger fasförskjutningen. Frekvensen har enheten Hz när tiden mäts i sekunder.

Sedan urminnes tider har musiker rent praktiskt känt till att toner som fås genom att addera toner med frekvenser som är multipler av grundtonens frekvens har samma tonhöjd. Matematiskt kan en sådan ton modelleras som en summa av typen

$$(1.1) \quad f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(2\pi\nu n t + \phi_n)$$

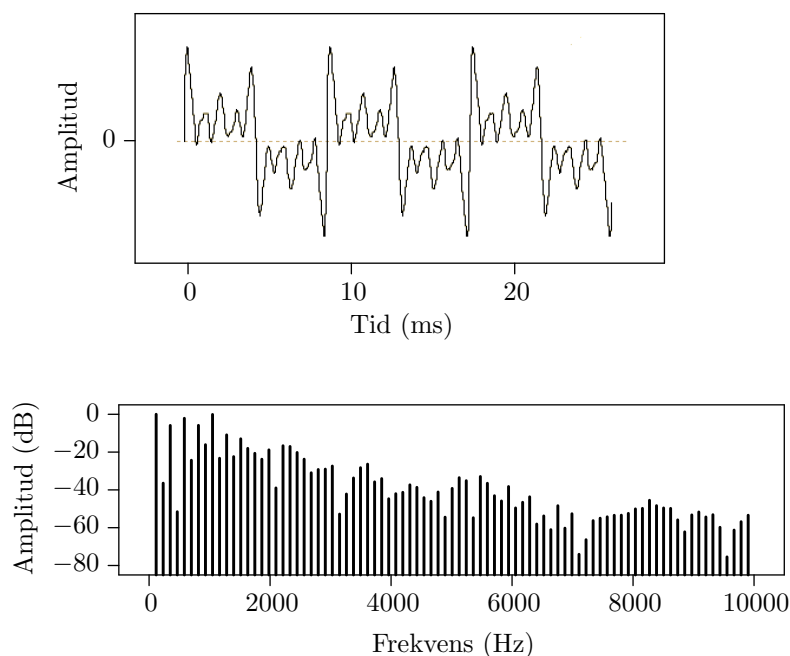
med  $N \approx 20\,000/\nu$  om vi håller oss till för människor hörbara toner, och som vi ska se i kapitel 4 alstrar sträng- och blåsinstrument toner som är summor av detta slag. Sinusoiderna  $A_n \sin(2\pi\nu n t + \phi_n)$  kallas *deltoner* till tonen  $f$ . Den första deltonen kallas *grundtonen* och övriga deltoner kallas *övertoner*. Den  $n$ :te övertonen är med andra ord den  $n + 1$ :ta deltonen.



I örats snäcka finns tusentals hörselceller, en för varje hörbar frekvens. Varje grundton och överton retar en särskild hörselcell i snäckan vilket ger upphov till impulser till hjärnan, vars styrka beror av ljudtrycket, dvs. amplituden  $A_n$ . Örat och hjärnan uppfattar därför amplituderna och frekvenserna hos deltonerna men däremot inte fasförskjutningarna  $\phi_n$ . Även om det bara är få människor med s. k. absolut gehör som har förmågan att kunna uppfatta och ange den exakta tonhöjden hos en ton, så tycks de flesta ha förmågan att uppfatta intervallen mellan olika toner.

Hur en ton låter beror således inte enbart av dess tonhöjd och tonstyrka utan också i allra högsta grad av dess *spektrum*, dvs. mixen av deltoner, som ger tonen dess specifika klangfärg. Exempelvis låter ju toner med samma tonhöjd alstrade av en flöjt, en trumpet, ett piano och en violin helt olika.

Gregory Sandells SHARC Timbre Database, som finns fritt tillgänglig på [www.timbre.ws/sharc](http://www.timbre.ws/sharc), innehåller analyser av över 1300 toner, och hela registren för i stort sett samtliga orkesterinstrument (utom slagverk) är representerade. Figur 1.1 visar vågform och spektrum för en ton med frekvensen 116.5 Hz (tonen A<sup>#</sup> i stora oktaven) spelad på en basklarinett. Spektraldiagrammet ger amplituderna  $A_n$  för motsvarande frekvenser  $116.5n$ , men observera att skalan på amplitudaxeln är logaritmisk eftersom amplituderna är angivna i decibel.



**Figur 1.1.** Vågform och spektrum för tonen A<sup>#</sup> på en basklarinett.

Genom att utnyttja det trigonometriska sambandet

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

kan vi skriva om formeln (1.1) på formen

$$f(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi\nu nt) + b_n \sin(2\pi\nu nt)).$$

Låt oss nu generalisera detta genom att dels addera en konstant så att svängningarna nu inte längre behöver ske kring medelnivån noll, dels även addera ”ohörbara toner” med frekvenser som är multipler av  $\nu$ . Om vi väljer vår tidsenhet så att grundfrekvensen  $\nu$  blir lika med  $1/2\pi$  samt döper den konstanta termen till  $a_0/2$ , så får vi en summa av typen

$$(1.2) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Förutsatt att summan är konvergent är tydligen  $f$  en periodisk funktion med perioden  $2\pi$ . Serien i högerledet kallas i förekommande fall funktionens *fourierserie*, och koefficienterna  $a_n$  och  $b_n$  kallas *fourierkoefficienter*.

Vi kan nu vända på steken genom att starta med en godtycklig  $2\pi$ -periodisk funktion  $f$  och fråga oss vilka villkor som behövs för att funktionen ska kunna fourierserietvecklas, dvs. skrivas på formen (1.2), och hur man i så fall bestämmer fourierkoefficienterna. En rent formell räkning som utnyttjar att

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nt \sin mt \, dt &= 0 \quad \text{för alla } n \text{ och } m, \\ \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt \, dt &= \begin{cases} 0 & \text{för } n \neq m, \\ \pi & \text{för } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

ger att

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \, dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right) \sin mt \, dt \\ &= \frac{1}{2}a_0 \int_0^{2\pi} \sin mt \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \cos nt \sin mt + b_n \sin nt \sin mt) \, dt \\ &= \pi b_m, \end{aligned}$$

eftersom alla integralerna innanför summan utom en är lika med noll. En motsvarande räkning ger oss  $a_m$ , och därmed leds vi fram till följande formler

för fourierkoefficienterna:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

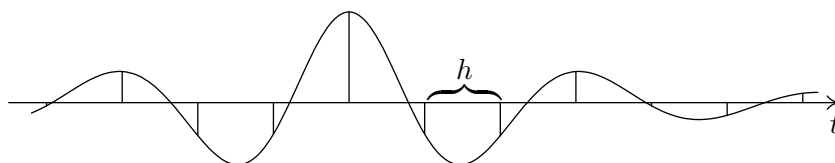
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Formlerna ovan resulterar i väldefinierade koefficienter  $a_n$  och  $b_n$  för alla integrerbara funktioner  $f$  och då speciellt för alla kontinuerliga funktioner. Men därifrån är steget långt till slutsatsen att serien i högerledet av ekvation (1.2) är konvergent och att dess summa är lika med  $f(t)$ , och det krävs ytterligare villkor på funktionen  $f$  för att slutsatsen ska vara sann. Vi kommer att studera den frågan i kapitel 3.

## Signalbehandling

En signal är något som förmedlar information från en sändare till en eller flera mottagare, men vi kommer att inskränka oss till att behandla signaler som kan modelleras matematiskt med hjälp av funktioner av en tidsvariabel,  $t$ . Om signalfunktionen är definierad på ett helt intervall, och då speciellt hela reella axeln, talar man om en signal i *kontinuerlig tid* eller en *analog* signal. Om funktionen som representerar signalen bara är definierad i en följd av diskreta punkter som vi alltid kan numrera så att funktionens definitionsmängd blir en delmängd av  $\mathbf{Z}$ , mängden av alla heltal, kallas signalen *diskret*.

En analog signal  $f$  med  $\mathbf{R}$  som definitionsmängd ger upphov till en diskret signal genom *sampling*, dvs. genom att den bara betraktas i en följd av diskreta tidpunkter, exempelvis tidpunkterna  $\dots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \dots$  för något lämpligt valt tal  $h$ . Den samplade signalen representeras således av följden  $(f(nh))_{n \in \mathbf{Z}}$ , som förstås matematiskt sett är lika med restriktionen av funktionen  $f$  till mängden  $h\mathbf{Z} = \{nh \mid n \in \mathbf{Z}\}$ .



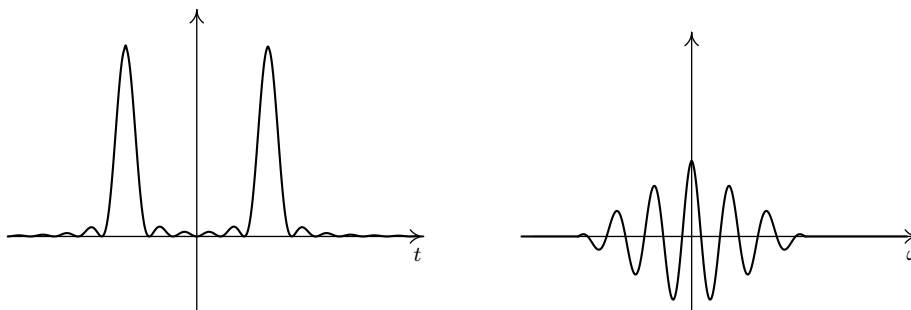
**Figur 1.2.** Vid sampling betraktas en analog signal i en följd av diskreta tidpunkter.

En analog, kontinuerlig signal  $f$  kan, förutsatt att den avtar tillräckligt snabbt då tiden går mot oändligheten (vilket naturligtvis inte är något problem i praktiken), skrivas på formen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

där den i integranden förekommande funktionen  $\hat{f}$  kallas *fouriertransformen* till funktionen  $f$ , och  $e^{i\omega t}$  är en förkortning för  $\cos \omega t + i \sin \omega t$ . Signalen  $e^{i\omega t}$  är periodisk med perioden  $2\pi/\omega$  s och frekvensen  $\omega/2\pi$  Hz, om tiden  $t$  mäts i sekunder s. Variabeln  $\omega$  ska med andra ord tolkas som en frekvensvariabel, och fouriertransformen  $\hat{f}$  säges därför vara definierad i *frekvensrummet*.

Om  $\hat{f}(\omega) = 0$  för alla  $\omega$  utanför intervallet  $[a, b]$  kallas signalen *bandbegränsad*, och intervallets längd  $b - a$  är signalens *bandbredd*.<sup>1</sup>



**Figur 1.3.** Till vänster en bandbegränsad signal  $f$  och till höger dess fouriertransform  $\hat{f}$ .

Digital teknik för inspelning, lagring och avspelning av signaler bygger på att analoga signaler med bandbredd  $2L$  är fullständigt bestämda av sina sampelvärden i punkterna  $\frac{\pi}{L} \cdot n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , och att det finns effektiva algoritmer för att rekonstruera den analoga signalen från sampelvärdena. Mer precist gäller för signaler  $f$  som är bandbegränsade till intervallet  $[-L, L]$  att

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{\pi}{L}n\right) \frac{\sin(Lt - \pi t)}{Lt - n\pi},$$

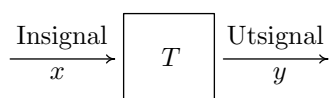
en formel som vi kommer att härleda i kapitel 6.

Det mänskliga örat kan inte uppfatta ljud med frekvenser som överstiger 20 kHz. Signalen  $e^{i\omega t}$  är därför ohörbar om  $|\omega| > 40\,000\pi$ . Allt hörbart ljud har därmed en bandbredd på högst  $80\,000\pi$  (dvs. 40 kHz). För perfekt ljudåtergivning räcker det därför på grund av ovanstående rekonstruktionsformel att sampla audiosignaler i diskreta tidpunkter som har ett tidsavstånd av  $1/40\,000$  s, dvs. med samplingsfrekvensen 40 kHz. Vanliga CD-spelare använder samplingsfrekvensen 44.1 kHz.

<sup>1</sup>Bandbredden anges vanligen i Hz och är då följaktligen lika med  $(b - a)/2\pi$  Hz.

## Svarta lådor

Många tekniska apparater fungerar ur ett användarperspektiv som *svarta lådor* – de tar emot insignaler som processas på något för användaren okänt sätt och levererar utsignaler. Ur matematisk synvinkel är en svart låda därför inte något annat än en funktion  $T$  som till varje tillåten insignal  $x$  associerar en utsignal  $y = T(x)$ . Lådan kallas *diskret* om insignalerna och utsignalerna är diskreta och således kan modelleras med hjälp av följder.



**Figur 1.4.** Svart låda

Många svarta lådor kan med god approximation anses vara *linjära*, dvs. om  $x$  och  $x'$  är två insignaler samt  $\alpha$  och  $\alpha'$  är två (inte alltför stora) tal, så resulterar den sammansatta insignalen  $\alpha x + \alpha' x'$  i utsignalen  $\alpha T(x) + \alpha' T(x')$ . Ett annat rimligt antagande är att de är *tidsinvarianta*, dvs. fungerar exakt likadant vid alla tillfällen. Svarta lådor som opererar i realtid är vidare *kausala* i den meningen att utsignalens värde vid varje tidpunkt bara kan bero av insignalens värden fram till och med denna tidpunkt.

Diskreta kausala tidsinvarianta linjära svarta lådor har en mycket enkel matematisk beskrivning, och de är fullständigt bestämda av *impulssvaret*, dvs. utsignalen till insignalen  $\delta = (1, 0, 0, 0, \dots)$  som kallas en *impuls*.

Så låt  $T$  vara en diskret kausal tidsinvariant linjär svart låda. Vi ska beräkna utsignalen  $y = T(x)$  för en godtycklig insignal  $x = (x_n)_0^\infty$ . Eftersom lådan är kausal beror utsignalens värde  $y_n$  vid tidpunkten  $n$  bara av insignalens utseende fram till och med tidpunkten  $n$ . Detta innebär att utsignalen  $y' = T(x')$  till insignalen

$$x' = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$$

har samma värde vid tidpunkten  $n$  som utsignalen  $y$ , dvs.  $y_n = y'_n$ .

Låt nu  $a = (a_n)_0^\infty$  beteckna impulssvaret  $T(\delta)$  så att

$$T(1, 0, 0, 0, 0, \dots) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Om lådan får sin impuls ett antal tidsenheter senare kommer impulssvaret att förskjutas lika många tidsenheter på grund av tidsinvariansen. Följaktligen är

$$\begin{aligned} T(0, 1, 0, 0, 0, \dots) &= (0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots), \\ T(0, 0, 1, 0, 0, \dots) &= (0, 0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots), \\ T(0, 0, 0, 1, 0, \dots) &= (0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, \dots), \quad \text{osv.} \end{aligned}$$

Eftersom

$$x' = x_0(1, 0, 0, 0, \dots) + x_1(0, 1, 0, 0, \dots) + \dots + x_n(0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

följer det av lineariteten att

$$y' = T(x') = x_0T(1, 0, 0, 0, \dots) + x_1T(0, 1, 0, 0, \dots) + x_2T(0, 0, 1, 0, \dots) + \dots + x_nT(0, 0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots),$$

och genom att betrakta koordinaten med index  $n$  ser vi att

$$y_n = y'_n = x_0a_n + x_1a_{n-1} + \dots + x_{n-1}a_1 + x_na_0 = \sum_{k=0}^n a_{n-k}x_k.$$

Detta visar att utsignalen  $y = T(x)$  vid alla tidpunkter  $n$  är helt bestämd av insignalen  $x$  och impulssvaret  $a = T(\delta)$ .

Sättet att kombinera två följder  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $x = (x_n)_0^\infty$  till en ny följd  $y = (y_n)_0^\infty$  genom att sätta

$$y_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}x_k$$

för alla  $n$  kallas en *faltning*, och man använder beteckningssättet  $a * x$  för den erhållna följden  $y$ .

Faltningar av ovanstående typ uppkommer också när man multiplicerar två potensserier eftersom

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \end{aligned}$$

med  $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k$ . Med hjälp av faltningsbegreppet kan vi således uttrycka sambandet mellan koefficientföljderna  $a = (a_n)_0^\infty$ ,  $b = (b_n)_0^\infty$  och  $c = (c_n)_0^\infty$  i de tre potensserierna som  $c = a * b$ .

I kapitel 8 kommer vi att studera den s. k. *z-transformen*. Det är en transform som är definierad för följder, och med z-transformen till följden  $a = (a_n)_0^\infty$  menas den oändliga serien

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

som om följden inte är alltför snabbt växande är konvergent för alla komplexa tal  $z$  utanför en tillräckligt stor cirkel i komplexa talplanet.

Genom att byta  $x$  mot  $1/z$  i de tre potensserierna ovan ser vi att faltningen  $c = a * b$  genom  $z$ -transformering övergår i en produkt av typen  $C(z) = A(z)B(z)$ .

Låt oss nu återvända till de diskreta kausala tidsinvarianta linjära svarsta lådorna.  $Z$ -transformen  $A(z)$  till impulssvaret  $a = T(\delta)$  kallas lådans *överföringsfunktion*, och i termer av den blir sambandet mellan in- och utsignalernas  $z$ -transformer mycket enkelt:

*Mellan in- och utsignal i en diskret kausal tidsinvariant linjär svart låda råder sambandet*

$$Y(z) = A(z)X(z),$$

där  $X(z)$  och  $Y(z)$  är  $z$ -transformerna till in- resp. utsignalerna och  $A(z)$  är överföringsfunktionen.

## Diffusion

Många matematiska modeller inom naturvetenskapen är konsekvenser av enkla bevarandepprinciper. Exempel på sådana klassiska fysikaliska konserveringslagar är att rörelsemängden i ett slutet system är konstant, att massan bevaras och att energin bevaras (i klassisk icke-relativistisk fysik). Vi ska använda principen att massa inte uppstår ur tomta intet för att härleda en ekvation för koncentrationen i en diffunderande lösning samt skissera hur man i det endimensionella fallet kan lösa den erhålla partiella differentialekvationen med hjälp av fouriermetoder.

Låt  $c(x, t)$  beteckna koncentrationen i punkten  $x = (x_1, x_2, x_3)$  och vid tiden  $t$  av ett kemiskt ämne som lösts i en vätska, och låt  $B$  beteckna ett fixt sfäriskt område i lösningen. Vi ska studera hur mängden kemiskt ämne inom sfären  $B$  förändras genom diffusionen under ett tidsintervall  $[\alpha, \beta]$ . Vid tidpunkten  $t_0$  är mängden substans i sfären lika med

$$\iiint_B c(x, t_0) dx,$$

där vi skrivit  $dx$  för  $dx_1 dx_2 dx_3$ , så massförändringen i  $B$  under det aktuella tidsintervallet ges av differensen

$$D = \iiint_B (c(x, \beta) - c(x, \alpha)) dx = \iiint_B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dt dx.$$

Massförändringen beror på att molekyler av ämnet diffunderat ut och in genom sfärens begränsningsyta  $\partial B$ , och diffusion fungerar på så sätt att molekyler vandrar från områden med högre koncentration till områden med lägre koncentration med en nettohastighet  $J$  som är proportionell mot koncentrationsgradienten.

Med matematiskt språk gäller alltså följande samband för nettohastigheten  $J(x, t)$  i punkten  $x$  vid tiden  $t$ :

$$J(x, t) = -\kappa \nabla c(x, t),$$

en ekvation som brukar kallas *Ficks första lag* och där den positiva proportionalitetskonstanten  $\kappa$  kallas diffusionskonstanten.<sup>2</sup> Vi kan därför uttrycka massinströmningshastigheten genom begränsningsytan  $\partial B$  vid tidpunkten  $t$  som en ytintegral, nämligen som integralen

$$- \iint_{\partial B} -\kappa \nabla c(x, t) \mathbf{n} dS,$$

där minustecknet framför integralen förklaras av att enhetsnormalvektorn  $\mathbf{n}$  till sfären valts utåtriktad. Genom att utnyttja Gauss divergenssats och det faktum att

$$\operatorname{div}(\nabla c) = \Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2}$$

kan vi nu skriva inströmningshastigheten genom  $\partial B$  som följande trippelintegral över  $B$ :

$$\iiint_B \kappa \Delta c(x, t) dx.$$

Mängden kemiskt ämne som strömmar in genom begränsningsytan  $\partial B$  under tidsintervallet  $[\alpha, \beta]$  är således lika med

$$\int_{\alpha}^{\beta} \iiint_B \kappa \Delta c(x, t) dx dt,$$

och eftersom ämnet inte förstörs eller nybildas i  $B$ , svarar inflödet exakt mot den mängdförändring  $D$  som vi beräknade ovan. Genom att jämföra de båda uttrycken och byta integrationsordning leds vi alltså till likheten

$$\iiint_B \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dt dx = \iiint_B \int_{\alpha}^{\beta} \kappa \Delta c(x, t) dt dx.$$

Låt nu slutligen sfären  $B$  krympa ihop till en punkt  $x$  och intervallet  $[\alpha, \beta]$  till en punkt  $t$ . Denna gränsövergång leder till slutsatsen att koncentrationen  $c(x, t)$  satisfierar den partiella differentialekvationen

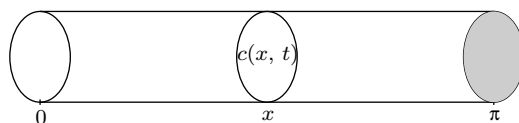
$$\frac{\partial c}{\partial t} = \kappa \Delta c,$$

som kallas *Ficks andra lag*, i det inre av det område  $\Omega$  som innehåller lösningen med det kemiska ämnet.

För att kunna bestämma koncentrationsfunktionen  $c(x, t)$  räcker det inte att veta att den satisfierar ovanstående partiella differentialekvation, utan vi behöver för att erhålla en entydig lösning specificera både randvärden, dvs. värden som lösningen ska ha för alla tidpunkter  $t$  då  $x$  ligger på randen

<sup>2</sup>Diffusionskonstantens värde i enheten  $10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$  är som följer för några viktiga biokemiska ämnen utspädda i vattenlösning. Glukos: 660, Insulin: 210, Hemoglobin: 6.9.





**Figur 1.5.** Diffusion i ett rör. Lösningens koncentration ges av  $c(x, t)$ .

av det givna området  $\Omega$ , och begynnelsevärden, dvs. värden som lösningen ska ha för alla  $x$  vid en viss tidpunkt  $t_0$ , t. ex.  $t_0 = 0$ .

Vi får nöja oss med detta allmänna konstaterande, för nu ska vi förenkla det hela genom att anta att den rumsliga variationen är begränsad till en dimension och därmed kan beskrivas av en endimensionell rumsvariabel. Situationen illustreras av figur 1.5, där det lösta ämnet finns i ett långt rör med konstant tvärsnittsarea och där all diffusion sker i längdriktningen.

Låt oss välja vår längdenhet så att rörets längd är  $\pi$ . Det gör att koncentrationen  $c(x, t)$  satisfierar den partiella differentialekvationen

$$(PD) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Som randvillkor väljer vi

$$(RV) \quad c(0, t) = c(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

vilket betyder att koncentrationen hålls konstant lika med noll vid rörets ändpunkter, och som begynnelsevillkor

$$(BV) \quad c(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \pi$$

där  $f(x)$  är en känd funktion som ger oss koncentrationen i hela röret vid tidpunkten  $t = 0$ .

Om vi för ett ögonblick glömmar bort begynnelsevillkoret, så ser vi att det finns en mängd av lösningsfunktioner  $c_n(x, t)$  till den partiella differentialekvationen (PD) som också uppfyller randvillkoret (RV), nämligen funktionerna

$$c_n(x, t) = e^{-\kappa n^2 t} \sin nx,$$

där  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Eftersom differentialekvationen är linjär och randvillkoren också är linjära, är vidare varje linjärkombination av ovanstående funktioner en lösning. Förutsatt att koefficienterna  $b_n$  väljs så att serien

$$c(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa n^2 t} \sin nx$$

konvergerar och får deriveras under summatecknet, blir därför också funktionen  $c(x, t)$  en lösning till den partiella differentialekvationen, och uppenbarligen är  $c(0, t) = c(\pi, t) = 0$  för alla  $t$ .

Hur är det då med begynnelsevillkoret? Jo, eftersom

$$c(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

är begynnelsevillkoret uppfyllt ifall vi kan välja koefficienterna  $b_n$  så att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

för  $0 < x < \pi$ . Därmed har vi reducerat problemet till att utveckla funktionen  $f$  i en fourierserie som bara innehåller sinustermer, och det går förutsatt att funktionen är någorlunda reguljär. Tricket är att först utvidga funktionen  $f$  till en udda,  $2\pi$ -periodisk funktion, vilket kommer att medföra att fourierserien saknar cosinustermer. Detaljerna kommer att ges i kapitel 4.

# Kapitel 2

## Rekvisita

Det här kapitlet innehåller, som väl framgår av namnet, ett antal resultat som kommer att behövas i fortsättningen. Det är dock inte nödvändigt att läsa hela kapitlet direkt, utan avsnitten 2.4–2.6 kan man återvända till allteftersom de behövs.

Eftersom vi kommer att arbeta med komplexvärda funktioner, börjar vi med att utvidga en del välbekanta begrepp och resultat för reellvärda funktioner, följder och serier till komplexvärda sådana.

Fouriertransformen är definierad som en integral och därför behöver vi veta vilka funktioner som kan integreras. I avsnitt 2.3 introducerar vi därför klassen av absolutintegrabla funktioner.

Många bevis bygger på att man kan flytta in en gränsövergång under integraltecknet, och eftersom detta inte alltid är tillåtet behöver vi veta när så är fallet. Ett mycket användbart tillräckligt villkor, en variant av Lebesgues sats om dominerad konvergens, ges utan bevis i avsnitt 2.4.

Avsnitt 2.5 handlar om Diracmåttet som bl. a. behövs för att modellera impulsbegreppet. Summationskärnor spelar en viktig roll i konvergensbevisen för fourierserier och fouriertransformer och behandlas i avsnitt 2.6.

### 2.1 Komplexvärda funktioner

Allmänt kan en funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ , dvs. en funktion som antar komplexa värden och är definierad på någon delmängd  $I$  av  $\mathbf{R}$ , skrivas på formen

$$f = u + iv,$$

där  $u$  och  $v$  är två reella envariabelsfunktioner. Vi sätter helt enkelt  $u(t)$  lika med realdelen och  $v(t)$  lika med imaginärdelen av  $f(t)$ .

En huvudroll i den här boken kommer att spelas av den komplexa *exponentialfunktionen*, som för imaginära argument definieras av likheten

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Genom att utnyttja välkända egenskaper hos sinus och cosinus får vi likheterna

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t = \overline{e^{it}}, \quad |e^{it}| = 1, \quad e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it} \quad \text{och} \quad e^{2n\pi i} = 1.$$

Vi kan rekonstruera sinus och cosinus från exponentialfunktionen på följande vis:

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

### Kontinuitet

**Definition.** En funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *kontinuerlig* i punkten  $t_0 \in I$  om

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - f(t_0)| = 0.$$

En funktion kallas *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd. Mängden av alla kontinuerliga komplexvärda funktioner definierade på  $I$  betecknas  $\mathcal{C}(I)$ .

Observera att kontinuitetsdefinitionen återför problemet att avgöra om en komplexvärd funktion är kontinuerlig på problemet att beräkna gränsvärdet av en reell funktion, samt att definitionen ser exakt likadan ut som för reellvärda funktioner – det är bara tolkningen av beloppet som skiljer det komplexvärda fallet från det reellvärda. Ett alternativt sätt att avgöra om en komplexvärd funktion är kontinuerlig är att betrakta de reellvärda real- och imaginärdelarna. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 2.1.1.** *En komplexvärd funktion  $f = u + iv$  är kontinuerlig i punkten  $t_0$  om och endast om de båda reella funktionerna  $u$  och  $v$  är kontinuerliga i samma punkt.*

*Bevis.* De elementära olikheterna

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \quad \text{och} \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

tillämpade på det komplexa talet  $z = f(t) - f(t_0)$  ger att

$$\begin{aligned} |u(t) - u(t_0)| &\leq |f(t) - f(t_0)|, & |v(t) - v(t_0)| &\leq |f(t) - f(t_0)| \quad \text{och} \\ |f(t) - f(t_0)| &\leq |u(t) - u(t_0)| + |v(t) - v(t_0)|, \end{aligned}$$

och det följer omedelbart av dessa olikheter att påståendena

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - f(t_0)| = 0$$

och

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |u(t) - u(t_0)| = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |v(t) - v(t_0)| = 0$$

är ekvivalenta. □

EXEMPEL 2.1.1. Den komplexvärda exponentialfunktionen  $e^{it}$  är kontinuerlig eftersom real- och imaginärdelarna  $\cos t$  och  $\sin t$  är kontinuerliga funktioner.  $\square$

### Likformig kontinuitet

Kontinuitetsdefinitionen återför begreppet kontinuitet på begreppet gränsvärde. I direkta termer innebär definitionen att en funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  är kontinuerlig om (och endast om) det för varje  $t \in I$  och varje positivt tal  $\epsilon$  finns ett positivt tal  $\delta$  så att  $|f(s) - f(t)| < \epsilon$  för all punkter  $s \in I$  som uppfyller olikheten  $|s - t| < \delta$ .

I allmänhet kommer talet  $\delta$  att bero av såväl  $\epsilon$  som punkten  $t$ ; exempelvis ser vi genom att titta på grafen till den reella funktionen  $f(t) = t^2$  med hela reella axeln som definitionsmängd att det intervall kring  $t$  för vilket olikheten  $|s^2 - t^2| < 1$  är uppfylld, blir kortare och kortare ju större talet  $t$  är. Det finns därför i detta fall inget  $\delta > 0$  sådant att implikationen

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < 1$$

gäller för samtliga tal  $t$ .

Om funktionen  $f$  är sådan att det finns ett tal  $\delta$  som duger för samtliga  $t$  i funktionens definitionsmängd, kallas funktionen likformigt kontinuerlig. Den formella definitionen lyder så här.

**Definition.** En funktion  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *likformigt kontinuerlig* om det för varje  $\epsilon > 0$  finns ett tal  $\delta > 0$  så att olikheten  $|f(s) - f(t)| < \epsilon$  gäller för alla  $s, t \in I$  som uppfyller olikheten  $|s - t| < \delta$ .

Kontinuitet i en punkt  $t_0$  är en lokal egenskap – huruvida en funktion är kontinuerlig eller ej i punkten beror enbart på funktionens utseende nära punkten ifråga. Likformig kontinuitet är däremot en global egenskap – funktionens beteende i hela definitionsmängden spelar roll. Om definitionsmängden är ett kompakt (dvs. slutet och begränsat) intervall, så kan vi emellertid härleda den globala egenskapen likformig kontinuitet från den lokala egenskapen kontinuitet. Vi har nämligen följande viktiga sats, vars bevis vi utelämnar.

**Sats 2.1.2.** *Om funktionen  $f: I \rightarrow \mathbf{C}$  är kontinuerlig och  $I$  är ett kompakt intervall, så är funktionen likformigt kontinuerlig.*

Funktionen  $f(t) = t^2$ , som inte är likformigt kontinuerlig när definitionsmängden är hela  $\mathbf{R}$ , blir således likformigt kontinuerlig om vi inskränker definitionsmängden till, säg, intervallet  $[0, 100]$ .

### Translation

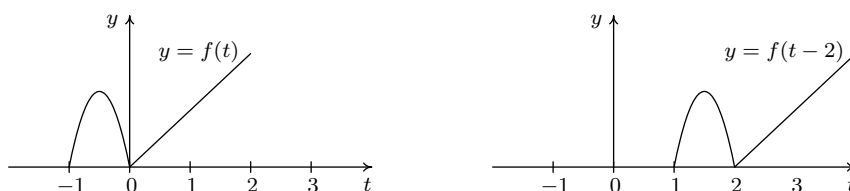
Om  $f: D \rightarrow \mathbf{C}$  är en godtycklig funktion och  $\tau$  är ett reellt tal, så får vi en ny funktion  $f_\tau: D_\tau \rightarrow \mathbf{C}$  med mängden

$$D_\tau = \{t \in \mathbf{R} \mid t - \tau \in D\}$$

som definitionsmängd genom att sätta

$$f_\tau(t) = f(t - \tau) \quad \text{för alla } t \in D_\tau.$$

Funktionen  $f_\tau$  kallas ett *translat* till  $f$ , och vi får dess graf genom att skjuta  $f$ :s graf  $\tau$  steg åt höger. Operationen som överför en funktion  $f$  till dess translat  $f_\tau$  kallas en *translation*.



**Figur 2.1.** Exempel på translation,  $f$  och  $f_2$ .

Om  $f_\tau = f$  för något nollskilt tal  $\tau$  kallas funktionen  $f$  *periodisk* med *period*  $\tau$ . Detta kräver förstås speciellt att definitionsmängden  $D$  till funktionen  $f$  är periodisk med samma period  $\tau$ , dvs. att  $D_\tau = D$ .

### Derivata och integral

Man kan definiera begreppen derivata och integral för komplexvärda funktioner på ett direkt sätt genom att kopiera definitionen i det reella fallet och omtolka betydelsen av beloppet, men det är enklare att gå omvägen via real- och imaginärdelar på ett med sats 2.1.1 analogt sätt.

**Definition.** En komplexvärd funktion  $f = u + iv$  kallas

- *deriverbar* i punkten  $t$  med *derivata*  $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$ , om  $u$  och  $v$  båda är deriverbara i punkten  $t$ ,
- *integrerbar* över ett intervall  $[a, b]$  med *integral*

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

om de båda integralerna i högerledet existerar.

Om  $I = [a, b]$ , så skriver vi i fortsättningen ofta  $\int_I f(t) dt$  istället för  $\int_a^b f(t) dt$ . På motsvarande sätt betecknar  $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt$  den generaliserade integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ .

Läsaren bör som enkel övning verifiera att följande linearitetsregler gäller för komplexvärda funktioner  $f_1, f_2, f$  och komplexa tal  $c$ :

$$\int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) dt = \int_a^b f_1(t) dt + \int_a^b f_2(t) dt,$$

$$\int_a^b cf(t) dt = c \int_a^b f(t) dt.$$

Man verifierar vidare lätt att om  $f$  är en kontinuerlig komplexvärd funktion med primitiv funktion  $F$  (dvs.  $F'(t) = f(t)$  för alla  $t$  i intervallet  $[a, b]$ ), så är

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

EXEMPEL 2.1.2. Derivatans till den komplexa exponentialfunktionen

$$e^{i\alpha t} = \cos \alpha t + i \sin \alpha t,$$

där  $\alpha$  är ett reellt tal, fås med hjälp av definitionen till

$$\frac{d}{dt}(e^{i\alpha t}) = -\alpha \sin \alpha t + i\alpha \cos \alpha t = i\alpha(\cos \alpha t + i \sin \alpha t) = i\alpha e^{i\alpha t}.$$

Den komplexa exponentialfunktionen uppför sig således precis som den reella med avseende på derivering.  $\square$

EXEMPEL 2.1.3. För  $\alpha \neq 0$  är  $(i\alpha)^{-1}e^{i\alpha t}$  en primitiv funktion till exponentialfunktionen  $e^{i\alpha t}$ . Det följer att

$$\int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}}{i\alpha}$$

om  $\alpha \neq 0$ .

Genom att speciellt låta  $\alpha = n$  vara ett heltal och välja  $b = a + 2\pi$ , samt utnyttja att  $e^{in(a+2\pi)} = e^{ina} \cdot e^{i2\pi n} = e^{ina}$ , erhåller vi följande mycket viktiga formler:

$$\int_a^{a+2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{om } n = 0 \\ 0, & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$$

Integralen av  $e^{int}$  över ett godtyckligt intervall av längd  $2\pi$  är med andra ord lika med noll för alla nollskilda heltal  $n$ .  $\square$

## Integrationsteknik

Vi kommer att behöva beräkna många integraler i den här boken, så det kan vara en god idé för läsaren att repetera hur man beräknar integraler med hjälp av primitiva funktioner, substitutioner och partiell integration. Speciellt den sista tekniken kommer till flitig användning, så här följer formeln.

**Sats 2.1.3.** *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  med primitiv funktion  $F$  och att funktionen  $g$  är kontinuerligt deriverbar på samma intervall. Då är*

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \left[ F(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t) dt.$$

EXEMPEL 2.1.4. Vi beräknar integralen  $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{it} dt$  genom upprepad partiell integration på följande vis:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{it} dt &= \left[ t^2 \frac{e^{it}}{i} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{e^{it}}{i} dt \\ &= -i(\pi^2 e^{i\pi} - \pi^2 e^{-i\pi}) + 2i \int_{-\pi}^{\pi} t e^{it} dt \\ &= 0 + 2i \left( \left[ t \frac{e^{it}}{i} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}}{i} dt \right) \\ &= 2(\pi e^{i\pi} + \pi e^{-i\pi}) + 2i \left[ e^{it} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi(e^{i\pi} + e^{-i\pi}) + 2i(e^{i\pi} - e^{-i\pi}) = -4\pi. \quad \square \end{aligned}$$

## Triangelolikheten för integraler

Följande olikhet för integraler generaliserar triangelolikheten för komplexa tal och kommer att utnyttjas många gånger i fortsättningen.

**Sats 2.1.4** (Triangelolikheten för integraler). *För alla integrerbara funktioner  $f$  på intervallet  $I$  är*

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

*Bevis.* Skriv det komplexa talet  $\int_I f(t) dt$  på polär form som  $Re^{i\theta}$ , där  $R = \left| \int_I f(t) dt \right|$  är absolutbeloppet av talet och  $\theta$  är argumentet. Då är

$$R = e^{-i\theta} \int_I f(t) dt = \int_I e^{-i\theta} f(t) dt.$$

Talet  $R = \int_I e^{-i\theta} f(t) dt$  är reellt och är därför lika med sin realdel. Det följer



att

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(t) dt \right| &= R = \operatorname{Re} \int_I e^{-i\theta} f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) dt \\ &\leq \int_I |e^{-i\theta} f(t)| dt = \int_I |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Den tredje likheten i kedjan gäller på grund av sättet att definiera integralen av komplexvärda funktioner, medan olikheten beror på att  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(t)) \leq |e^{-i\theta} f(t)|$ .  $\square$

### Cauchy–Schwarz olikhet

En annan viktig olikhet för integraler som vi kommer att behöva några gånger, ges i nästa sats.

**Sats 2.1.5** (Cauchy–Schwarz olikhet). *Antag att  $f$  och  $g$  är två integrerbara funktioner på intervallet  $I$ . Då är*

$$\left| \int_I f(t)g(t) dt \right| \leq \left( \int_I |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_I |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

*Bevis.* Eftersom

$$\left| \int_I f(t)g(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)||g(t)| dt$$

räcker det att visa att olikheten

$$(2.1) \quad \int_I f(t)g(t) dt \leq \left( \int_I f(t)^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_I g(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

gäller för alla reellvärda, icke-negativa funktioner  $f$  och  $g$ . Vi kan vidare anta att  $\int_I g(t)^2 dt > 0$ , ty om integralen är lika med noll är också vänsterledet i olikheten (2.1) lika med noll.

För alla reella tal  $\lambda$  är uppenbarligen

$$0 \leq \int_I (f(t) - \lambda g(t))^2 dt = \int_I f(t)^2 dt - 2\lambda \int_I f(t)g(t) dt + \lambda^2 \int_I g(t)^2 dt,$$

och genom att välja det tal  $\lambda$  som minimerar högerledet i denna olikhet, nämligen

$$\lambda = \frac{\int_I f(t)g(t) dt}{\int_I g(t)^2 dt},$$

erhåller vi efter förenkling den sökta olikheten (2.1).  $\square$

## 2.2 Följder och serier

I det här avsnittet ska vi utvidga några, förhoppningsvis välbekanta, definitioner och resultat för reella talföljder och serier till komplexa följder och serier med komplexa termer.

## Talföljder

**Definition.** En följd  $(c_n)_1^\infty$  av komplexa tal kallas *konvergent* om det finns ett komplext tal  $c$  så att  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$ . Talet  $c$  kallas i så fall för följdens *gränsvärde* och betecknas  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

Gränsvärdesdefinitionen för komplexa följder är därmed reducerad till definitionen av gränsvärdet av en (icke-negativ) reell följd, och genom att utnyttja de olikheter som råder mellan ett komplext tals real- resp. imaginärdel och belopp erhåller vi, precis som för kontinuitet, omedelbart följande resultat:

**Sats 2.2.1.** Om  $c_n = a_n + ib_n$ , så konvergerar den komplexa följd  $(c_n)_1^\infty$  mot  $c = a + ib$  om och endast om de båda reella följderna  $(a_n)_1^\infty$  och  $(b_n)_1^\infty$  konvergerar mot  $a$  och  $b$ , respektive.

Därigenom har vi fullständigt reducerat problemet att bestämma gränsvärdet av en komplex följd till motsvarande problem för reella följder, men ofta är det enklast att arbeta direkt med den komplexa följd.

EXEMPEL 2.2.1. Låt  $z$  vara ett komplext tal. Om  $|z| < 1$ , så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0,$$

medan gränsvärdet inte existerar om  $|z| \geq 1$  och  $z \neq 1$ .

För  $|z| < 1$  är nämligen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z^n - 0| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0,$$

eftersom det för icke-negativa reella tal  $r$  som är mindre än 1 gäller att  $r^n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ .

Anta fortsättningsvis att  $|z| \geq 1$  och  $z \neq 1$ . För att visa att gränsvärdet inte existerar i detta fall, kan vi utnyttja att om en följd  $(c_n)_1^\infty$  är konvergent med gränsvärde  $c$  så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n+1} - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c - c = 0.$$

Men för  $c_n = z^n$  är  $c_{n+1} - c_n = z^{n+1} - z^n = z^n(z - 1)$ , och följaktligen

$$|c_{n+1} - c_n| = |z|^n |z - 1| \geq |z - 1| > 0 \quad \text{för alla } n.$$

Detta betyder att  $c_{n+1} - c_n$  inte kan gå mot noll, och bevisar att följd  $(z^n)_1^\infty$  är divergent.  $\square$

En svårighet om vi försöker använda gränsvärdesdefinitionen för att avgöra om en given följd är konvergent, är att vi behöver känna till det eventuella gränsvärdet, eftersom definitionen refererar till gränsvärdet. Följande

sats visar att vi kan avgöra en följdens konvergens genom att enbart hänvisa till följdens termer. Vi hoppar över beviset för satsen eftersom vi inte kommer att utnyttja den, men det hör till den matematiska allmänbildningen att känna till den.

**Sats 2.2.2** (Cauchys konvergensprincip). *En komplex talföljd  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent om och endast om följande villkor är uppfyllt:*

*För varje  $\epsilon > 0$  finns det ett tal  $N$  så att olikheten  $|c_m - c_n| < \epsilon$  gäller för alla  $n \geq m \geq N$ .*

Att villkoret är nödvändigt är enkelt att inse. Antag nämligen att följderna har ett gränsvärde  $c$ . Då är per definition  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$ , dvs. givet  $\epsilon > 0$  finns det ett tal  $N$  så att  $|c_n - c| < \epsilon/2$  gäller för alla  $n \geq N$ . Om både  $m \geq N$  och  $n \geq N$ , så gäller därför på grund av triangelolikheten att

$$|c_m - c_n| = |(c_m - c) + (c - c_n)| \leq |c_m - c| + |c - c_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

## Serier

Vi övergår nu till att behandla serier. Själva begreppet serie och konvergens av en serie återförs på begreppet talföljd och konvergens av talföljd med hjälp av följande definition.

**Definition.** Låt  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en följd av komplexa tal, och sätt

$$S_N = \sum_{n=1}^N c_n, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Man säger att den oändliga *serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

är *konvergent* med *summa*  $S$  om följden  $(S_N)_{N=1}^{\infty}$  av seriens *partialsummor* (eller *delsummor*) är en konvergent följd med gränsvärde  $S$ . Man använder i så fall också symbolen  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  som beteckning för seriens summa.

En icke-konvergent serie kallas *divergent*.

**EXEMPEL 2.2.2.** Serien  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , där  $z$  är ett komplext tal, kallas en *geometrisk serie*. Den geometriska serien är konvergent om och endast om  $|z| < 1$ , i vilket fall

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Vi kan nämligen beräkna partialsummorna och får för  $z \neq 1$  att

$$S_N = \sum_{k=0}^N z^k = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z},$$

medan förstas  $S_N = N + 1$  i fallet  $z = 1$ .

Det följer nu att  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1/(1-z)$  om  $|z| < 1$ , samt att gränsvärdet inte existerar om  $|z| \geq 1$ .  $\square$

Genom att dela upp termerna  $c_n$  i en komplex serie i sina real- och imaginärdelar,  $c_n = a_n + ib_n$ , får vi en motsvarande uppdelning av serien i två reella serier:

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Här är den komplexa serien  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent om och endast om de båda reella serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  är konvergenta, i vilket fall likheten (2.2) också gäller för de tre seriernas summor. Att så är fallet följer omedelbart av motsvarande resultat för följder (sats 2.2.1).

Därigenom har vi förstas i princip reducerat alla problem rörande komplexa serier till problem för reella serier.

För serier med positiva termer finns det ett flertal olika konvergenzkriterier som samtliga bygger på det s. k. *jämförelsekriteriet*: Om varje term i en given positiv serie är mindre än motsvarande term i en känd konvergent positiv serie, så är den givna serien också konvergent. Därför är följande sats mycket användbar i de fall då den är tillämplig.

**Sats 2.2.3 (Absolutkonvergens).** *En komplex serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  är konvergent om den positiva serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  är konvergent.*

En serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  kallas *absolutkonvergent* om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  konvergerar. En konvergent serie som inte är absolutkonvergent kallas *betingat konvergent*.

*Bevis.* Vi återför beviset av satsen på det reella fallet. Sätt därför  $c_n = a_n + ib_n$ . Då är  $|a_n| \leq |c_n|$  och  $|b_n| \leq |c_n|$ . Om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  konvergerar, så följer det av jämförelsekriteriet för positiva serier att också serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  konvergerar. Motsvarigheten till sats 2.2.3 för reella serier ger nu att de båda reella serierna  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergerar, och följaktligen är också serien  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  konvergent med summa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .  $\square$

**EXEMPEL 2.2.3.** Om  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$  är en konvergent serie med positiva termer  $r_n$ , så är serien  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{int}$  absolutkonvergent för alla  $t$ , eftersom  $|r_n e^{int}| = r_n$ .

Eftersom den positiva serien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$  är konvergent om  $p > 1$  får vi därför som specialfall att serien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} e^{int}$  är absolutkonvergent för alla  $t$  om  $p > 1$ .

Däremot kan vi inte dra någon omedelbar slutsats om konvergensen för serien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e^{int}$ , ty serien är inte absolutkonvergent eftersom se-

rien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$  är divergent. Man kan dock visa att serien är konvergent för  $0 < t < 2\pi$ .  $\square$

### Gränsövergång under summatecknet

Vi kommer åtskilliga gånger att behöva göra gränsövergångar under summatecknet av typen

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t),$$

där  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  är någon given följd av funktioner. För att detta ska vara sant räcker det emellertid inte att serierna är konvergenta och att gränsvärdena i högerledet existerar, utan det behövs något extra villkor. Här följer ett enkelt sådant.

**Sats 2.2.4.** *Antag att funktionerna  $f_n$  är begränsade i något intervall  $I$  kring punkten  $t_0$  och sätt*

$$M_n = \sup_{t \in I} |f_n(t)|.$$

*Antag vidare att serien  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  är konvergent och att gränsvärdena*

$$a_n = \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t)$$

*existerar för alla  $n$ . Då är*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

*Bevis.* Eftersom  $|f_n(t)| \leq M_n$  för alla  $t$  i intervallet  $I$  är också  $|a_n| \leq M_n$ . Serierna

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \quad \text{och} \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

är därför absolutkonvergenta, den förstnämnda för alla  $t \in I$ .

Vi har att visa att  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = A$ , dvs. att det givet  $\epsilon > 0$  finns ett intervall kring  $t_0$  sådant att  $|F(t) - A| < \epsilon$  för alla punkter  $t$  i intervallet. Välj för den skull talet  $N$  så stort att  $\sum_{n=N}^{\infty} M_n < \epsilon/4$ . För den ändliga summan

$$F_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} f_n(t)$$

gäller förstås att

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F_N(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n,$$

så därför finns det ett intervall  $J$  kring  $t_0$  sådant att

$$\left| F_N(t) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \right| < \epsilon/2$$

för alla  $t \in J$ .

Genom att utnyttja att  $|f_n(t) - a_n| \leq |f_n(t)| + |a_n| \leq 2M_n$  får vi nu med hjälp av triangelolikheten följande uppskattning av differensen  $|F(t) - A|$  för  $t$  i intervallet  $J$  kring  $t_0$ :

$$\begin{aligned} |F(t) - A| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = \left| \left( F_N(t) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \right) + \sum_{n=N}^{\infty} (f_n(t) - a_n) \right| \\ &\leq \left| F_N(t) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \right| + \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(t) - a_n| \\ &\leq \left| F_N(t) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \right| + 2 \sum_{n=N}^{\infty} M_n < \epsilon/2 + 2\epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned}$$

Därmed är beviset klart. □

Vi har följande följsats till sats 2.2.4.

**Korollarium 2.2.5.** *Antag att funktionerna  $f_n$  är begränsade i något intervall  $I$  kring  $t_0$  och kontinuerliga i punkten  $t_0$  samt att den numeriska serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t \in I} |f_n(t)|$  är konvergent. Då är funktionen*

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t).$$

*kontinuerlig i punkten  $t_0$ .*

*Bevis.* Det följer av förutsättningarna och föregående sats att

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t_0) = F(t_0). \quad \square$$

EXEMPEL 2.2.4. Funktionen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin nt$$

är kontinuerlig överallt eftersom seriens termer är kontinuerliga och till beloppet mindre än  $1/n^2$  för alla  $t \in \mathbf{R}$ , och serien  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  är konvergent. □

### Summation av divergenta serier

Många matematiker var under sjuttonhundratalet fascinerade av problemet att summera divergenta serier. Exempelvis diskuterade Guido Grandi serien  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  i ett arbete år 1703, och han tilldelade den med olika argument summan  $1/2$ . Grandis serie kommenterades av flera samtida matematiker, och en metod som användes för att motivera just värdet  $1/2$  är en summationsmetod som kallas *abelsummation* på grund av följande sats av Niels Henrik Abel.

**Sats 2.2.6** (Abels potensseriesats). *Antag att serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  är en konvergent med summa  $s$ . Då är*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s.$$

*Bevis.* Om serien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  är absolutkonvergent, så följer likheten i satsen av sats 2.2.4 eftersom  $|a_n r^n| \leq |a_n|$  för  $0 \leq r \leq 1$ , men vi behöver ett bevis som också fungerar för betingat konvergenta serier.

Sätt för den skull  $s_{-1} = 0$  och

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

för  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; då är  $a_n = s_n - s_{n-1}$  för alla  $n$ .

Antag fortsättningsvis att  $0 < r < 1$ . Då är serierna  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  och  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n$  säkert konvergenta, ty följderna  $(a_n)_0^{\infty}$  och  $(s_n)_0^{\infty}$  är begränsade eftersom  $a_n \rightarrow 0$  och  $s_n \rightarrow s$  då  $n \rightarrow \infty$ . Vi kan därför göra omskrivningen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_{n-1} r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (r^n - r^{n+1}) = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n. \end{aligned}$$

Eftersom

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1$$

blir därför

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n - s(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) r^n.$$

Eftersom  $s_n \rightarrow s$  då  $n \rightarrow \infty$ , kan vi givet  $\epsilon > 0$  välja talet  $N$  så att  $|s_n - s| < \epsilon$  om  $n \geq N$ . Sätt

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - s) r^n;$$

triangelolikheten ger nu att

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s \right| &= \left| (1-r) \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - s) r^n + (1-r) \sum_{n=N}^{\infty} (s_n - s) r^n \right| \\ &\leq (1-r) \left| \sum_{n=0}^{N-1} (s_n - s) r^n \right| + (1-r) \sum_{n=N}^{\infty} |s_n - s| r^n \\ &\leq (1-r)|A| + (1-r) \sum_{n=N}^{\infty} \epsilon r^n \\ &= (1-r)|A| + \epsilon r^N < (1-r)|A| + \epsilon. \end{aligned}$$

Eftersom  $(1-r)|A| \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow 1$ , är följaktligen

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - s \right| < 2\epsilon$$

för  $r$  tillräckligt nära 1, och detta bevisar satsen.  $\square$

Poängen med Abels sats är att serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  inte nödvändigtvis behöver vara konvergent för att gränsvärdet

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

ska existera, men om serien konvergerar så är gränsvärdet lika med seriens summa. Genom att använda gränsvärdet som definition för summan av serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ändrar vi således inte summabegreppet för konvergenta serier men vi tilldelar på så sätt också vissa divergenta serier en summa. För serien  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$  blir gränsvärdet

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2},$$

så Grandis serie får därigenom summan  $1/2$ .

Ovanstående resonemang föranleder oss alltså att göra följande definition.

**Definition.** Serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  kallas *abelsummerbar* med *abelsumma*  $s$  om

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s.$$



## Övningar

2.1 För vilka komplexa tal  $\alpha$  är följande serier abelsummerbara och vad är i förekommande fall abelsumman?

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n.$$

## 2.3 Absolutintegrabla funktioner

I lite mer avancerade framställningar av fourieranalysen använder man ett integralbegrepp som kallas Lebesgueintegralen, men för våra behov duger den vanliga Riemannintegralen, dvs. det integralbegrepp som introduceras i alla inledande analyskurser.

Riemannintegralen är primärt definierad för funktioner som är definierade och begränsade på begränsade intervall, och för integrerbara funktioner  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  kan integralen  $\int_a^b f(t) dt$  erhållas som ett gränsvärde till s. k. Riemannsummor (eller till över- eller undersummor).

För funktioner  $f$  som är definierade på hela reella axeln och integrerbara över varje begränsat delintervall av  $\mathbf{R}$  definierar man (den generaliserade) integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  som gränsvärdet

$$\lim_{a, b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f(t) dt$$

förutsatt att det existerar som ändligt tal,  $-\infty$  eller  $+\infty$ , och integralen kallas konvergent om gränsvärdet är ändligt. För icke-negativa funktioner  $f$  existerar alltid gränsvärdet och är antingen ändligt eller  $+\infty$ .

För funktioner  $f$  som är Riemannintegrerbara på varje begränsat intervall existerar därför alltid den generaliserade integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ , och det är ganska lätt att se att om värdet är ändligt, så är också integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  konvergent. Detta motiverar följande terminologi.

**Definition.** En funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *absolutintegrabel* om funktionen är Riemannintegrerbar på varje begränsat delintervall av  $\mathbf{R}$  och den generaliserade integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  har ett ändligt värde. Den generaliserade integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  kallas i så fall integralen av  $f$  över  $\mathbf{R}$  och betecknas fortsättningsvis  $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt$ .

Klassen av alla absolutintegrabla funktioner betecknas  $L^1(\mathbf{R})$ .<sup>1</sup>

Vi kommer också att behöva ett sätt att ange ”storleken” hos en absolutintegrabel funktion. För begränsade sådana funktioner  $f$  är naturligtvis

<sup>1</sup>I mer avancerade framställningar används  $L^1(\mathbf{R})$  som beteckning för rummet av alla Lebesgueintegrabla funktioner på  $\mathbf{R}$ , vilket förklarar bokstaven L i beteckningen.

supremum av funktionens belopp, dvs.

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$$

ett tänkbart sådant mått, men ett i flera avseenden bättre och mer naturligt mått, och som dessutom är väldefinierat för alla absolutintegrabla funktioner, får man genom att istället använda integralen av absolutbeloppet. Vi sätter därför

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt,$$

och kallar  $\|f\|_1$  för  $L^1$ -normen av  $f$ .

Observera att om  $\|f\|_1 = 0$ , så är  $f(t) = 0$  i alla kontinuitetspunkter  $t$  till funktionen. Däremot kan vi naturligtvis inte dra någon slutsats om funktionens värden i eventuella diskontinuitetspunkter. Exempelvis är ju  $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt = 0$  om  $f(1) = 10$  och  $f(t) = 0$  för  $t \neq 1$ .

**Sats 2.3.1.** (i) Om funktionen  $f$  är absolutintegrabel och  $c$  är ett godtyckligt komplext tal, så är också funktionen  $cf$  absolutintegrabel och  $\|cf\|_1 = |c|\|f\|_1$ .

(ii) Om  $f$  och  $g$  är två absolutintegrabla funktioner, så är också deras summa  $f + g$  absolutintegrabel och  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .

*Bevis.* Påstående (i) är uppenbart och normolikheten i (ii) följer genom att integrera triangelolikheten  $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ .  $\square$

Genom att iterera egenskaperna (i) och (ii) ser vi att varje linjärkombination av absolutintegrabla funktioner är absolutintegrabel. Rummet  $L^1(\mathbf{R})$  av alla absolutintegrabla funktioner är med andra ord ett *komplext vektorrum*.

För att i görligaste mån undvika tekniska svårigheter kommer vi huvudsakligen att betrakta funktioner som är styckvis kontinuerliga i följande bemärkelse.

**Definition.** En funktion  $f$  med ett begränsat eller obegränsat intervall som definitionsmängd kallas *styckvis kontinuerlig* om den är kontinuerlig bortsett från högst ändligt många sprängdiskontinuitetspunkter i varje begränsat delintervall av definitionsmängden.

Att en punkt  $a$  är en sprängdiskontinuitetspunkt betyder att höger- som vänstergränsvärdena

$$f(a^+) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) \quad \text{och} \quad f(a^-) = \lim_{t \rightarrow a^-} f(t)$$

båda existerar.

En styckvis kontinuerlig funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  är integrerbar över varje begränsat intervall, och den är absolutintegrabel, dvs. tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ , om  $f(t)$

avtar tillräckligt snabbt då  $t$  går mot oändligheten, t. ex. om  $|f(t)| \leq K|t|^{-\alpha}$  för någon konstant  $K$  och  $\alpha > 1$ .

De allra enklaste absolutintegrabla, styckvis kontinuerliga funktionerna är trappstegsfunktionerna, som vi definierar så här:

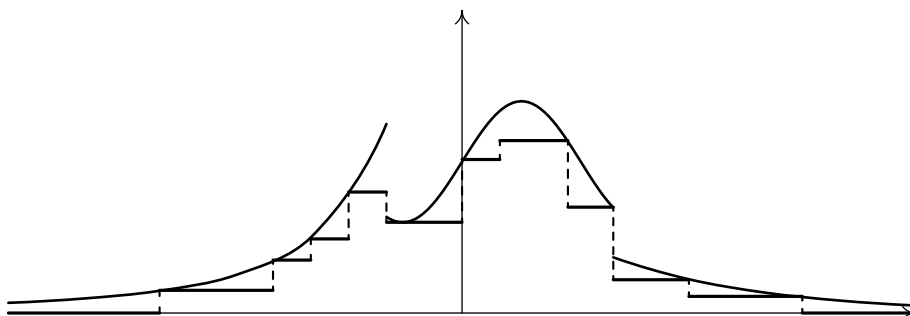
**Definition.** En *trappstegsfunktion* är en funktion med bara ändligt många diskontinuitetspunkter  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , som är konstant mellan varje par  $t_i, t_{i+1}$  av konsekutiva diskontinuitetspunkter och som är identiskt noll utanför intervallet  $[t_0, t_n]$ .

Den *karaktäristiska funktionen*  $\chi_I$  för ett begränsat intervall  $I$ , dvs. funktionen som definieras av att

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \in I, \\ 0 & \text{om } t \notin I, \end{cases}$$

är uppenbarligen en trappstegsfunktion liksom varje linjärkombination av sådana funktioner. Omvänt är varje trappstegsfunktion lika med en linjärkombination av karakteristiska funktioner till disjunkta intervall bortsett från värdena i diskontinuitetspunkterna.

**Sats 2.3.2.** *Varje absolutintegrabel funktion  $f$  kan med godtycklig noggrannhet approximeras av en trappstegsfunktion, dvs. givet talet  $\epsilon > 0$  finns det en trappstegsfunktion  $h$  sådan att  $\|f - h\|_1 < \epsilon$ .*



**Figur 2.2.** Approximation av en absolutintegrabel funktion med en trappstegsfunktion.

*Bevis.* Vi konstaterar först att det räcker att bevisa satsen för reella funktioner, ty varje komplexvärd absolutintegrabel funktion  $f$  kan skrivas på formen  $f = u + iv$ , där  $u$  och  $v$  är reellvärda och absolutintegrabla, och om  $h$  och  $k$  är trappstegsfunktioner som approximerar  $u$  resp.  $v$  med ett fel som

är mindre än  $\epsilon/2$ , så är  $h + ik$  en trappstegsfunktion som approximerar  $f$  med ett fel som är mindre än  $\epsilon$  eftersom

$$\|u + iv - (h + ik)\|_1 = \|u - h + i(v - k)\|_1 \leq \|u - h\|_1 + \|i(v - k)\|_1 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Varje reellvärd funktion  $f$  kan vidare skrivas som en differens  $f_+ - f_-$  av två icke-negativa reellvärda funktioner genom att man definierar

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{om } f(t) < 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad f_-(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } f(t) \geq 0 \\ -f(t) & \text{om } f(t) < 0, \end{cases}$$

och funktionerna  $f_+$  och  $f_-$  är absolutintegrabla om  $f$  är det. Om nu  $h_+$  och  $h_-$  är två trappstegsfunktioner som approximerar  $f_+$  resp.  $f_-$  med fel som är mindre än  $\epsilon/2$ , så approximerar trappstegsfunktionen  $h_+ - h_-$  funktionen  $f = f_+ - f_-$  med ett fel som är mindre än  $\epsilon$ .

Vi kan därför fortsättningsvis anta att funktionen  $f$  är icke-negativ och utnyttjar först definitionen av  $\int_{\mathbf{R}} f(t) dt$  som ett gränsvärde av integraler till funktionen  $f$  över begränsade delintervall för att hitta ett begränsat intervall  $J = [a, b]$  med egenskapen att

$$\int_{\mathbf{R} \setminus J} f(t) dt < \epsilon/2.$$

På intervallet  $J$  är funktionen  $f$  Riemannintegrerbar, och Riemannintegrals definition som ett supremum av undersummor till funktionen  $f$  ger oss en trappstegsfunktion  $h$  som är noll utanför intervallet  $J$  sådan att  $h(t) \leq f(t)$  för alla  $t$  och

$$\int_J (f(t) - h(t)) dt < \epsilon/2.$$

Det följer nu att

$$\begin{aligned} \|f - h\|_1 &= \int_I (f(t) - h(t)) dt \\ &= \int_{I \setminus J} f(t) dt + \int_J (f(t) - h(t)) dt < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Därmed är satsen bevisad.  $\square$

Sats 2.3.2 innebär att ur approximationssynpunkt spelar trappstegsfunktionerna ungefär samma roll för  $L^1(\mathbf{R})$  som de rationella talen gör för  $\mathbf{R}$ . Om vi vet att en kontinuerlig funktion är lika med noll för alla rationella tal, så kan vi med ett kontinuitetsargument dra slutsatsen att funktionen är noll för alla reella tal. Ett motsvarande resonemang kan ofta användas för att visa egenskaper hos  $L^1(\mathbf{R})$  – visa först att egenskapen gäller för alla trappstegsfunktioner och utnyttja sedan att dessa ligger "tätt" i  $L^1(\mathbf{R})$  för att dra slutsatsen att egenskapen gäller generellt. Ett typiskt exempel på ett sådant resonemang är beviset för följande sats, som vi kommer att använda senare för att dra slutsatser om fourierkoefficienter och fouriertransformen.

**Sats 2.3.3** (Riemann-Lebesgues lemma). *Antag att funktionen  $f$  är absolutintegrabel. Då är*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{i\omega t} dt = 0.$$

*Bevis.* Antag först att  $f$  är den karakteristiska funktionen till intervallet  $[a, b]$ . Då är

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)e^{i\omega t} dt = \int_a^b e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega b} - e^{i\omega a})$$

och följaktligen

$$\left| \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{i\omega t} dt \right| \leq \frac{|e^{i\omega b} - e^{i\omega a}|}{|\omega|} \leq \frac{2}{|\omega|}.$$

Detta visar att gränsvärdet i satsen är lika med noll för karakteristiska funktioner till begränsade intervall.

Låt härnäst  $h$  vara en godtycklig linjärkombination  $h = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i$  av karakteristiska funktioner till begränsade intervall. Det följer av det redan visade steget att

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbf{R}} \chi_i(t)e^{i\omega t} dt = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 0 = 0.$$

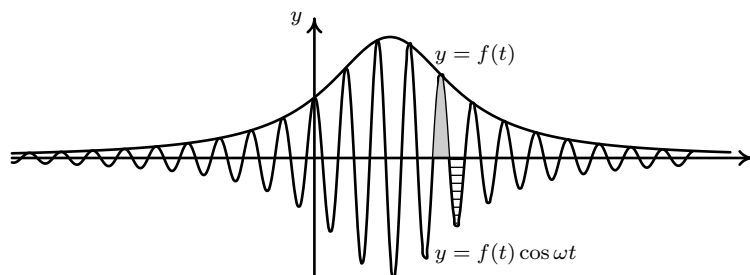
Låt slutligen  $f$  vara en godtycklig absolutintegrabel funktion och bestäm först, givet  $\epsilon > 0$ , en trappstegsfunktion  $h$  sådan att  $\|f - h\|_1 < \epsilon/2$ . Triangelolikheten för komplexa tal och för integraler ger att

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{i\omega t} dt \right| &= \left| \int_{\mathbf{R}} (f(t) - h(t))e^{i\omega t} dt + \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbf{R}} (f(t) - h(t))e^{i\omega t} dt \right| + \left| \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} |(f(t) - h(t))e^{i\omega t}| dt + \left| \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt \right| \\ &= \int_{\mathbf{R}} |f(t) - h(t)| dt + \left| \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt \right| \\ &= \|f - h\|_1 + \left| \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt \right| \leq \epsilon/2 + \left| \int_{\mathbf{R}} h(t)e^{i\omega t} dt \right|. \end{aligned}$$

Den allra sista integralen går mot 0 då  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Det följer därför att

$$\left| \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{i\omega t} dt \right| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

om  $|\omega|$  är tillräckligt stort, vilket bevisar vår sats.  $\square$



**Figur 2.3.** Illustration till Riemann–Lebesgues lemma. Figuren visar kurvorna  $y = f(t)$  och  $y = f(t) \cos \omega t$ . För stora  $\omega$  är integralen av  $f(t) \cos \omega t$  över en period till  $\cos \omega t$  nästan noll på grund av cancellation.

En heuristisk förklaring till Riemann–Lebesgues lemma ges av figur 2.3 som illustrerar integralen  $\int_{\mathbf{T}} f(t) \cos \omega t \, dt$ , dvs. realdelen av  $\int_{\mathbf{R}} f(t) e^{i\omega t} \, dt$ , för en reellvärd kontinuerlig funktion  $f$ . När  $\omega$  är stort oscillerar  $f(t) \cos \omega t$  mycket snabbt. Under en period är därför den del av grafen till  $f(t) \cos \omega t$  som ligger under  $t$ -axeln nästan identisk med del av grafen som ligger över  $t$ -axeln bortsett från tecknet, och integralen av  $f(t) \cos \omega t$  över en period är därför nästan noll.

## Övningar

2.2 Vilka av följande funktioner  $f$  är absolutintegrabla och bestäm i förekommande fall  $L^1$ -normen?

$$\text{a) } f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{b) } f(t) = \frac{1}{1+|t|} \quad \text{c) } f(t) = e^{-|t|}$$

2.3 Visa att för alla absolutintegrabla funktioner  $f$  är

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f(t) \sin \omega t \, dt = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f(t) \cos \omega t \, dt = 0 .$$

## 2.4 Omkastning av gränsprocesser

Vi kommer många gånger behöva göra gränsövergångar under integraltecknet eller kasta om ordningen mellan summation och integration, dvs. utnytt-

ja att det för de aktuella funktionsföljderna eller summorna gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \quad \text{resp.}$$

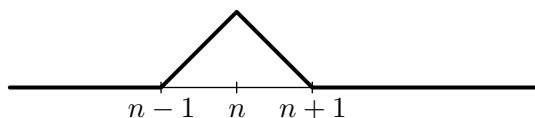
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) dt.$$

Att en sådan omkastning av de två gränsprocesserna inte alltid är tillåten framgår av följande två exempel, så därför behöver de i förekommande fall motiveras på något sätt.

EXEMPEL 2.4.1. Definiera en funktionsföljd  $(f_n)_1^\infty$  på intervallet  $[0, \infty[$  genom att sätta

$$f_n(t) = \begin{cases} t - n + 1 & \text{för } n - 1 \leq t \leq n, \\ n + 1 - t & \text{för } n \leq t \leq n + 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vi får grafen till funktionen  $f_n$  genom att på intervallet  $[n - 1, n + 1]$  rita en likbent triangel med intervallet som bas och höjd 1 (se figur 2.4).



Figur 2.4. Grafen till funktionen  $f_n$

Observera att  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$  för alla  $t \in [0, \infty[$ , ty för fixt  $t$  är  $f_n(t) = 0$  för alla heltal  $n \geq t + 1$ . Den punktvisa gränsfunktionen  $f$  till funktionsföljden  $(f_n)_1^\infty$  är således funktionen som är identiskt lika med noll. Men

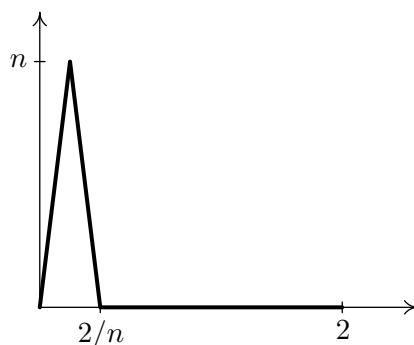
$$\int_0^\infty f_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^\infty f(t) dt$$

för alla  $n$ . I det här fallet är det således inte tillåtet att byta ordning på limes och integral.  $\square$

EXEMPEL 2.4.2. Funktionsföljden  $(g_n)_1^\infty$  är definierad på intervallet  $[0, 2]$  av att

$$g_n(t) = \begin{cases} n^2 t & \text{för } 0 \leq t \leq 1/n, \\ 2n - n^2 t & \text{för } 1/n \leq t \leq 2/n, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vi får funktionen  $g_n$ 's graf genom att resa en likbent triangel på intervallet  $[0, 2/n]$  av höjd  $n$  och med intervallet som bas.



**Figur 2.5.** Grafen till funktionen  $g_n$  i exempel 2.4.2.

För  $t > 0$  är  $g_n(t) = 0$  så snart  $n > 2/t$  medan  $g_n(0) = 0$  för alla  $n$ . Funktionsföljden konvergerar således punktvis mot funktionen  $g(t) = 0$  för alla  $t$ . Men

$$\int_0^2 g_n(t) dt = 1$$

för alla  $n$ , så inte heller i det här fallet är det tillåtet att byta ordning på limes och integral.  $\square$

Punktvis konvergens, dvs. att  $f_n(t)$  konvergerar mot  $f(t)$  då  $n \rightarrow \infty$  för varje  $t$  i integrationsintervallet, räcker som vi sett ovan inte för att det ska vara tillåtet att flytta in limes under integraltecknet, utan det behövs ytterligare villkor. Ett tillräckligt sådant är att funktionerna i följd inte blir alltför stora utan "domineras" av någon icke-negativ funktion  $h$  med ändlig integral i den betydelsen att  $|f_n(t)| \leq h(t)$  för alla  $t$ . Resultatet kallas *Lebesgues sats om dominerad konvergens*. Vi kommer inte att behöva satsen i dess fulla generalitet, utan formulerar följande lite svagare version som är anpassad till våra behov.

**Sats 2.4.1** (Dominerad konvergens). *Låt  $(g_n)_1^\infty$  vara en följd av styckvis kontinuerliga funktioner på  $\mathbf{R}$  och antag att funktionerna i följd är uniformt begränsade, dvs. att det finns en konstant  $C$  sådan att  $|g_n(t)| \leq C$  för alla  $t \in \mathbf{R}$  och alla  $n$ . Antag vidare att funktionerna i följd konvergerar punktvis mot den styckvis kontinuerliga funktionen  $g$ .*

Då är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(t) f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} g(t) f(t) dt$$

för alla absolutintegrabla funktioner  $f$ .

Beviset för satsen är alltför komplicerat för att ges här, så den som är intresserad av att se beviset får konsultera någon lärobok i integrationsteori.



EXEMPEL 2.4.3. Som tillämpning på satsen om dominerad konvergens visar vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} f(t) dt$$

för alla absolutintegrabla funktioner  $f$  på  $\mathbf{R}$ .

Sätt för den skull

$$g_n(t) = \begin{cases} (1 - |t|/n) & \text{om } |t| \leq n, \\ 0 & \text{om } |t| \geq n. \end{cases}$$

Då är

$$\int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) f(t) dt = \int_{\mathbf{R}} g_n(t) f(t) dt,$$

och eftersom funktionerna  $g_n$  konvergerar punktvis mot den konstanta funktionen 1 på  $\mathbf{R}$ , och  $|g_n(t)| \leq 1$  för alla  $t$  och  $n$ , följer gränsvärdet av satsen om dominerad konvergens.  $\square$

För integraler över begränsade intervall får vi följande korollarium till sats 2.4.1.

**Korollarium 2.4.2.** Låt  $(g_n)_{\mathbf{1}}^{\infty}$  vara en följd av styckvis kontinuerliga och uniformt begränsade funktioner på det begränsade intervallet  $[a, b]$ , och antag att funktionerna i följderna konvergerar punktvis på intervallet mot den styckvis kontinuerliga funktionen  $g$ . Då är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(t) f(t) dt = \int_a^b g(t) f(t) dt$$

för alla funktioner  $f$  som är integrerbara på intervallet.

*Bevis.* Utvidga definitionsområdena för funktionerna  $g_n$ ,  $g$  och  $f$  till hela  $\mathbf{R}$  genom att sätta dem lika med noll utanför intervallet  $[a, b]$ . Då är förutsättningarna i sats 2.4.1 uppfyllda, vilket ger oss korollariet eftersom  $\int_{\mathbf{R}} g_n(t) f(t) dt = \int_a^b g_n(t) f(t) dt$  och motsvarande gäller med  $g_n(t)$  bytt mot  $g(t)$ .  $\square$

Genom att tillämpa satsen om dominerad konvergens på partialsummor till en funktionsserie får vi också följande korollarium.

**Korollarium 2.4.3.** Låt  $(a_n)_{\mathbf{1}}^{\infty}$  vara en följd av kontinuerliga funktioner på ett intervall  $I$ , och antag att det finns en följd  $(M_n)_{\mathbf{1}}^{\infty}$  av positiva tal med följande egenskaper:

- (i)  $|a_n(t)| \leq M_n$  för alla  $t \in I$  och alla  $n$ ;
- (ii) den positiva serien  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  är konvergent.

Då är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I f(t) a_n(t) dt = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} f(t) a_n(t) dt$$

för varje absolutintegrabel funktion  $f$  om  $I = \mathbf{R}$ , och för varje integrerbar funktion  $f$  om intervallet  $I$  är begränsat.

*Bevis.* Antagandena (i) och (ii) medför att serien  $g(t) = \sum_1^{\infty} a_n(t)$  är absolutkonvergent i varje punkt  $t$  och att dess partialsummor  $g_N(t) = \sum_1^N a_n(t)$  är uniformt begränsade på intervallet  $I$  eftersom

$$|g_N(t)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n(t)| \leq \sum_{n=1}^N M_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

För ändliga summor är det naturligtvis inget problem att byta ordning på summation och integration, och därför är enligt föregående sats och dess korollarium

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f(t) a_n(t) dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_I f(t) a_n(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_I f(t) g_N(t) dt \\ &= \int_I f(t) g(t) dt = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} f(t) a_n(t) dt \end{aligned}$$

för varje absolutintegrabel funktion  $f$  om  $I = \mathbf{R}$  och för varje integrerbar funktion  $f$  om intervallet  $I$  är begränsat.  $\square$

EXEMPEL 2.4.4. Antag att serien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  är absolutkonvergent, och definiera en funktion  $g$  på intervallet  $[0, 2\pi]$  genom att sätta

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Genom att tillämpa korollariet ovan med  $a_n(t) = a_n e^{int}$ ,  $M_n = |a_n|$  och  $f$  som den konstanta funktionen 1 ser vi att

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n e^{int} dt = 2\pi a_0,$$

ty  $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$  för alla heltal  $n$  utom  $n = 0$ , då integralen istället är lika med  $2\pi$ .  $\square$

## Övning

2.4 Beräkna gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/n}}{1+t^2} dt$ .

## 2.5 Diracmättet

Funktioner karakteriseras av att varje värde på den oberoende variabeln ger ett unikt värde på den beroende variabeln. I många sammanhang är emellertid en funktion  $f$  inte i första hand intressant på grund av sina enskilda funktionsvärden utan på grund av att den förekommer som ingrediens i en integral av typen

$$(2.3) \quad T_f(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t)f(t) dt,$$

där  $\phi$  är en funktion som kan väljas på olika sätt.

Exempelvis gäller det för en slumpvariabel  $X$  med *täthetsfunktion*  $f$  att sannolikheten  $\text{Prob}(X \leq x)$  att  $X$  ska ha ett värde som är mindre än eller lika med  $x$  ges av integralen

$$\int_{\mathbf{R}} \chi_{]-\infty, x]}(t)f(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

att *väntevärdet*  $E(X)$  ges av integralen

$$\int_{\mathbf{R}} tf(t) dt$$

och att slumpvariabelns s. k. *karakteristiska funktion* ges av integralen

$$\int_{\mathbf{R}} e^{its} f(t) dt.$$

För absolutintegrabla funktioner  $f$  är uttrycket  $T_f(\phi)$  väldefinierat för exempelvis alla kontinuerliga funktioner  $\phi$  på  $\mathbf{R}$  som går mot noll i oändligheten, och dessa funktioner bildar ett linjärt rum som brukar betecknas  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ .  $T_f(\phi)$  varierar vidare linjärt med  $\phi$ , dvs.

$$T_f(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) = \lambda_1T_f(\phi_1) + \lambda_2T_f(\phi_2),$$

och detta betyder att  $T_f$  är en linjär avbildning på rummet  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ . Komplexvärda linjära avbildningar brukar kallas *linjära funktionaler*. Den linjära funktionalen  $T_f$  är slutligen kontinuerlig i den bemärkelsen att  $\phi_n \rightarrow \phi$  (likformigt) medför att  $T_f(\phi_n) \rightarrow T_f(\phi)$ .

Absolutintegrabla funktioner  $f$  ger således upphov till kontinuerliga linjära funktionaler  $T_f$  genom ekvationen (2.3), men har alla kontinuerliga funktionaler på rummet  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$  denna form? Svaret är nej! För att kunna beskriva alla kontinuerliga linjära funktionaler som en slags integraler behövs det en ny klass av objekt som inkluderar de absolutintegrabla funktionerna som specialfall. Dessa objekt kallas (*ändliga*) *mått*.

Om man behöver namnge ett generellt mått så brukar man ha en viss förkärlek för den grekiska bokstaven  $\mu$ , och istället för att använda  $\mu(\phi)$  som

beteckning för den linjära funktionalens  $\mu$ :s värde på funktionen  $\phi$  skriver man värdet som en integral så att

$$\mu(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) d\mu(t).$$

Mätteori spelar en viktig roll för exempelvis sannolikheteorin, men vi får här nöja oss med att beskriva de allra enklaste måtten, nämligen de som i sannolikheteorin svarar mot diskreta slumpvariabler. Den enklaste slumpvariabeln är den som antar ett enda värde helt säkert. Motsvarande sannolikhetsmått kallas en punktmassa eller ett Diracmått.

**Definition.** Diracmättet  $\delta_a$  i punkten  $a$  definieras av att

$$\delta_a(\phi) = \phi(a)$$

för alla funktioner  $\phi$ . För Diracmättet  $\delta_0$  i origo använder vi den kortare beteckningen  $\delta$ .

Trots att Diracmått inte är funktioner kommer vi att använda beteckningssättet

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) \delta_a(t) dt$$

istället för det mer korrekta  $\delta_a(\phi)$  eller  $\int_{\mathbf{R}} \phi(t) d\delta_a(t)$ . Men observera att  $\delta_a(t)$  inte är ett funktionsvärde.<sup>2</sup>

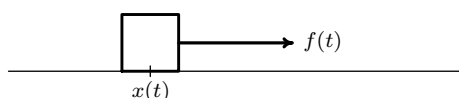
Vi har tidigare använt  $f_\tau$  som beteckning för den funktion som erhålls av  $f$  genom en translation  $\tau$  enheter åt höger så att  $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ . Beteckningen  $\delta_a$  för Diracmättet i punkten  $a$  är förenlig med detta skrivsätt eftersom  $\delta_a$  också kan uppfattas som ett translaterat till Diracmättet  $\delta$  i origo. Formeln för linjärt variabelbyte i en integral fungerar också för Diracmättet i den betydelsen att

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) \delta_a(t) dt = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) \delta(t - a) dt = \int_{\mathbf{R}} \phi(u + a) \delta(u) du = \phi(0 + a) = \delta_a(\phi).$$

De enda mått som kommer att figurera i den här boken (och som inte är funktioner) är Diracmått och summor av Diracmått. Linjärkombinationer  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{a_j}$  och oändliga summor av typen  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \delta_{a_j}$  med koefficienter som uppfyller  $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty$  är förstås också mått.

**EXEMPEL 2.5.1.** Ett föremål med massa  $m$  kan röra sig utefter en linje,  $x$ -axeln. För tidpunkter  $t \leq 0$  befinner det sig i vila i origo. För  $t \geq 0$  påverkas det av en kraft  $f(t)$ , som sätter föremålet i rörelse så att det vid tiden  $t$  befinner sig i punkten  $x(t)$  och har hastigheten  $v(t) = x'(t)$ .

<sup>2</sup>Fysiker, som inte är lika noga som matematiker, kallar dock  $\delta$  för Diracfunktionen.



**Figur 2.6.** Ett föremål påverkat av kraften  $f(t)$ .

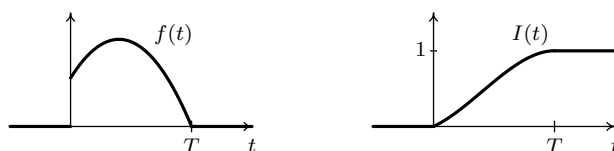
Föremålets rörelse beskrivs av Newtons lag:

$$f(t) = mx''(t) = mv'(t),$$

och genom att integrera denna ekvation över intervallet  $]-\infty, t]$  erhåller vi (eftersom  $f(t) = 0$  för  $t \leq 0$ ):

$$\int_{-\infty}^t f(s) ds = \int_0^t f(s) ds = m \int_0^t v'(s) ds = mv(t) - mv(0) = mv(t).$$

I fysiken kallar man  $I(t) = mv(t)$  för föremålets *impuls*, och sambandet ovan innebär alltså att förändringen av ett föremåls impuls över ett tidsintervall är lika med integralen av kraften över samma intervall. Om vi antar att kraften  $f(t)$  är lika med 0 utanför intervallet  $[0, T]$ , att  $m = 1$  och att  $\int_0^T f(t) dt = 1$ , och plottar kraften respektive impulsen som funktioner av tiden, får vi grafer som dem i figur 2.7.



**Figur 2.7.** Kraften respektive impulsen som funktion av tiden.

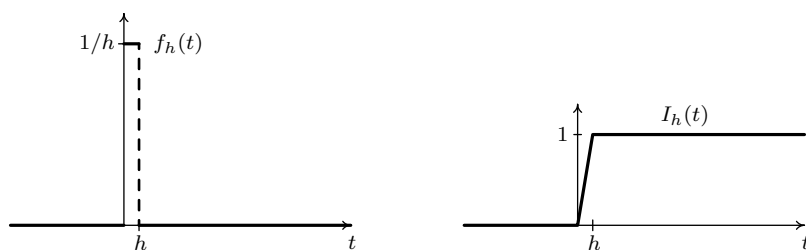
Låt nu föremålet ifråga vara en biljardboll, som vid tidpunkten  $t = 0$  utsätts för en kraftig stöt. Tidsintervallet  $[0, h]$  under vilket stötkraften verkar på bollen är mycket kort – låt oss anta att

$$f_h(t) = \begin{cases} 1/h & \text{då } 0 \leq t \leq h, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Impulsen blir då

$$I_h(t) = \int_{-\infty}^t f_h(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq 0, \\ t/h & \text{för } 0 \leq t \leq h, \\ 1 & \text{för } t \geq h. \end{cases}$$

Graferna för kraften  $f_h(t)$  och impulsen  $I_h(t)$  visas i figur 2.8.



**Figur 2.8.** Stötkraft  $f_h(t)$  och motsvarande impuls  $I_h(t)$ .

Vi undersöker gränsvärdet av  $I_h(t)$  då  $h$  går mot 0. Tydligen är

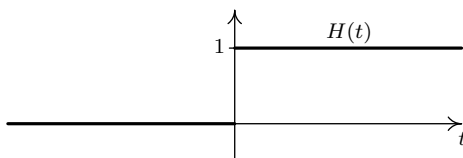
$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t \leq 0, \\ 1 & \text{om } t > 0. \end{cases}$$

Detta ger oss anledning att introducera *Heavisidefunktionen*  $H$  som definieras av att

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0, \\ 1 & \text{om } t \geq 0. \end{cases}$$

Tydligen går impulsfunktionen  $I_h(t)$  punktvis mot  $H(t)$  då  $h$  går mot 0, utom i punkten  $t = 0$ , men gränsvärdet i en enstaka punkt är oväsentligt för den kommande diskussionen. Heavisidefunktionen beskriver därför impulsen med god approximation för krafter som verkar under mycket kort tid. Slutsatsen gäller även om stötkraften har ett annat utseende än det som ges av figur 2.8. För alla kraftfunktioner  $f_h(t)$  som är 0 utanför intervallet  $[0, h]$  och vars integral över intervallet  $[0, h]$  är lika med 1, gäller att motsvarande impulsfunktioner  $I_h(t)$  konvergerar mot Heavisidefunktionen då  $h \rightarrow 0$ . (Om integralen av kraftfunktionen istället är konstant lika med  $\alpha$ , så konvergerar impulsen mot  $\alpha H(t)$ .)

Vi gör därför en idealisering av verkligheten och säger att impulsen vid en stöt ges av Heavisidefunktionen (eller en multipel av densamma). Men



**Figur 2.9.** Heavisidefunktionen.

kan man då på något vettigt sett beskriva impulsen som en integral av någonting, dvs. är

$$(2.4) \quad H(t) = \int_{-\infty}^t f(s) ds$$

för någon "kraft"  $f$ ? Problemet är att det inte kan finnas någon *funktion*  $f$  som åstadkommer detta. För alla intervall  $[a, b]$  som inte innehåller 0 är  $\int_a^b f(s) ds = H(b) - H(a) = 0$ . Om  $f$  är en integrerbar funktion, så får vi därför dels att  $\int_{-\infty}^0 f(s) ds = 0$  (genom att låta  $a \rightarrow -\infty$  och  $b \rightarrow 0^-$ ), dels att  $\int_0^t f(s) ds = 0$  (genom att låta  $a \rightarrow 0^+$  och välja  $b = t > 0$ ) med slutsatsen att  $\int_{-\infty}^t f(s) ds = \int_{-\infty}^0 f(s) ds + \int_0^t f(s) ds = 0$  för  $t > 0$ , vilket strider mot definitionen av Heavisidefunktionen  $H$ .

Diracmättet  $\delta$  löser vårt problem, ty

$$\int_{-\infty}^t \delta(s) ds = \int_{\mathbf{R}} \chi_{]-\infty, t]}(s) \delta(s) ds = \chi_{]-\infty, t]}(0) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0 \\ 1 & \text{om } t \geq 0 \end{cases} = H(t).$$

Vi har alltså ett objekt  $f(t) = \delta(t)$  som uppfyller ekvation (2.4) och som stötkrafterna  $f_h(t)$  "konvergerar" mot då  $h \rightarrow 0$ . Eftersom  $\delta(t)$  inte är en funktion rör det sig om en helt annan typ av konvergens än dem vi stött på hittills, och vi ska studera denna konvergens lite närmare i nästa avsnitt.  $\square$

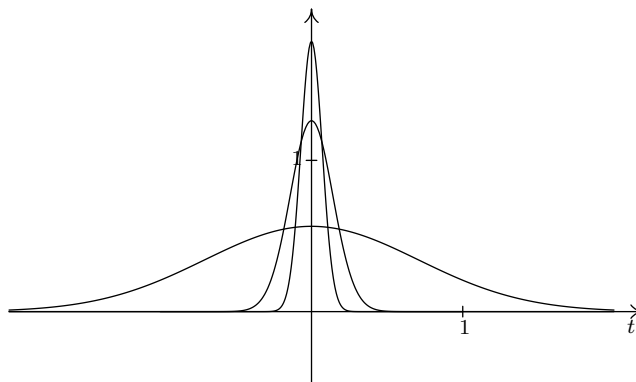
## 2.6 Summationskärnor

Exemplet med krafter och impulser i föregående avsnitt antyder att Diracmättet kan uppfattas som ett slags gränsvärde till funktioner av typen  $f_h(t) = \frac{1}{h} \chi_{[0, h]}(t)$  då  $h \rightarrow 0$ . Den exakta formen hos funktionerna  $f_h$  är inte viktig för slutresultatet utan vi får samma slutsats för alla funktioner som uppfyller villkoren i följande definition.

**Definition.** En familj  $(k_\tau)_{\tau > 0}$  av absolutintegrabla funktioner kallas en *positiv summationskärna* (på  $\mathbf{R}$ ) om följande fyra villkor är uppfyllda:

- (i)  $k_\tau(t) \geq 0$  för alla  $t \in \mathbf{R}$  och alla  $\tau$ ;
- (ii)  $\int_{\mathbf{R}} k_\tau(t) dt = 1$  för alla  $\tau$ ;
- (iii)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{|t| \geq \delta} k_\tau(t) dt = 0$  för alla  $\delta > 0$ ;
- (iv)  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{|t| \geq \delta} k_\tau(t) = 0$  för alla  $\delta > 0$ .

Om dessutom alla funktionerna i familjen är jämna, kallas summationskärnan jämn.



**Figur 2.10.** Funktionerna  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-t^2/2\tau}$  i Gausskärnan för  $\tau = 0.5, 0.1$  och  $0.05$ .

Familjen  $(f_h(t))_{h>0}$  av stötkrafter är uppenbarligen en positiv summationskärna. En annan mycket viktig jämn positiv summationskärna som vi kommer att få stor nytta av i kapitel 5, är den s. k. Gausskärnan eller värmeledningskärnan  $(\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-t^2/2\tau})_{\tau>0}$ . Se fig. 2.10.

Funktionerna i en positiv summationskärna konvergerar mot Diracmåtet i följande mening.

**Sats 2.6.1.** *Antag att  $(k_\tau)_{\tau>0}$  är en positiv summationskärna och att  $f$  är en absolutintegrabel funktion.*

(a) *Då är*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(t) dt = f(0) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\delta(t) dt$$

*om funktionen  $f$  är kontinuerlig i 0.*

(b) *Om summationskärnan är jämn, så är*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(t) dt = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$$

*om funktionen  $f$  har en språngdiskontinuitet i 0.*

*Bevis.* (a) Idén i beviset är enkel. Om funktionen  $f$  är kontinuerlig i origo och  $\delta$  är ett tillräckligt litet positivt tal, så är  $f(t) \approx f(0)$  i intervallet  $[-\delta, \delta]$ . För alla tillräckligt små tal  $\tau$  är vidare  $\int_{|t| \geq \delta} f(t)k_\tau(t) dt \approx 0$  på grund av egenskaperna (iii) och (iv) i summationskärnans definitionen. Följaktligen



är

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} f(t)k_{\tau}(t) dt &\approx \int_{-\delta}^{\delta} f(t)k_{\tau}(t) dt \approx \int_{-\delta}^{\delta} f(0)k_{\tau}(t) dt \\ &= f(0) \int_{-\delta}^{\delta} k_{\tau}(t) dt \approx f(0) \end{aligned}$$

för alla tillräckligt små tal  $\tau$ .

Vi ska nu omvandla idén till ett ”vattentätt” bevis. Vi ska visa att differensen

$$d(\tau) = \int_{\mathbf{R}} f(t)k_{\tau}(t) dt - f(0)$$

går mot 0 då  $\tau \rightarrow 0$  och börjar därför med att skriva om denna differens med hjälp av summationskärneegenskapen (ii):

$$d(\tau) = \int_{\mathbf{R}} f(t)k_{\tau}(t) dt - f(0) \int_{\mathbf{R}} k_{\tau}(t) dt = \int_{\mathbf{R}} (f(t) - f(0))k_{\tau}(t) dt.$$

Givet  $\epsilon > 0$  utnyttjar vi nu kontinuiteten hos funktionen  $f$  i origo för att välja talet  $\delta > 0$  så litet att  $|f(t) - f(0)| < \epsilon$  i hela intervallet  $[-\delta, \delta]$ . Utanför samma intervall använder vi oss av olikheten

$$|f(t) - f(0)| \leq |f(t)| + |f(0)|.$$

Med hjälp av triangelolikheten för integraler får vi därför följande uppskattning av  $|d(\tau)|$  genom att utnyttja att funktionerna  $k_{\tau}$  är icke-negativa:

$$\begin{aligned} |d(\tau)| &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(t) - f(0)|k_{\tau}(t) dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(t) - f(0)|k_{\tau}(t) dt + \int_{|t| \geq \delta} |f(t) - f(0)|k_{\tau}(t) dt \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon k_{\tau}(t) dt + \int_{|t| \geq \delta} |f(t)|k_{\tau}(t) dt + \int_{|t| \geq \delta} |f(0)|k_{\tau}(t) dt \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbf{R}} k_{\tau}(t) dt + \sup_{|t| \geq \delta} k_{\tau}(t) \int_{|t| \geq \delta} |f(t)| dt + |f(0)| \int_{|t| \geq \delta} k_{\tau}(t) dt \\ &\leq \epsilon + \sup_{|t| \geq \delta} k_{\tau}(t) \|f\|_1 + |f(0)| \int_{|t| \geq \delta} k_{\tau}(t) dt \end{aligned}$$

Men på grund av egenskaperna (iii) och (iv) finns det ett tal  $\tau_0$  sådant att

$$|f(0)| \int_{|t| \geq \delta} k_{\tau}(t) dt < \epsilon \quad \text{och} \quad \sup_{|t| \geq \delta} k_{\tau}(t) \|f\|_1 < \epsilon$$

för  $0 < \tau < \tau_0$ , och för sådana  $\tau$  är följaktligen  $|d(\tau)| < 3\epsilon$ . Därmed är påstående (a) bevisat.

(b) Antag att  $f$  har en språngdiskontinuitet i 0, och definiera funktionen  $g$  genom att sätta

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad \text{för } t \neq 0 \quad \text{och} \quad g(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}.$$

Då är funktionen  $g$  jämn, absolutintegrabel och kontinuerlig i origo. För jämna summationskärnor  $(k_\tau)_{\tau>0}$  är

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(t) dt = \int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(-t) dt = \int_{\mathbf{R}} f(-t)k_\tau(t) dt$$

och följaktligen

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(t) dt + \int_{\mathbf{R}} f(-t)k_\tau(t) dt \right) = \int_{\mathbf{R}} g(t)k_\tau(t) dt.$$

Det följer därför av (a) att

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} f(t)k_\tau(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} g(t)k_\tau(t) dt = g(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}. \quad \square$$

## Kapitel 3

# Fourierserier

Fourieranalys går generellt ut på att representera funktioner som summor eller integraler av enkla beståndsdelar. När funktionerna är periodiska är dessa enkla beståndsdelar sinusfunktioner med frekvenser som står i ett harmoniskt förhållande till varandra, vilket betyder att samtliga frekvenser är heltalsmultipler av en gemensam grundfrekvens, och representationen har formen av en oändlig summa av sådana sinusfunktioner, *fourierserien*. För funktioner  $f$  med perioden  $2\pi$  innebär detta att fourierserien har formen

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nt + \phi_n)$$

eller, om man uttrycker sinusfunktionerna med hjälp av Eulers formler,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

I det här kapitlet ska vi att visa hur man bestämmer fourierkoefficienterna  $c_n$  samt diskutera i vilken mening dessa bestämmer själva funktionen  $f$ . Eftersom en funktions fourierserie inte nödvändigtvis är konvergent i alla punkter kommer vi också att behöva behandla ett alternativt konvergensbegrepp.

### 3.1 Periodiska funktioner

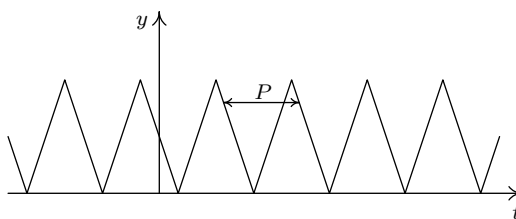
Vi påminner om att en funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  kallas *periodisk* om det finns ett nollskilt tal  $P$  sådant att

$$f(t + P) = f(t)$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Talet  $P$  kallas i så fall en *period* till funktionen.

Om funktionen  $f$  är periodisk med period  $P$ , så är också

$$f(t + 2P) = f(t + P) = f(t) = f(t - P) = f(t - 2P)$$



**Figur 3.1.** Periodisk funktion.

och mer allmänt att

$$f(t + nP) = f(t)$$

för alla heltal  $n$ . Funktionen period är således inte entydigt bestämd eftersom  $nP$  är en period för alla nollskilda heltal  $n$ .

Om  $P_1$  och  $P_2$  är två (olika) perioder till en funktion, så är

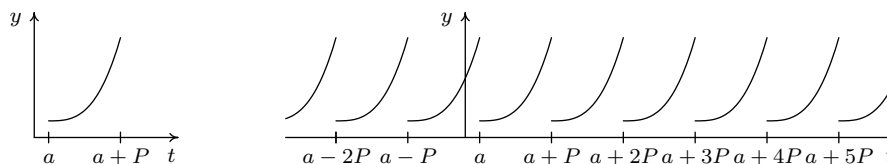
$$f(t + P_1 - P_2) = f(t + P_1) = f(t)$$

för alla  $t$ , så differensen  $P_1 - P_2$  är också en period. Härav följer, vilket vi lämnar som övningsuppgift att visa, att om en periodisk funktion har en *minsta* positiv period  $P_0$ , så är alla andra perioder heltalsmultipler av denna minsta period.

En periodisk funktion kan sakna minsta positiv period – exempelvis saknar förstas alla konstanta funktioner en minsta period – men i så fall måste funktionen ha godtyckligt små positiva perioder. Alla icke-konstanta, kontinuerliga, periodiska funktioner har en minsta positiv period.

Varje periodisk funktion med period  $P$  är fullständigt bestämd av sina värden på ett godtyckligt halvöppet intervall av längd  $P$ , exempelvis intervallet  $[0, P[$  eller intervallet  $]-P/2, P/2]$ .

Omvänt kan varje funktion  $f$  som ursprungligen är definierad på ett halvöppet intervall  $I = [a, b[$  av längd  $P$ , utvidgas till en periodisk funktion



**Figur 3.2.** Funktion  $f$  (vänster) och funktionens periodiska utvidgning  $\tilde{f}$  (höger).

$\tilde{f}$  med period  $P$ ; den utvidgade funktionen definieras av att  $\tilde{f}(t+nP) = f(t)$  för  $t \in I$  och  $n \in \mathbf{Z}$ . Se figur 3.2.

Observera att för att den utvidgade funktionen  $\tilde{f}$  skall vara kontinuerlig på hela reella axeln räcker det inte att funktionen  $f$  är kontinuerlig på det halvöppna intervallet  $I$ , utan dessutom måste högergränsvärdet  $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$  av  $f$  i den vänstra ändpunkten av intervallet vara lika med vänstergränsvärdet  $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$  av  $f$  i den högra ändpunkten av samma intervall. Detta beror på att  $\lim_{t \rightarrow a^-} \tilde{f}(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$  och  $\lim_{t \rightarrow a^+} \tilde{f}(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ .

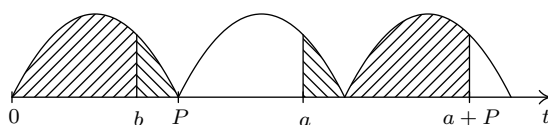
En motsvarande anmärkning gäller förstås beträffande deriverbarhet.

### Integralen över en periodlängd

Integralen av en periodisk funktion över ett intervall av periodens längd är oberoende av intervallens läge på reella axeln. Detta är geometriskt uppenbart (se figur 3.3), och ett formellt bevis erhålls med hjälp av några enkla variabelbyten.

Antag att funktionen  $f$  har period  $P$  och betrakta integralen över intervallet  $[a, a+P]$ . För att visa att denna integral är lika med integralen över intervallet  $[0, P]$ , bestämmer vi först heltalet  $n$  så att talet  $b = a - nP$  ligger i det halvöppna intervallet  $[0, P[$ . Med hjälp av två variabelbyten får vi sedan

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad \int_a^{a+P} f(t) dt &= \int_a^{(n+1)P} f(t) dt + \int_{(n+1)P}^{a+P} f(t) dt \\
 &= \int_a^{(n+1)P} f(t - nP) dt + \int_{(n+1)P}^{a+P} f(t - (n+1)P) dt \\
 &= \int_b^P f(u) du + \int_0^b f(u) du = \int_0^P f(u) du.
 \end{aligned}$$



**Figur 3.3.** Integralen av en periodisk funktion över en periodlängd är oberoende av intervallens läge.

Ett annat sätt att uttrycka likheten (3.1) är att integralen över ett intervall av periodens längd är densamma för alla translater av funktionen  $f$ . Vi kan generalisera detta genom att även tillåta skalningar med heltalsfaktorer och får då följande resultat.

**Sats 3.1.1.** Antag att funktionen  $f$  är integrerbar och periodisk med period  $P$ , att  $n$  är ett nollskilt heltal och att  $\tau$  är ett godtyckligt reellt tal. Då är

$$\int_0^P f(nt + \tau) dt = \int_0^P f(t) dt.$$

*Bevis.* Varje variabelbyte av typen  $u = nt + \tau$  kan skrivas som en sammansättning av en translation  $u = t + c$ , en skalning  $u = nt$  med  $n > 0$  och (om  $n < 0$ ) en inversion  $u = -t$ , och det räcker att visa likheten i satsen för dessa tre specialfall. Genom att utnyttja att integralen av  $f$  över ett godtyckligt intervall av längd  $P$  är lika med integralen över intervallet  $[0, P]$  får vi i respektive fall efter variabelbyten:

$$\begin{aligned} \int_0^P f(t + c) dt &= \int_c^{c+P} f(u) du = \int_0^P f(u) du; \\ \int_0^P f(nt) dt &= \frac{1}{n} \int_0^{nP} f(u) du = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)P}^{kP} f(u) du \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^P f(u) du = \int_0^P f(u) du; \\ \int_0^P f(-t) dt &= - \int_0^{-P} f(u) du = \int_{-P}^0 f(u) du = \int_0^P f(u) du. \quad \square \end{aligned}$$

## Övningar

- 3.1 Bestäm den minsta positiva perioden till funktionen  $f(t) = \sin 6\pi t$ .
- 3.2 Definiera funktionen  $f$  genom att sätta  $f(t) = 0$  om  $t$  är ett rationellt tal och  $f(t) = 1$  om  $t$  är ett irrationellt tal. Vad har denna funktion för perioder?
- 3.3 Anta att  $P$  och  $P_0$  är två perioder till en periodisk funktion. Visa att för varje heltal  $n$  är  $P - nP_0$  också en period eller lika med 0. Utnyttja sedan detta för att visa att för periodiska funktioner med en minsta positiv period  $P_0$  är varje period  $P$  en heltalsmultipel av  $P_0$ .
- 3.4 Funktionen  $f$  är periodisk med period 2 och för  $0 \leq t < 2$  är  $f(t) = t^2$ . Beräkna integralen  $\int_{-1}^1 f(t) dt$ .

## 3.2 Trigonometriska polynom

### Sinusoiden

Den rena sinusvågen eller *sinusoiden* är en grundläggande vågform inom akustik, elektricitetslära, signal- och bildbehandling och många andra tillämpningar. Matematiskt beskrivs en sådan våg med tiden  $t$  som variabel

av den periodiska funktionen

$$(3.2) \quad f(t) = A \sin(\omega t + \phi).$$

Här är  $A$  och  $\omega$  positiva tal och  $\phi$  är ett reellt tal. Talet  $A$  kallas *amplituden* och anger vågens maximala avvikelse från jämviktsläget,  $\omega$  kallas *vinkelfrekvensen* och  $\phi$  kallas *fasvinkeln*. Fasvinkeln specificerar var i cykeln svängningarna börjar då  $t = 0$ , och jämfört med vågen  $A \sin(\omega t)$  är vågen (3.2) förskjuten  $\phi/\omega$  tidsenheter åt vänster.

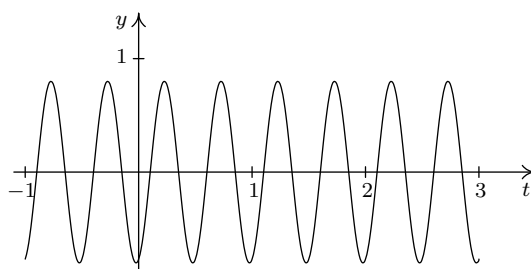
Vågfunktionen  $f$  är periodisk med minsta period

$$P = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Vågens *frekvens*  $\nu$ , dvs. antalet perioder eller cykler per tidsenhet, är följaktligen

$$\nu = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi},$$

vilket ger oss sambandet  $\omega = 2\pi\nu$  mellan vinkelfrekvens och frekvens.



**Figur 3.4.** Sinusoiden  $y = 0.8 \sin(4\pi t + 5)$ .

Vågframställningen (3.2) har den fördelen att de ingående parametrarna har omedelbara fysikaliska tolkningar, men den matematiska behandlingen förenklas av några omformuleringar. Genom att utnyttja additionsformeln

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

kan vi skriva vågfunktionen (3.2) på *trigonometrisk form* som

$$(3.3) \quad f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

med följande samband mellan parametrarna  $A$ ,  $\phi$  och parametrarna  $a$ ,  $b$ :

$$a = A \sin \phi, \quad b = A \cos \phi.$$

Omvänt återfår vi förstås amplitud-fasvinkelframställningen (3.2) ur formeln (3.3) genom att sätta

$$A = \sqrt{a^2 + b^2},$$

och sedan bestämma fasvinkeln  $\phi$  som en lösning till systemet

$$\sin \phi = a/A, \quad \cos \phi = b/A.$$

Ytterligare en mycket användbar variant, *exponentialformen*, erhålls genom att utnyttja Eulers formler

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Insättning av dessa i ekvation (3.3) leder efter förenkling till formeln

$$(3.4) \quad f(t) = C_- e^{-i\omega t} + C_+ e^{i\omega t},$$

där

$$C_- = \frac{1}{2}(a + ib), \quad C_+ = \frac{1}{2}(a - ib).$$

I andra riktningen är

$$a = C_- + C_+, \quad b = i(C_+ - C_-).$$

### Trigonometriska polynom

Linjärkombinationer som bildas av en konstant och sinusoider vars frekvenser är multipler av en given fix frekvens, kallas trigonometriska polynom. Med sinusoiderna skrivna på trigonometrisk form får vi följande definition.

**Definition.** Ett *trigonometriskt polynom* är en ändlig summa av typen

$$P_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

där koefficienterna  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  är godtyckliga komplexa tal.

Trigonometriska polynom är kontinuerliga periodiska funktioner med period  $2\pi/\omega$ . Att vi kallar den konstanta termen för  $a_0/2$  och inte  $a_0$  beror på att detta kommer att ge oss snyggare formler för koefficienterna längre fram.

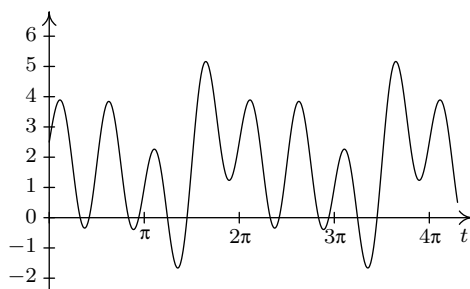
Genom att utnyttja Eulers formler kan vi skriva det trigonometriska polynomet i definitionen ovan på formen

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$$

med följande samband mellan koefficienterna:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \\ a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$





**Figur 3.5.** Det trigonometriska polynomet  
 $1.75 + \cos t - \sin 2t - 0.25 \cos 3t + 2 \sin 4t$ .

EXEMPEL 3.2.1. Skriv  $\cos^3 t$  som ett trigonometriskt polynom.

*Lösning:* Funktionen  $\cos^3 t$  har inte den rätta formen, men genom att utnyttja att  $\cos kt = \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt})$  och kombinera med binomialsatsen får vi

$$\begin{aligned} \cos^3 t &= \frac{1}{8}(e^{it} + e^{-it})^3 = \frac{1}{8}(e^{3it} + 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it}) \\ &= \frac{1}{8}(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPEL 3.2.2. Det trigonometriska polynomet

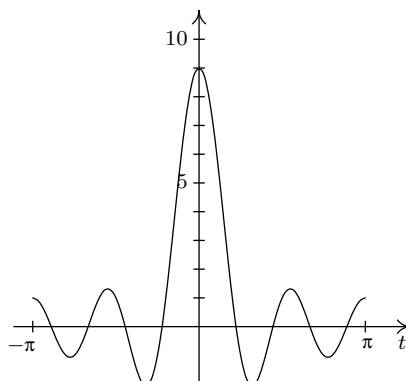
$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}$$

kallas *Dirichlets polynom* av grad  $N$ , och vi kan bestämma ett explicit uttryck för det eftersom det är en geometrisk summa av  $2N + 1$  termer med  $e^{-iNt}$  som första term och  $e^{it}$  som kvot. Med hjälp av summaformeln och Eulers former erhålls:

$$\begin{aligned} D_N(t) &= e^{-iNt} \cdot \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \cdot \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

För  $t = 0$  är förstås  $D_N(0) = 2N + 1$ , vilket också är lika med gränsvärdet av högerledet ovan då  $t \rightarrow 0$ .

Dirichlets polynom är uppenbarligen jämnt, dvs.  $D_N(-t) = D_N(t)$ .  $\square$



**Figur 3.6.** Dirichlets polynom  $D_4(t)$ .

### Övningar

- 3.5 Skriv sinusoiden  $y = 3 \sin(2t + \frac{\pi}{4})$  på exponentialform.
- 3.6 Skriv  $\cos^3 t$  som ett trigonometriskt polynom på amplitud-fasvinkelform.
- 3.7 Skriv  $\sin^4 t$  som ett trigonometriskt polynom på exponentialform och på trigonometrisk form.
- 3.8 Visa att summan av två sinusoider med samma vinkelfrekvens  $\omega$  är en ny sinusoid med vinkelfrekvensen  $\omega$ .
- 3.9 Visa att summan  $C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t}$  är en sinusoid  $A \sin(\omega t + \phi)$  med reell amplitud  $A$  om och endast om  $C_- = \overline{C_+}$ .
- 3.10 Skriv Dirichlets polynom  $D_N(t)$  på trigonometrisk form, dvs. som en summa av sinus- och cosinusfunktioner.
- 3.11 Hur många nollställen har  $D_N(t)$  på intervallet  $[-\pi, \pi]$ ?

### 3.3 Rummet $L^1(\mathbf{T})$

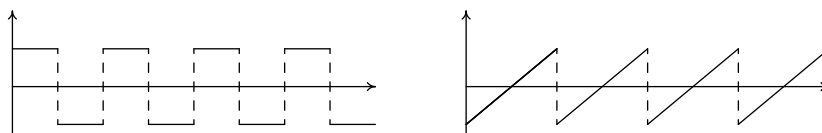
Vårt mål är att representera tämligen godtyckliga periodiska funktioner som trigonometriska serier, och med en enkel skalningsoperation kan vi då utan inskränkning anta att perioden är lika med  $2\pi$ . Om  $f$  är en periodisk funktion med period  $P$ , så är nämligen funktionen  $g$ , definierad av att

$$g(t) = f(Pt/2\pi)$$

för alla  $t$ , periodisk med perioden  $2\pi$ , och en serierepresentation av  $g$  ger genom variabelbytet  $t = 2\pi u/P$  en serierepresentation av funktionen  $f$ .

Eftersom formlerna blir enklare för funktioner med period  $2\pi$  än för funktioner med godtycklig period  $P$ , använder vi därför fortsättningsvis begreppet *periodisk funktion* i betydelsen *periodisk funktion med period  $2\pi$* , om inte annat sägs explicit.

Vi kommer i den här boken att inskränka oss till att behandla periodiska funktioner som är Riemannintegrerbara över en period. Den funktionsklassen är tillräckligt stor för att inkludera merparten av i praktiska tillämpningar förekommande funktioner, exempelvis inkluderar den alla periodiska funktioner som är styckvis kontinuerliga. Två enkla exempel från signalteorin på sådana funktioner är "fyrkantsvågen" och "sågtandsvågen". Se figur 3.7.



Figur 3.7. Fyrkantsvåg och sågtandsvåg

**Definition.** Klassen av alla Riemannintegrerbara periodiska funktioner med perioden  $2\pi$  betecknas  $L^1(\mathbf{T})$ . Som storleksmått för funktioner  $f$  i  $L^1(\mathbf{T})$  använder vi den s. k.  $L^1$ -normen

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt.$$

Bokstaven  $\mathbf{T}$  i beteckningen är vald därför att den är första bokstav i ordet "torus". Periodiska funktioner kan nämligen på ett naturligt sätt uppfattas som funktioner definierade på enhetscirkeln, den endimensionella torusen.

Skälet till att använda faktorn  $1/2\pi$  i normdefinitionen är att det är praktiskt att låta den konstanta funktionen 1 också få norm 1. För att bli av med faktorn  $1/2\pi$  i en mängd formler är det också praktiskt att införa den normaliserade integralen  $\int_{\mathbf{T}} f(t) dt$  genom att sätta

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

På grund av periodiciteten är då förstås

$$\int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(t) dt$$

för varje intervall  $[a, b]$  av längd  $2\pi$ .

Vi kommer fortsättningsvis att kalla  $\int_{\mathbf{T}} f(t) dt$  för *integralen av funktionen  $f$  över  $\mathbf{T}$* , och med vår nya beteckning blir följaktligen

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt.$$

De komplexa exponentialfunktionerna  $e^{int}$  kommer att vara våra ”byggestenar”; de spelar nästan samma roll för det oändligtdimensionella vektorrummet  $L^1(\mathbf{T})$  som en ON-bas gör för ett ändligtdimensionellt euklidiskt rum. Vid sidan om den multiplikativa egenskapen

$$e^{i\alpha t} e^{i\beta t} = e^{i(\alpha+\beta)t}$$

hos exponentialfunktionen kommer vi flitigt att utnyttja följande sats.

**Sats 3.3.1.** För alla heltal  $n$  är

$$\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0, \\ 0 & \text{om } n \neq 0. \end{cases}$$

*Bevis.* För nollskilda heltal  $n$  är

$$\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{1}{2n\pi i} [e^{int}]_0^{2\pi} = \frac{1}{2n\pi i} (e^{2n\pi i} - 1) = 0$$

och för  $n = 0$  är förstås

$$\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = \int_{\mathbf{T}} 1 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1. \quad \square$$

## Övningar

3.12 Bestäm  $\|f\|_1$  för funktionen  $f \in L^1(\mathbf{T})$  om

a)  $f(t) = t$  för  $-\pi < t \leq \pi$     b)  $f(t) = t^2$  för  $-\pi < t \leq \pi$

3.13 Visa med hjälp av sats 3.3.1 att

a)  $\int_{\mathbf{T}} \sin mt \cos nt dt = 0$  för alla heltal  $m, n$ ;

b)  $\int_{\mathbf{T}} \sin mt \sin nt dt = 0$  för alla heltal  $m \neq n$ .

3.14 Visa att för alla funktioner  $f \in L^1(\mathbf{T})$  är  $\|f\|_1 \leq \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |f(t)|$ .

### 3.4 De trigonometriska polynomets koefficienter

Vårt mål är som nämnts att skriva en tämligen godtycklig funktion  $f$  som en trigonometrisk serie, och vi har vidare specificerat att vi i den här framställningen med "tämligen godtycklig funktion" menar en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$ . (I mer avancerad litteratur behandlas allmännare funktioner, men vi saknar de nödvändiga matematiska verktygen för detta.) Koefficienterna i serien kommer att ges i form av integraler med funktionen  $f$  och den komplexa exponentialfunktionen som ingredienser.

Vi ska börja med att skaffa oss en formel för trigonometriska polynoms koefficienter. Betrakta för den skull ett trigonometriskt polynom

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$$

på exponentialform, och låt oss beräkna integralen

$$\int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-ikt} dt$$

då  $k$  är ett heltal mellan  $-N$  och  $N$ . Eftersom  $P(t) e^{-ikt} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i(n-k)t}$ , blir

$$\int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=-N}^N c_n \int_{\mathbf{T}} e^{i(n-k)t} dt.$$

På grund av sats 3.3.1 är alla termer i summan ovan lika med noll utom den term som fås då summationsindex  $n$  är lika med  $k$ , då integralens värde är lika med 1. Slutsatsen är att

$$\int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-ikt} dt = c_k,$$

och vi har därmed funnit följande formel för koefficienterna  $c_n$  i polynomet  $P(t)$ :

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} P(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} dt.$$

#### Övningar

3.15 Beräkna  $\int_{\mathbf{T}} P(t) \sin 2t dt$  och  $\int_{\mathbf{T}} P(t) \cos 2t dt$  för det trigonometriska polynomet

$$P(t) = 2e^{-i3t} - e^{-i2t} + 4e^{-it} + 5 + e^{it} + 3e^{i2t} + 5e^{i6t}.$$

3.16 Beräkna  $\int_{\mathbf{T}} P(t) \sin t dt$  för det trigonometriska polynomet

$$P(t) = 2 + \cos t - 4 \sin t + 3 \cos 2t + 10 \sin 2t.$$

### 3.5 Fourierkoefficienterna

Fouriers banbrytande idé var att skriva godtyckliga periodiska funktioner  $f$  som oändliga trigonometriska serier. Det ideala vore en serierepresentation av typen

$$(3.5) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{int}$$

där den oändliga summan skall tolkas som gränsvärdet av partialsummorna

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

då  $N$  går mot oändligheten.

Om  $S_N f(t)$  konvergerar mot  $f(t)$  på ett "hyggligt" vis, så kan man dra slutsatsen att integralerna  $\int_{\mathbf{T}} S_N f(t) e^{-int} dt$  konvergerar mot  $\int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt$  då  $N$  går mot oändligheten. Men vi vet från föregående avsnitt att

$$\int_{\mathbf{T}} S_N f(t) e^{-int} dt = c_n$$

om  $|n| \leq N$ , så följaktligen är i så fall också  $\int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt = c_n$  för alla  $n$ .

Detta innebär att om vi har en framställning på formen (3.5) och om konvergensen är hygglig, så vet vi vad koefficienterna  $c_n$  är; de måste ges av formeln

$$c_n = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt.$$

Nu observerar vi att högerledet i denna formel är väldefinierat och meningsfullt för alla integrerbara periodiska funktioner. Formeln får därför bli utgångspunkt för följande generella definition.

**Definition.** För  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och  $n \in \mathbf{Z}$  sätter vi

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt$$

och kallar talen  $\hat{f}(n)$  för  $f$ 's *fourierkoefficienter*. Serien

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

kallas funktionens *fourierserie*.

Fourierserien säges vara *konvergent* i punkten  $t$  om följen  $(S_N f(t))_{N=0}^{\infty}$  av partialsummor

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

konvergerar då  $N$  går mot oändligheten.

Notera speciellt att koefficienten

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbf{T}} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

är lika med medelvärdet av funktionen  $f$  över en period.

Vi kommer att skriva

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

för att ange att serien ifråga är fourierserie till funktionen  $f$ . Observera att vi därmed inte påstår att fourierserien konvergerar – konvergensen är ett delikat problem som vi kommer att behandla i senare avsnitt.

EXEMPEL 3.5.1. Låt oss bestämma fourierserien till den  $2\pi$ -periodiska funktion  $f$  som bestäms av att  $f(t) = t$  för  $|t| < \pi$ . (Notera att vi inte specificerat något funktionsvärde i punkten  $\pi$ , och därmed inte heller i någon av punkterna  $n\pi$  för udda heltal  $n$ . Funktionsvärdet  $f(\pi)$  är emellertid irrelevant, eftersom integralen som definierar fourierkoefficienterna inte bryr sig om funktionsvärdet i en enstaka punkt.)

Fourierkoefficienten  $\hat{f}(0)$  fås direkt som

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0,$$

medan fourierkoefficienter  $\hat{f}(n)$  för  $n \neq 0$  beräknas med hjälp av en partiell integration:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ t \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi ni} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{-2\pi ni} (\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}) + 0 = \frac{i}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Således gäller att

$$f(t) \sim i \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{int}.$$

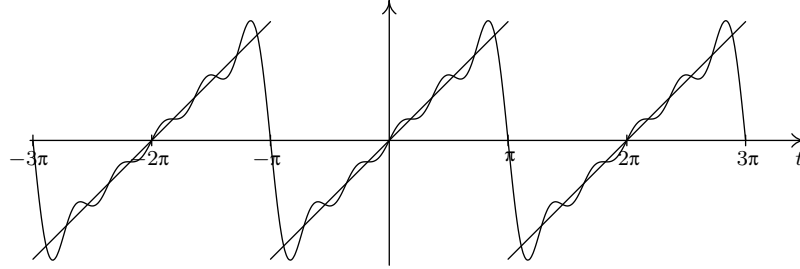
Vi kan skaffa oss ett alternativt uttryck för fourierserien genom att kombinera termer som svarar mot  $-n$  och  $n$ :

$$i \frac{(-1)^{-n}}{-n} e^{-int} + i \frac{(-1)^n}{n} e^{int} = \frac{(-1)^n}{n} i (e^{int} - e^{-int}) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Detta innebär att

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt,$$

vilket är fourierseriens trigonometriska form.



**Figur 3.8.** Funktionen  $f$  i exempel 3.5.1 och delsumman  $\sum_{n=1}^5 \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$  till funktionens fourierserie.

Genom att utnyttja att  $-\sin t = \sin(t + \pi)$  får vi också fourierserien på amplitud-fasvinkelform:

$$f(t) \sim \sum_{n \text{ udda}} \frac{2}{n} \sin nt + \sum_{n \text{ jämn}} \frac{2}{n} \sin(nt + \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nt + \phi_n),$$

där

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är udda,} \\ \pi & \text{om } n \text{ är jämnt.} \end{cases}$$

Vi har än så länge inte verktyg nog för att visa att fourierserien konvergerar mot  $f(t)$  utan får vänta till avsnitt 3.11 innan vi kan göra detta, men figur 3.8 som visar delsumman med fem termer, ger en klar indikation på att så är fallet i alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.  $\square$

### Trigonometrisk form

Exempel 3.5.1 visar att det finns flera alternativa sätt att skriva en funktions fourierserie på – formen

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

är enklast och bäst när vi ska analysera serien, men den känns inte lika naturlig i många tillämpningssammanhang, speciellt inte om funktionen  $f$  är reell. Genom att utnyttja att

$$\hat{f}(n) e^{int} + \hat{f}(-n) e^{-int} = (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)) \cos nt + i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) \sin nt$$

och sätta  $a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)$  och  $b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))$ , samt observera att detta speciellt innebär att  $\hat{f}(0) = a_0/2$ , ser vi att

$$(3.6) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$



Serien i högerledet av (3.6) kallas fouriersseriens *trigonometriska form*. Eftersom

$$\hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \int_{\mathbf{T}} f(t)(e^{-int} + e^{int}) dt = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt dt$$

och

$$i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = i \int_{\mathbf{T}} f(t)(e^{-int} - e^{int}) dt = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt dt$$

ges den trigonometriska formens koefficienter  $a_n$  och  $b_n$  av följande integraler:

$$(3.7) \quad a_n = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = 2 \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt dt.$$

Observera att koefficienterna  $a_n$  och  $b_n$  säkert är reella om funktionen  $f$  är reell. En fouriersseries partialsummor

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

är således reellvärda trigonometriska polynom om själva funktionen  $f$  är reellvärd.

## Övningar

3.17 Bestäm fouriersserien till den periodiska funktionen  $f$  om

- a)  $f(t) = 2 \sin t + 3 \cos 2t + 4 \sin 3t$     b)  $f(t) = \cos^2 3t$   
 c)  $f(t) = t^2$  för  $-\pi < t \leq \pi$     d)  $f(t) = e^t$  för  $-\pi < t \leq \pi$   
 e)  $f(t) = 0$  för  $-\pi < t < 0$  och  $f(t) = \sin t$  för  $0 \leq t \leq \pi$ .

## 3.6 Sinus- och cosinusserier

Fouriersserien i exempel 3.5.1 innehåller bara sinustermer. Detta är ingen tillfällighet utan beror på att funktionen är udda. Om funktionen  $f$  är udda, så är också  $f(t) \cos nt$  udda, och det följer därför att integralen av  $f(t) \cos nt$  över intervallet  $[-\pi, \pi]$  är lika med noll, vilket på grund av formel (3.7) betyder att  $a_n = 0$ . Eftersom funktionen  $f(t) \sin nt$  under samma premisser är jämn, kan vi vidare ersätta integralen av  $f(t) \sin nt$  över intervallet  $[-\pi, \pi]$  med två gånger integralen av samma funktion över intervallet  $[0, \pi]$ .

För *udda* periodiska funktioner  $f$  har vi med andra ord följande formler för fourierkoefficienterna  $a_n$  och  $b_n$ :

$$a_n = 0 \quad \text{och} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin nt \, dt.$$

Helt analogt gäller för *jämna* periodiska funktioner  $f$  att

$$b_n = 0 \quad \text{och} \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt$$

för alla  $n$ .

EXEMPEL 3.6.1. Låt  $f$  vara den  $2\pi$ -periodiska funktion som för  $|t| \leq \pi$  ges av att  $f(t) = |t|$ . Eftersom funktionen är jämn är funktionens fourierserie en ren cosinusserie:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

Fourierkoefficienterna är

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \, dt = \pi \quad \text{och} \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ t \frac{\sin nt}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n} \, dt \right) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos nt}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \quad \text{för } n \geq 1. \end{aligned}$$

Koefficienterna med jämna index  $\geq 2$  är tydligen lika med noll, så därför kan vi skriva fourierserien på formen

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

Serien är tydligen absolutkonvergent för alla  $t$  på grund av jämförelsekriteriet, men är summan lika med  $f(t)$ ? Svaret är ja, men motiveringen får vi återkomma till i avsnitt 3.8.  $\square$

Vi kan utnyttja det faktum att en udda funktions fourierserie bara innehåller sinustermer och en jämn funktions fourierserie bara innehåller cosinustermer för att utveckla funktioner definierade på intervallet  $[0, \pi]$  i rena sinusserier eller rena cosinusserier.

Antag nämligen att  $f$  är en funktion med intervallet  $[0, \pi]$  som definitionsmängd. Om vi utvidgar  $f$  till en jämn  $2\pi$ -periodisk funktion  $\tilde{f}$  genom att definiera  $\tilde{f}(-t) = \tilde{f}(t) = f(t)$  för  $0 \leq t \leq \pi$ , så är alla sinusoefficienter i

fourierserietvecklingen av  $\tilde{f}$  lika med noll. Det följer att vi kan representera  $f(t)$  som

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

i alla punkter  $t \in [0, \pi]$  där serien konvergerar mot  $f(t)$ .

På liknande sätt erhåller vi, genom att utvidga  $f$  till en udda  $2\pi$ -periodisk funktion  $\tilde{f}$ , en representation av  $f$  i form av en ren sinusserie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt,$$

i alla punkter  $t \in ]0, \pi[$  där serien konvergerar mot  $f(t)$ .

**EXEMPEL 3.6.2.** Låt  $f(t) = t$  för  $0 \leq t \leq \pi$ . Den jämna utvidgningen är  $\tilde{f}(t) = |t|$  för  $|t| \leq \pi$ , och den funktionen har en cosinusserie som vi bestämde i exempel 3.6.1. Eftersom serien i det här fallet är konvergent med funktionsvärdet som summa i alla punkter, följer det speciellt att

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$

för  $0 \leq t \leq \pi$ .

Den udda utvidgningen  $\tilde{f}$  av  $f$  ges förstas av att  $\tilde{f}(t) = t$  för  $-\pi < t < \pi$ . Vi beräknade fourierserien av den funktionen i exempel 3.5.1 och fann då att

$$\tilde{f}(t) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Serien konvergerar, som vi ska visa senare, mot  $\tilde{f}(t)$  för  $-\pi < t < \pi$ , varför speciellt

$$t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$$

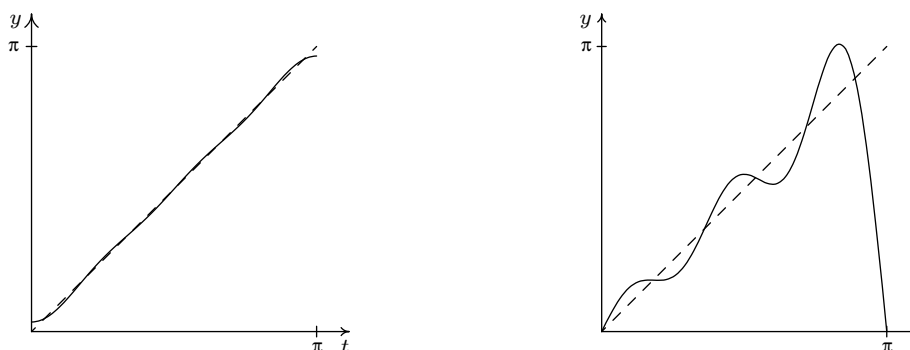
för  $0 \leq t < \pi$ .

Figur 3.9 visar att konvergensen mot  $f(t)$  är bättre för cosinusserien än för sinusserien, något som är helt naturligt eftersom koefficienterna i cosinusserien har en mindre storleksordning än koefficienterna i sinusserien.  $\square$

## Övningar

3.18 Utveckla funktionen  $f(t) = \cos t$  i sinusserie på intervallet  $0 < t < \pi$ .

3.19 Utveckla funktionen  $f(t) = \sin t$  i cosinusserie på intervallet  $0 < t < \pi$ .



**Figur 3.9.** Partialsummorna  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t)$  till cosinusserien (vänster) och  $2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{2}{5} \sin 5t$  till sinusserien (höger) för funktionen  $f(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

### 3.7 Egenskaper hos fourierkoefficienterna

Kanske har du noterat att fourierkoefficienterna i de exempel som vi behandlat går mot noll då  $n \rightarrow \infty$ . Detta är ingen tillfällighet, ty vi har följande allmänna resultat.

**Sats 3.7.1.** För alla funktioner  $f \in L^1(\mathbf{T})$  gäller att

- (i)  $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ ;
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0$ .

*Bevis.* Det första påståendet (i) är en direkt följd av triangelolikheten för integraler:

$$|\hat{f}(n)| = \left| \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \int_{\mathbf{T}} |f(t) e^{-int}| dt = \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Påstående (ii) är ett specialfall av Riemann–Lebesgues lemma. Låt nämligen  $\chi$  beteckna den karakteristiska funktionen till intervallet  $[0, 2\pi]$ , dvs.  $\chi(t) = 1$  om  $0 \leq t \leq 2\pi$  och  $\chi(t) = 0$  för övrigt. Då är förstas produkten  $f\chi$  en absolutintegrabel funktion, varför

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) \chi(t) e^{-int} dt \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \pm\infty$$

på grund av sats 2.3.3. □

Låt  $\mathcal{F}(f)$  beteckna själva följderna  $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbf{Z}}$  av fourierkoefficienter till en funktion  $f \in L^1(\mathbf{T})$ . Detta definierar en avbildning  $\mathcal{F}$  med funktionsrummet  $L^1(\mathbf{T})$  som definitionsmängd, och som målmängd för  $\mathcal{F}$  kan vi på grund av sats 3.7.1 välja mängden av alla komplexvärda följder  $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  med egenskapen att  $c_n \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \pm\infty$ . Denna mängd brukar betecknas  $\mathbf{c}_0$  och är liksom  $L^1(\mathbf{T})$  ett komplext vektorrum, eftersom vi kan bilda linjärkombinationer av följder på ett uppenbart sätt. Avbildningen  $\mathcal{F}$  kallas *fouriertransformen* på rummet  $L^1(\mathbf{T})$ .

En naturlig fråga för en avbildning mellan två vektorrum är om den är linjär. För fouriertransformen  $\mathcal{F}$  är förstås svaret ja.

**Sats 3.7.2.** *Fouriertransformen  $\mathcal{F}$  är en linjär avbildning, dvs. om  $f$  och  $g$  är två periodiska funktioner och  $c$  och  $d$  är komplexa tal, så är*

$$(\widehat{cf + dg})(n) = c\hat{f}(n) + d\hat{g}(n) \quad \text{för alla } n \in \mathbf{Z}.$$

*Bevis.* Påståendet följer med en gång av att integrering är en linjär operation:

$$\begin{aligned} (\widehat{cf + dg})(n) &= \int_{\mathbf{T}} (cf(t) + dg(t))e^{-int} dt \\ &= c \int_{\mathbf{T}} f(t)e^{-int} dt + d \int_{\mathbf{T}} g(t)e^{-int} dt = c\hat{f}(n) + d\hat{g}(n). \quad \square \end{aligned}$$

En viktig orsak till att fouriertransformering  $\mathcal{F}$  är en så användbar operation är att den förutom att vara linjär också transformerar den relativt komplicerade operationen derivering till den mycket enklare operationen multiplikation (med  $in$ ). Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 3.7.3.** *Antag att funktionen  $f$  är periodisk och kontinuerligt deriverbar. Då är*

$$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$$

för alla heltal  $n$ .

*Bevis.* Partiell integration ger att

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f'}(n) &= \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt = \left[ f(t)e^{-int} \right]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \\ &= f(2\pi) - f(0) + in2\pi\hat{f}(n) = 2\pi in\hat{f}(n). \quad \square \end{aligned}$$

Resultatet i satsen kan naturligtvis itereras. Om funktionen  $f$  är periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar, så är

$$\widehat{f''}(n) = in\widehat{f'}(n) = -n^2\widehat{f}(n),$$

och om funktionen är  $k$  gånger kontinuerligt deriverbar, så är

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k\widehat{f}(n).$$

Genom att kombinera likheten ovan med sats 3.7.1 får vi omedelbart följande resultat:

**Sats 3.7.4.** *Fourierkoefficienterna till en  $k$  gånger kontinuerligt deriverbar periodisk funktion  $f$  satisfierar för  $n \neq 0$  olikheten*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k},$$

där konstanten  $C$  är lika med  $k$ :te derivatans  $L^1$ -norm.

Ju mer reguljär (deriverbar) en funktion är desto snabbare går således funktionens fourierkoefficienter mot noll då  $n$  går mot  $\pm\infty$ .

Om  $|\widehat{f}(n)| \leq C|n|^{-2}$  för  $n \neq 0$ , så är serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}$  absolutkonvergent enligt jämförelsekriteriet. Vi kan alltså redan nu dra slutsatsen att en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion  $f$  har en konvergent fourierserie, men det återstår förstas att visa att seriens summa i punkten  $t$  är lika med funktionsvärdet  $f(t)$  (vilket den är).

## Övningar

3.20 Bestäm sambandet mellan  $\widehat{f}(n)$  och  $\widehat{g}(n)$  för funktionerna  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  om

a)  $g(t) = f(t - c)$  för något reellt tal  $c$ ;

b)  $g(t) = e^{imt}f(t)$  för något heltal  $m$ ;

c)  $g(t) = f''(t - \pi)$ .

3.21 Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och definiera en ny funktion  $g \in L^1(\mathbf{T})$  genom att sätta  $g(t) = e^{2it}f(t - 3)$ . Bestäm sambandet mellan  $\widehat{f}(n)$  och  $\widehat{g}(n)$ .

3.22 Visa för  $f \in L^1(\mathbf{T})$  att

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin nt \, dt = 0$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos nt \, dt = 0$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin(n + \frac{1}{2})t \, dt = 0$ .

### 3.8 Abelsummation

Fourierserien

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

till en funktionen  $f$  är per definition *konvergent i punkten  $t$*  om partialsumorna

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

konvergerar då  $N \rightarrow \infty$ . Observera alltså att vi inte kräver att de två delserierna  $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$  och  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n) e^{-int}$  ska konvergera var för sig.

Om vi istället skriver fourierserien på trigonometrisk form som

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

så blir

$$S_N f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Villkoret att följderna av partialsummor ska konvergera är således i detta fall identiskt med den vanliga definitionen av konvergens för en serie.

Tyvärr behöver en periodisk funktions fourierserie inte vara konvergent i alla punkter även om det faktiskt förhåller sig så att mängden av punkter där fourierserien till en styckvis kontinuerlig funktion inte är konvergent, är en väldigt liten mängd (en s. k. nollmängd). Så om vi vill återvinna en godtycklig periodisk funktion från dess fourierkoefficienter måste vi hitta på någon annan metod än att summera fourierserien på vanligt sätt.

Vi tar därför till ett knep och ersätter själva fourierserien med serien

$$F_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}$$

där  $0 < r < 1$ . Nu är det inga som helst problem med själva konvergens; den nya serien är absolutkonvergent eftersom

$$|r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}| = |\hat{f}(n)| r^{|n|} \leq \|f\|_1 r^{|n|}$$

och serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|}$  är en summa av två konvergenta geometriska serier.

De för  $0 < r < 1$  erhållna funktionerna  $F_r$  är givetvis periodiska. De är också kontinuerliga överallt på grund av korollarium 2.2.5.

Om fourierserien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$  är konvergent i en punkt  $t$ , så är enligt Abels potensseriesats (sats 2.2.6)

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} F_r(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

dvs.  $F_r(t)$  konvergerar då  $r \rightarrow 1^-$  mot fourierseriens summa i punkten. Men vad händer generellt? Vi vet ju att det finns divergenta serier som är Abelsummerbara. Svaret ges av nästa sats.

**Sats 3.8.1 (Abelsummation).** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och sätt*

$$F_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int}.$$

*I alla kontinuitets- och språngdiskontinuitetspunkter  $t$  till funktionen  $f$  är*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} F_r(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2},$$

*och speciellt är således*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} F_r(t) = f(t)$$

*i alla punkter  $t$  där funktionen är kontinuerlig.*

*Bevis.* Beviset bygger på att man skriver om summan  $F_r(t)$  som en integral. Betrakta för den skull först summan

$$(3.8) \quad P_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int}$$

för  $0 < r < 1$ . Eftersom  $P_r(t)$  är en summa av två geometriska serier kan vi bestämma ett explicit uttryck för  $P_r(t)$  på följande vis:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} = \frac{1}{1 - re^{it}} + \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}. \end{aligned}$$

Vi noterar härnäst tre viktiga egenskaper hos funktionerna  $P_r$  som innebär att familjen  $(P_r)_{0 < r < 1}$  är en positiv summationskärna på  $\mathbf{T}$ .

1. Funktionerna  $P_r$  är positiva och jämna. Detta är uppenbart från det explicita uttrycket för  $P_r(t)$  i likheten (3.9).

2. För alla  $r \in ]0, 1[$  är

$$\int_{\mathbf{T}} P_r(t) dt = 1.$$

Likheten följer genom termvis integration av serien (3.8), vilket är tillåtet på grund av korollarium 2.4.3, och genom att utnyttja att  $\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = 0$  för alla  $n$  utom  $n = 0$ .



3. Antag att  $0 < \delta < \pi$ ; då är

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup_{\delta \leq t \leq \pi} P_r(t) = 0.$$

Av det explicita uttrycket (3.9) för  $P_r(t)$  följer att dess maximum i intervallet  $[\delta, \pi]$  antas i den vänstra ändpunkten  $\delta$  och att  $P_r(\delta) \rightarrow 0$  då  $r \rightarrow 1^-$ . Eftersom  $0 \leq \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) dt \leq \pi P_r(\delta)$  är saken därmed klar.

Summationskärnan  $(P_r)_{0 < r < 1}$  kallas *Poissonkärnan* efter den franske matematikern Siméon Denis Poisson (1781–1840).

Integralformeln för  $F_r(t)$  får vi genom att i den definierande summan ersätta fourierkoefficienterna med deras integraldefinitioner:

$$\begin{aligned} F_r(t) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du = \int_{\mathbf{T}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} f(u) e^{-inu} du \\ &= \int_{\mathbf{T}} \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{in(t-u)} \right) f(u) du = \int_{\mathbf{T}} P_r(t-u) f(u) du \\ &= \int_{\mathbf{T}} P_r(s) f(t-s) ds. \end{aligned}$$

Omkastningen mellan summa och integration i den andra likheten är giltig på grund av korollarium 2.4.3, och den sista likheten följer av variabelbytet  $s = t - u$ .

Påståendet i satsen följer nu av sats 2.6.1, men eftersom den satsen handlar om summationskärnor på  $\mathbf{R}$ , skaffar vi oss först en sådan genom att modifiera funktionerna  $P_r$  och definiera

$$\tilde{P}_r(t) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} P_r(t) & \text{om } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{om } |t| \geq \pi. \end{cases}$$

Då är uppenbarligen familjen  $(\tilde{P}_r)_{0 < r < 1}$  en jämn, positiv summationskärna på  $\mathbf{R}$  (när parametern  $r$  går mot 1). Om  $t$  är en punkt där funktionen  $f$  är kontinuerlig eller har en sprängdiskontinuitet, så är 0 en kontinuitets- eller sprängdiskontinuitetspunkt till funktionen  $s \mapsto f(t-s)$ . Det följer därför av sats 2.6.1 att

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} F_r(t) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) f(t-s) ds = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\mathbf{R}} \tilde{P}_r(s) f(t-s) ds \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t-s) + \lim_{s \rightarrow 0^-} f(t-s) \right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}. \end{aligned}$$

Därmed är satsen bevisad.  $\square$

I många fall behöver man för att avgöra om en fourierserie är konvergent bara titta på fourierkoefficienterna. Exempelvis är serien absolutkonvergent

om fourierkoefficienterna  $\hat{f}(n)$  till beloppet är mindre än en konstant gånger  $1/n^2$ . Och om en periodisk funktions fourierserie är konvergent i en punkt där funktionen är kontinuerlig eller har en språngdiskontinuitet, så vet vi också på grund av föregående sats och Abels potensseriesats vad summan är i den punkten. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 3.8.2.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och att funktionens fourierserie är konvergent i en punkt  $t$  där funktionen är kontinuerlig eller har en språngdiskontinuitet. Då är fourierseriens summa i punkten  $t$  lika med*

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

*Speciellt är således summan lika med  $f(t)$  om  $t$  är en kontinuitetspunkt till funktionen.*

*Bevis.* Enligt sats 3.8.1 är  $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int} = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$ , så satsen följer av Abels potensseriesats som säger att gränsvärdet är lika med fourierseriens summa i alla punkter där fourierserien är konvergent.  $\square$

Sats 3.8.2 har följande omedelbara korollarium.

**Sats 3.8.3.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och att  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ . Då är*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

*i alla kontinuitets- och språngdiskontinuitetspunkter  $t$  till funktionen  $f$ .*

**EXEMPEL 3.8.1.** Den periodiska utvidgningen av  $f(t) = |t|$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ , som studerades i exempel 3.6.1, har fourierserien

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

Eftersom serien är absolutkonvergent för alla  $t$  och funktionen  $f$  är kontinuerlig i alla punkter, följer det av sats 3.8.3 att

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} = |t| \quad \text{för } -\pi \leq t \leq \pi.$$

För  $t = 0$  är således speciellt

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 0,$$

vilket efter förenkling ger oss resultatet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \square$$

## Övningar

3.23 Funktionen  $f$  är periodisk. Avgör var fourierserien konvergerar och bestäm dess summa om

- a)  $f(t) = t^2$  för  $-\pi < t \leq \pi$ ;  
 b)  $f(t) = 0$  för  $-\pi < t < 0$  och  $f(t) = \sin t$  för  $0 \leq t \leq \pi$ .

3.24 Använd fourierserierna till funktionerna i föregående övning (dessa beräknades i övning 3.17) för att beräkna följande summor:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

## 3.9 Entydighet

En strategi för att bestämma en lösningsfunktion  $f$  till ett konkret problem kan vara att genom fouriertransformering skaffa sig ett förhoppningsvis enklare problem för fourierkoefficienterna  $\hat{f}(n)$  och bestämma dessa. För att detta också ska ge lösningen  $f$  krävs det förstås att funktionen är entydigt bestämd av sina fourierkoefficienter. Vi behöver därför svar på följande frågor om fouriertransformeringsavbildningen  $\mathcal{F}: L^1(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbf{c}_0$ :

1. Är fouriertransformen  $\mathcal{F}$  injektiv?
2. Kan vi om så är fallet rekonstruera funktionen  $f$  från dess fourierkoefficienter, dvs. bestämma inversen  $\mathcal{F}^{-1}$ ?

Det omedelbara svaret på dessa frågor är förstås nej beroende på att fourierkoefficienterna inte ändras om vi ändrar en funktions värden i ett ändligt antal punkter. För att undvika ett triviale nejsvar måste vi därför modifiera frågorna en smula till:

- 1'. Om  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ , är då  $f(t) = g(t)$  i alla punkter  $t$  där funktionerna är kontinuerliga?
- 2'. Kan vi rekonstruera en funktion i alla dess kontinuitetspunkter utifrån funktionens fourierkoefficienter?

Nu har vi följande entydighetssats.

**Sats 3.9.1** (Entydighetssatsen). (a) Låt  $f$  vara en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$  och antag att  $\hat{f}(n) = 0$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ . Då är  $f(t) = 0$  i alla punkter  $t$  där funktionen är kontinuerlig.

(b) Antag att  $f$  och  $g$  är två funktioner i  $L^1(\mathbf{T})$  och att  $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ . Då är  $f(t) = g(t)$  i alla punkter  $t$  där båda funktionerna är kontinuerliga.

*Bevis.* (a) Eftersom  $\hat{f}(n) = 0$  för alla  $n$ , är  $F_r(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{int} = 0$  för alla  $t$  och  $0 \leq r < 1$ . Det följer därför av sats 3.8.1 att

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} F_r(t) = 0$$

i alla kontinuitetspunkterna  $t$  till  $f$ .

Påstående (b) följer av (a) om man betraktar differensen  $f - g$ . □

Beträffande rekonstruktionsmöjligheterna så visar sats 3.8.1 att det i princip alltid är möjligt att rekonstruera en funktion i kontinuitetspunkterna från funktionens fourierkoefficienter genom Abelsummation.

En tredje fråga som kan vara intressant i sammanhanget är:

3. Kan vi karakterisera bildmängden till  $\mathcal{F}$ , dvs. avgöra vilka följder som kan vara fourierkoefficienter?

Denna fråga har inte något enkelt svar. Vi får nöja oss med att meddela att bildrummet inte är lika med hela  $\mathbf{c}_0$ . Det finns med andra ord följder  $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  som går mot noll då  $n \rightarrow \pm\infty$  men som inte är fourierkoefficienter. Ett exempel på en trigonometrisk serie med koefficienter som går mot noll men som inte är en fourierserie är serien  $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-1} \sin nt$ .

## Övning

- 3.25 Funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och periodisk med period  $2\pi$ . Vidare är  $f'(t) = 2if(t + \pi)$  för alla  $t$ . Bestäm  $f$ .

### 3.10 Parsevals formel

Hittills har vi använt  $L^1$ -normen

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$$

som mått på storleken hos våra periodiska funktioner. Ett i flera avseenden bättre och i många tillämpningar mer naturligt mått får vi genom att istället använda integralen av kvadraten på funktionen. Sådana integraler kan ofta tolkas som energiuttryck. Låt exempelvis  $f(t)$  vara spänningen över resistansen  $1 \Omega$ ; då är  $\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$  den utvecklade energin under en period, och integralen  $\int_{\mathbf{T}} f(t)^2 dt$  är följaktligen lika med effekten.

Ibland är det således bättre att använda

$$\|f\|_2 = \left( \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

som mått på storleken av en periodisk funktion  $f$ ;  $\|f\|_2$  kallas för  $L^2$ -normen av  $f$ .

**Definition.** Rummet av alla integrerbara periodiska funktioner  $f$  med ändlig  $L^2$ -norm betecknas  $L^2(\mathbf{T})$ .

För  $L^2(\mathbf{T})$ -funktioner  $f$  och  $g$  kan vi skriva Cauchy–Schwarz olikhet för integraler (sats 2.1.5) på formen

$$\left| \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Genom att i denna olikhet speciellt välja  $g$  som den konstanta funktionen 1 och byta  $f$  mot  $|f|$  erhåller vi olikheten

$$\int_{\mathbf{T}} |f(t)| dt \leq \left( \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{T}} 1^2 dt \right)^{1/2} = \left( \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

dvs. för alla funktioner  $f \in L^2(\mathbf{T})$  är

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$

En periodisk funktion med ändlig  $L^2$ -norm har således automatiskt också ändlig  $L^1$ -norm, och detta betyder att  $L^2(\mathbf{T})$  är ett delrum till  $L^1(\mathbf{T})$ . Alla

funktioner i  $L^2(\mathbf{T})$  har därför en fourierserietveckling.<sup>1</sup>

En annan konsekvens av Cauchy–Schwarz olikhet är följande olikhet för  $L^2$ -normen:

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Genom att integrera identiteten

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)|^2 &= |f(t)|^2 + f(t)\overline{g(t)} + g(t)\overline{f(t)} + |g(t)|^2 \\ &= |f(t)|^2 + 2 \operatorname{Re} f(t)\overline{g(t)} + |g(t)|^2 \end{aligned}$$

samt utnyttja Cauchy–Schwarz olikhet erhåller man nämligen olikheten

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \int_{\mathbf{T}} (|f(t) + g(t)|)^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt + 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{T}} f(t)\overline{g(t)} dt + \int_{\mathbf{T}} |g(t)|^2 dt \\ &\leq \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt + 2 \left| \int_{\mathbf{T}} f(t)\overline{g(t)} dt \right| + \int_{\mathbf{T}} |g(t)|^2 dt \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2, \end{aligned}$$

och olikheten för  $L^2$ -normen erhålls nu efter kvadratrotutdragning.

Låt oss spinna vidare på energitemat och betrakta en reellvärd periodisk signal som är sammansatt av sinusoider på följande vis:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nt + \phi_n).$$

Vi ska jämföra signalens effekt med summan av de ingående komponenternas effekter. Eftersom

$$\int_{\mathbf{T}} A_0^2 dt = A_0^2 \quad \text{och} \quad \int_{\mathbf{T}} A_n^2 \sin^2(nt + \phi_n) dt = \frac{1}{2} A_n^2,$$

är summan av de ingående delarnas effekter lika med

$$A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2,$$

något som vi alltså ska jämföra med den sammansatta signalens effekt

$$\int_{\mathbf{T}} f(t)^2 dt.$$

<sup>1</sup>När  $L^1$  och  $L^2$ -rummen definieras med hjälp av Lebesgueintegralbegreppet blir  $L^2(\mathbf{T})$  ett äkta delrum till  $L^1(\mathbf{T})$ . Med vår ”naiva” definition av en integrerbar periodisk funktion som en periodisk funktion som är Riemannintegrerbar över intervallet  $[0, 2\pi]$ , är en integrerbar funktion på  $\mathbf{T}$  automatisk begränsad, och en begränsad funktion har förstås ändlig  $L^1(\mathbf{T})$ -norm och ändlig  $L^2(\mathbf{T})$ -norm. I den här boken sammanfaller därför rummen  $L^1(\mathbf{T})$  och  $L^2(\mathbf{T})$  men vi kommer inte att utnyttja detta i några bevis eftersom detta inte gäller generellt.

Överraskande nog – eller kanske inte(?) – är de två uttrycken lika. Det gäller med andra ord att

$$(3.10) \quad \int_{\mathbf{T}} f(t)^2 dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Formel (3.10) är ett specialfall av *Parsevals formel*, och vi ska ge ett matematiskt bevis för den i det här avsnittet. Men låt oss först se hur formeln ser ut om signalen  $f$  skrivs på trigonometrisk form som

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

där alltså

$$A_n \sin(nt + \phi_n) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

och  $A_0 = a_0/2$ . Genom sambandet  $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$  övergår då formel (3.10) i likheten

$$\int_{\mathbf{T}} f(t)^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

En ännu elegantare formulering får vi genom att skriva fourierserien på exponentialform, vilket är den version som ges i följande sats.

**Sats 3.10.1** (Parsevals formler). *För alla funktioner  $f$  och  $g$  i  $L^2(\mathbf{T})$  är*

$$(i) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2,$$

$$(ii) \quad \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

För att bevisa formlerna behöver vi två hjälpsatser. I den första är likheten i Parsevals formel (i) ersatt med olikheten  $\leq$ .

**Lemma 3.10.2** (Bessels olikhet). *För alla funktioner  $f \in L^2(\mathbf{T})$  är*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt.$$

*Bevis.* Låt  $N$  vara ett godtyckligt positivt heltal och betrakta integralen  $\int_{\mathbf{T}} |f(t) - S_N f(t)|^2 dt$ , där  $S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$  är den  $N$ :te partial-

summan i fourierserien till  $f$ . Eftersom integranden är icke-negativ är integralen givetvis icke-negativ. Å andra sidan är

$$\begin{aligned} |f(t) - S_N f(t)|^2 &= (f(t) - S_N f(t)) \overline{(f(t) - S_N f(t))} \\ &= \left( f(t) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} \right) \overline{\left( f(t) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{-int} \right)} \\ &= |f(t)|^2 - \sum_{n=-N}^N \overline{\hat{f}(n)} f(t) e^{-int} - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \overline{f(t) e^{-int}} \\ &\quad + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N \hat{f}(m) \overline{\hat{f}(n)} e^{i(m-n)t}. \end{aligned}$$

Genom att integrera denna likhet över  $\mathbf{T}$  och utnyttja definitionen av fourierkoefficient samt att  $\int_{\mathbf{T}} e^{int} dt = 0$  för  $n \neq 0$  och  $= 1$  för  $n = 0$  erhåller vi således olikheten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbf{T}} |f(t) - S_N f(t)|^2 dt \\ &= \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N \overline{\hat{f}(n)} \hat{f}(n) - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(n)} + \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \overline{\hat{f}(n)} \\ &= \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2, \end{aligned}$$

som visar att

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt.$$

Olikheten i lemmat följer nu genom att låta  $N$  gå mot oändligheten.  $\square$

**Lemma 3.10.3.** *Antag att  $f \in L^2(\mathbf{T})$  och sätt*

$$h(t) = \int_{\mathbf{T}} f(u+t) \overline{f(u)} du.$$

*Då är funktionen  $h$  periodisk och kontinuerlig, och  $\hat{h}(n) = |\hat{f}(n)|^2$  för alla  $n \in \mathbf{Z}$ .*

*Bevis.* Med vår traditionella beteckning för translät är  $f(u+t) = f_{-t}(u)$ , och eftersom alla translät till en given funktion har samma  $L^2$ -norm följer det av Cauchy-Schwarz olikhet att

$$|h(t)| = \left| \int_{\mathbf{T}} f_{-t}(u) \overline{f(u)} du \right| \leq \|f_{-t}\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2.$$



Funktionen  $h$  är således väldefinierad och begränsad, och den är uppenbarligen också periodisk med period  $2\pi$ .

Kontinuiteten visar vi genom att uppskatta differensen  $h(t) - h(t_0)$  med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet:

$$\begin{aligned} |h(t) - h(t_0)| &= \left| \int_{\mathbf{T}} f_{-t}(u) \overline{f(u)} du - \int_{\mathbf{T}} f_{-t_0}(u) \overline{f(u)} du \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{T}} (f_{-t}(u) - f_{-t_0}(u)) \overline{f(u)} du \right| \leq \|f_{-t} - f_{-t_0}\|_2 \|f\|_2 \\ &= \|f - f_{t-t_0}\|_2 \|f\|_2, \end{aligned}$$

där den sista likheten följer av att  $f - f_{t-t_0}$  är  $t$ -translatet till funktionen  $f_{-t} - f_{-t_0}$ .

För att visa att funktionen  $h$  är kontinuerlig i en godtycklig punkt  $t_0$ , dvs. att  $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = h(t_0)$ , räcker det tydligen på grund av ovanstående olikhet att visa att

$$(3.11) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|f - f_t\|_2 = 0.$$

Antag därför först att  $f$  är en funktion vars restriktion till intervallet  $[0, 2\pi]$  är en trappstegsfunktion. Då är differensen  $f - f_t$  också en trappstegsfunktion som är lika med noll på intervallet  $[0, 2\pi]$  utom i ett ändligt antal intervall av längd  $|t|$ . Differensen är vidare till beloppet begränsad av en konstant som inte beror av  $t$ . Följaktligen är  $\|f - f_t\|_2 \leq C|t|$  för någon konstant  $C$ , och detta medför förstås att (3.11) gäller för alla sådana funktioner  $f$ .

En godtycklig funktion  $f \in L^2(\mathbf{T})$  kan för givet tal  $\epsilon > 0$  approximeras med en funktion  $g$  vars restriktion till intervallet  $[0, 2\pi]$  är en trappstegsfunktion sådan att  $\|f - g\|_2 < \epsilon$ . Genom att använda triangelolikheten för  $L^2$ -normen på identiteten  $f - f_t = (f - g) + (g - g_t) + (g_t - f_t)$  erhåller vi olikheten

$$\begin{aligned} \|f - f_t\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|g - g_t\|_2 + \|g_t - f_t\|_2 = \|g - g_t\|_2 + 2\|f - g\|_2 \\ &< \|g - g_t\|_2 + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Eftersom påståendet (3.11) gäller för trappstegsfunktioner finns det ett tal  $\delta > 0$  sådant att  $\|g - g_t\|_2 < \epsilon$  om  $|t| < \delta$ , och detta medför att  $\|f - f_t\|_2 < 3\epsilon$  om  $|t| < \delta$ . Därmed är kontinuiteten bevisad.

Fourierkoefficienten  $\hat{h}(n)$  beräknar vi genom att använda definitionen och byta integrationsordning:

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \int_{\mathbf{T}} h(t) e^{-int} dt = \int_{\mathbf{T}} \left( \int_{\mathbf{T}} f(u+t) \overline{f(u)} du \right) e^{-int} dt \\ &= \int_{\mathbf{T}} \overline{f(u)} e^{inu} \left( \int_{\mathbf{T}} f(u+t) e^{-in(u+t)} dt \right) du \\ &= \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du \int_{\mathbf{T}} f(v) e^{-inv} dv = \overline{\hat{f}(n)} \hat{f}(n) = |\hat{f}(n)|^2. \quad \square \end{aligned}$$

*Bevis för Parsevals formel.* Antag att  $f \in L^2(\mathbf{T})$ . Eftersom funktionen  $h$  i föregående lemma är kontinuerlig med  $\hat{h}(n) = |\hat{f}(n)|^2$  och  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$  på grund av Bessels olikhet, följer det av sats 3.8.3 att

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 e^{int}$$

för alla  $t$ . För  $t = 0$  är därför speciellt

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = h(0) = \int_{\mathbf{T}} f(u) \overline{f(u)} du = \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt,$$

vilket är Parsevals formel (i).

För att bevisa den andra versionen (ii) utnyttjar vi följande identitet för komplexa tal  $z$  och  $w$ , en identitet som man lätt verifierar genom att expandera högerledet:

$$4z\bar{w} = |z + w|^2 - |z - w|^2 + i|z + iw|^2 - i|z - iw|^2.$$

Sätt nu  $z = f(t)$  och  $w = g(t)$  samt integrera över en period. I kombination med formel (i) leder detta till att

$$\begin{aligned} 4 \int_{\mathbf{T}} f(t) \overline{g(t)} dt &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left( |\hat{f}(n) + \hat{g}(n)|^2 - |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)|^2 + i|\hat{f}(n) + i\hat{g}(n)|^2 \right. \\ &\quad \left. - i|\hat{f}(n) - i\hat{g}(n)|^2 \right) = 4 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} \end{aligned}$$

där vi i den sista likheten utnyttjat samma identitet, nu med  $z = \hat{f}(n)$  och  $w = \hat{g}(n)$ .  $\square$

**EXEMPEL 3.10.1.** Låt  $f$  vara den periodiska utvidgningen av  $f(t) = t$  för  $|t| < \pi$ . Funktionen fourierkoefficienter beräknades i exempel 3.5.1:  $\hat{f}(0) = 0$  och  $\hat{f}(n) = (-1)^n/n$  för  $n \neq 0$ . Parsevals formel ger därför att

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

Det följer att  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .  $\square$

Eftersom en funktions fourierserie ofta ges på trigonometrisk form, speciellt om funktionen är reell, är det praktiskt med en trigonometrisk versionen av Parsevals formler.

**Sats 3.10.4** (Parsevals formler på trigonometrisk form). *Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner i  $L^2(\mathbf{T})$  med fourierserieutvecklingarna*

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

och

$$g(t) \sim \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt).$$

Då är

$$(i) \quad \int_{\mathbf{T}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbf{T}} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{4}a_0\bar{c}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\bar{c}_n + b_n\bar{d}_n).$$

*Bevis.* Sambandet mellan koefficienterna  $a_n$  och  $b_n$  och fourierkoefficienterna  $\hat{f}(n)$  är att  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$  och  $\hat{f}(-n) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$  för  $n \geq 1$ , medan  $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}a_0$ . Detta innebär att

$$\begin{aligned} |\hat{f}(0)|^2 &= \frac{1}{4}|a_0|^2 \quad \text{och} \\ |\hat{f}(n)|^2 + |\hat{f}(-n)|^2 &= \frac{1}{4}(a_n - ib_n)(\bar{a}_n + i\bar{b}_n) + \frac{1}{4}(a_n + ib_n)(\bar{a}_n - i\bar{b}_n) \\ &= \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2), \end{aligned}$$

vilket insatt i formel (i) i sats 3.10.1 ger den första formeln i satsen ovan. Den andra formeln följer på liknande sätt.  $\square$

Vi har tidigare nämnt att en fourierserie inte behöver vara konvergent överallt, och vi ska återkomma till frågan om punktvis konvergens i nästa avsnitt, ty ur strikt matematisk synvinkel är det naturligtvis intressant att veta om en given fourierserie konvergerar i en given punkt. Ur tillämpnings-synpunkt är det emellertid ofta inte så viktigt att en fourierserie konvergerar punktvis och vad den har för värden i enstaka punkter. I många fall spelar nämligen en funktion  $f$  inte en roll genom sina enskilda funktionsvärden utan genom att den ger upphov till en s. k. linjär funktional av typen

$$L_f(g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

och därigenom associerar talvärden  $L_f(g)$  till varje funktion  $g$  i någon lämpligt vald funktionsklass. Jämför med diskussionen i kapitel 2.5. Det intressanta konvergensbegreppet för en följd av funktioner  $(f_n)_1^\infty$  blir nu om  $L_{f_n}(g)$  konvergerar mot  $L_f(g)$  för alla funktioner  $g$  i den aktuella klassen.

Om ovanstående låter lite kryptiskt, så ska vi nu ta oss an ett konkret fall. Vi börjar med följande sats, som visar att för varje periodisk  $L^2$ -funktion  $f$  konvergerar partialsummorna  $S_n f$  mot  $f$  om man mäter avståndet mellan  $S_n f$  och  $f$  med  $L^2$ -normen  $\|\cdot\|_2$ . Man uttrycker detta i ord genom att säga att partialsummorna  $S_n f$  konvergerar mot funktionen  $f$  i kvadratisk medel (eller i  $L^2$ -mening) då  $n \rightarrow \infty$ .

**Sats 3.10.5** ( $L^2$ -konvergens). För alla funktioner  $f \in L^2(\mathbf{T})$  gäller att

$$\|f - S_n f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

*Bevis.* Sätt  $g = f - S_n f$ . Eftersom  $\widehat{S_n f}(k) = \hat{f}(k)$  för  $|k| \leq n$  och  $\widehat{S_n f}(k) = 0$  för  $|k| > n$ , är  $\hat{g}(k) = 0$  för  $|k| \leq n$  och  $\hat{g}(k) = \hat{f}(k)$  för  $|k| > n$ . Det följer därför av Parsevals formel (i) att

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \|g\|_2^2 = \sum_{|k|>n} |\hat{f}(k)|^2,$$

och serien i högerledet går mot noll då  $n \rightarrow \infty$  eftersom serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|^2$  är konvergent.  $\square$

**Sats 3.10.6.** För alla funktioner  $f$  och  $g$  i  $L^2(\mathbf{T})$  är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{T}} S_n f(t) g(t) dt = \int_{\mathbf{T}} f(t) g(t) dt.$$

*Bevis.* Påståendet följer av föregående sats med hjälp av Cauchy-Schwarz olikhet för integraler som ger att

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{T}} S_n f(t) g(t) dt - \int_{\mathbf{T}} f(t) g(t) dt \right| &= \left| \int_{\mathbf{T}} (S_n f(t) - f(t)) g(t) dt \right| \\ &\leq \|S_n f - f\|_2 \cdot \|g\|_2. \end{aligned} \quad \square$$

## Övningar

3.26 Använd fourierserierna i övning 3.23 för att beräkna följande summor:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

### 3.11 Punktvis konvergens

För att med hjälp av satserna i avsnitt 3.8 beräkna summan av fourierserien till en funktion måste vi först visa att fourierserien är konvergent. Ett tillräckligt villkor som garanterar detta är enligt sats 3.7.4 att funktionen är två gånger kontinuerligt deriverbar överallt. Detta är ett globalt villkor på funktionen, men huruvida en funktions fourierserie är konvergent eller ej i en punkt  $t_0$  beror, som vi ska se längre fram, enbart på funktionens uppförande i en godtyckligt liten omgivning av punkten  $t_0$ .

Ett enkelt *lokalt* villkor som garanterar att fourierserien konvergerar i punkten  $t_0$  är att funktionen är deriverbar i punkten, och villkoret på deriverbarhet kan försvagas något så att existens av vänster- och högerderivata är tillräckligt.

**Definition.** I en punkt  $t_0$  där högergränsvärdet

$$f(t_0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t_0 + s)$$

existerar kallas gränsvärdet

$$f'_+(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + s) - f(t_0)}{s}$$

för den *generaliserade högerderivatan*, förutsatt att det existerar. Och i en punkt där vänstergränsvärdet

$$f(t_0^-) = \lim_{s \rightarrow 0^-} f(t_0 + s)$$

existerar kallas gränsvärdet

$$f'_-(t_0) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{f(t_0 + s) - f(t_0^-)}{s}$$

för den *generaliserade vänsterderivatan*, förutsatt att det existerar.

I punkter  $t_0$  där funktionen är kontinuerlig är förstås  $f(t_0^+) = f(t_0^-) = f(t_0)$ , och om den "vanliga" vänsterderivatan existerar så är den lika med  $f'_-(t_0)$ , och motsvarande gäller för den "vanliga" högerderivatan. Speciellt existerar såväl  $f'_+(t_0)$  som  $f'_-(t_0)$  i alla punkter  $t_0$  där funktionen  $f$  är deriverbar.

Utrustade med dessa definitioner kan vi nu formulera följande konvergenskriterium.

**Sats 3.11.1.** Låt  $f$  vara en funktion i  $L^1(\mathbf{T})$ . I varje kontinuitets- eller språngdiskontinuitetspunkt  $t$  där de båda generaliserade ensidiga derivatorna  $f'_-(t)$  och  $f'_+(t)$  existerar, är funktionens fourierserie konvergent med summan

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

*Bevis.* Sätt  $A = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$  och betrakta funktionen

$$g(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s}$$

för  $0 < s \leq \pi$ . Antagandet att funktionen  $f$  har generaliserade ensidiga derivator i punkten  $t$  medför att gränsvärdet

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(t^+)}{s} - \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t-s) - f(t^-)}{-s} = f'_+(t) - f'_-(t) \end{aligned}$$

existerar. Följaktligen existerar också gränsvärdet

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} g(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{\sin \frac{1}{2}s} \cdot \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{s} = 2(f'_+(t) - f'_-(t)).$$

Med rätt definition av  $g(0)$  är således funktionen  $g$  kontinuerlig i origo, vilket medför att den är integrerbar på intervallet  $[0, \pi]$ . Det följer därför av Riemann–Lebesgues lemma att

$$(3.12) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(s) \sin(N + \frac{1}{2})s \, ds = 0.$$

Vi ska härnäst härleda en integralformel för partialsumman

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

till  $f$ :s fourierserie och påminner då först om Dirichletpolynomet

$$(3.13) \quad D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int}$$

som vi studerade i exempel 3.2.2 och vars summa vi där beräknade till

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

Dirichletpolynomen har egenskaper som påminner om Poissonkärnan. Genom att integrera summan i (3.13) termvis får vi med en gång att

$$\int_{\mathbf{T}} D_N(t) dt = 1.$$

På intervallet  $[\delta, \pi]$ , där  $0 < \delta < \pi$ , är vidare funktionen  $1/\sin \frac{1}{2}t$  kontinuerlig, så därför följer det direkt av Riemann–Lebesgues lemma att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} D_N(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}t} \sin(N + \frac{1}{2})t dt = 0$$

om  $0 < \delta < \pi$ .

Vi skriver nu om partialsumman  $S_N f(t)$  på följande vis:

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{n=-N}^N \left( \int_{\mathbf{T}} f(u) e^{-inu} du \right) e^{int} = \int_{\mathbf{T}} \sum_{n=-N}^N f(u) e^{in(t-u)} du \\ &= \int_{\mathbf{T}} f(u) D_N(t-u) du = \int_{\mathbf{T}} f(t-s) D_N(s) ds, \end{aligned}$$

där den sista likheten följer efter variabelbytet  $s = t - u$ .

För att visa att partialsummorna  $S_N f(t)$  konvergerar mot  $f(t)$  är det nu frestande att försöka kopiera beviset för sats 3.8.1 om Abelsummation, men det fungerar inte av det skälet att Dirichletpolynomen till skillnad från Poissonkärnan inte är positiva. För att fourierserien skall konvergera punktvis krävs det därför ytterligare villkor på funktionen  $f$  utöver att den tillhör  $L^1(\mathbf{T})$ .

Under antagandet att de generaliserade derivatorna existerar i punkten  $t$  och med  $A = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$  och funktionen  $g$  definierad som tidigare fortsätter vi nu på följande sätt:

$$\begin{aligned} S_N f(t) - A &= \int_{\mathbf{T}} f(t-s) D_N(s) ds - A \int_{\mathbf{T}} D_N(s) ds \\ &= \int_{\mathbf{T}} (f(t-s) - A) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (f(t-s) - A) D_N(s) ds + \int_0^{\pi} (f(t-s) - A) D_N(s) ds \right). \end{aligned}$$

Vi gör variabelbytet  $u = -s$  i integralen över  $[-\pi, 0]$  samt utnyttjar att

Dirichletpolynomet  $D_N$  är en jämn funktion. Detta resulterar i att

$$\begin{aligned} S_N f(t) - A &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi (f(t+u) - A) D_N(u) du + \int_0^\pi (f(t-s) - A) D_N(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(t+s) + f(t-s) - 2A) D_N(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2A}{\sin \frac{1}{2}s} \sin(N + \frac{1}{2})s ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(s) \sin(N + \frac{1}{2})s ds. \end{aligned}$$

Gränsvärdet (3.12) visar att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(t) - A = 0,$$

och därmed är beviset klart.  $\square$

EXEMPEL 3.11.1. I exempel 3.5.1 bestämde vi fourierserien till den periodiska utvidgningen av  $f(t) = t$ ,  $|t| < \pi$ , och fann att

$$f(t) \sim i \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n} e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig och deriverbar i det öppna intervallet  $]-\pi, \pi[$ . Det följer därför av sats 3.11.1 att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nt = t$$

för  $-\pi < t < \pi$ , samt att fourierseriens summa är lika med 0 för  $t = \pm\pi$  (vilket för övrigt är trivialt eftersom alla sinustermerna är lika med 0 i dessa punkter).  $\square$

EXEMPEL 3.11.2. Betrakta den  $2\pi$ -periodiska funktion  $f$  som definieras av att

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } -\pi < t < 0, \\ t & \text{om } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Funktionen  $f$  är kontinuerlig överallt i det öppna intervallet  $]-\pi, \pi[$  och deriverbar överallt i samma intervall utom i punkten 0, där dock vänster- och högerderivatorna existerar (och är lika med 0 resp. 1). I diskontinuitetspunkten  $\pi$  existerar de generaliserade ensidiga derivatorna. Enligt sats 3.11.1 är därför fourierserien konvergent med  $f(t)$  som summa för  $-\pi < t < \pi$  och med  $\frac{1}{2}(f(\pi^-) + f(\pi^+)) = \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{1}{2}\pi$  som summa för  $t = \pi$ .



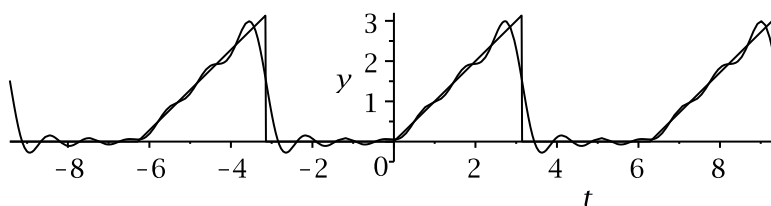
Låt oss beräkna fourierserien på trigonometrisk form. Seriens koefficienter är

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos t \, dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{om } n = 0, \\ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} & \text{om } n \geq 1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin t \, dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

och vi kan nu dra slutsatsen att

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ udda}} \frac{\cos nt}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt = \begin{cases} 0 & \text{för } -\pi < t < 0, \\ t & \text{för } 0 \leq t < \pi \\ \frac{1}{2}\pi & \text{för } t = \pi. \end{cases}$$



**Figur 3.10.** Funktionen  $f$  i exempel 3.11.2 och partialsumman  $S_6 f(t)$ . □

Huruvida en fourierserie konvergerar i en punkt beror enbart på funktionens uppförande i en godtyckligt liten omgivning av punkten. Detta är innebörden av följande sats.

**Sats 3.11.2** (Riemanns lokaliseringsprincip). (a) Låt  $f \in L^1(\mathbf{T})$  och antag att  $f(t) = 0$  för  $|t - t_0| < \delta$ , där  $\delta$  är ett godtyckligt litet positivt tal. Då konvergerar funktionens fourierserie mot 0 i punkten  $t_0$ .

(b) Låt  $f, g \in L^1(\mathbf{T})$  och antag att  $f(t) = g(t)$  för alla  $t$  i någon öppen omgivning av  $t_0$ . Då är antingen fourierserierna till  $f$  och  $g$  båda konvergenta i punkten  $t_0$  med samma summa, eller också är båda serierna divergenta.

*Bevis.* (a) är en omedelbar konsekvens av sats 3.11.1, och (b) följer genom att tillämpa (a) på differensen  $f - g$ , eftersom det för partialsummorna gäller att  $S_n f(t) = S_n(f - g)(t) + S_n g(t)$  och  $S_n(f - g)(t_0) \rightarrow 0$  då  $n \rightarrow \infty$ . □

Lokaliseringsprincipen är onekligen överraskande, ty genom att ändra en funktion utanför en godtyckligt liten omgivning av en punkt kan vi förändra samtliga koefficienter i fourierserien, men detta påverkar alltså inte fourierseriens summa i punkten.

## Övningar

3.27 Funktionen  $f$  är periodisk med period  $2\pi$  och  $f(t) = e^t$  för  $0 < t \leq 2\pi$ .

a) Bestäm funktionens fourierserie, avgör var den är konvergent samt vad den har för summa.

b) Beräkna summan  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

3.28  $\alpha$  är ett reellt tal som inte är ett heltal. Sätt  $f(t) = e^{i\alpha t}$  för  $-\pi < t \leq \pi$  och utvidga  $f$  till en  $2\pi$ -periodisk funktion. Visa följande två formler genom att studera funktionens fourierserie för  $t = 0$  och  $t = \pi$ :

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{och} \quad \pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Om man sätter  $x = \alpha\pi$ , så kan formlerna också skrivas på formen

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n x}{x^2 - n^2\pi^2} \quad \text{och} \quad \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

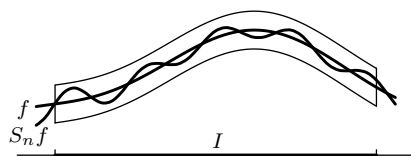
Jämför detta med partialbråksutveckling för rationella funktioner!

3.29 Använd föregående övning för att för reella tal  $\alpha$  som inte är heltal beräkna summan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n - \alpha)^2}.$$

## 3.12 Gibbs fenomen

Om funktionen  $f \in L^1(\mathbf{T})$  är kontinuerlig och har vänster- och högerderivator i alla punkter i ett slutet intervall  $I$ , så följer det av sats 3.11.1 att fourierserien är konvergent för alla punkter i intervallet. Konvergensens kan vidare visas vara likformig, vilket innebär att det för varje givet  $\epsilon > 0$  finns ett  $N$  så att fourierseriens partialsummor  $S_n f(t)$  satisfierar olikheten  $|S_n f(t) - f(t)| < \epsilon$  för alla  $t \in I$  och alla  $n \geq N$ . Geometriskt betyder detta att punkterna  $(t, S_n f(t))$  ligger i en remsa av bredd  $\epsilon$  runt grafen  $y = f(t)$  för  $t \in I$  och  $n \geq N$ . Se figur 3.11.



**Figur 3.11.** Fourierserien konvergerar likformigt mot funktionen på slutna intervall där funktionen är kontinuerlig och har vänster- och högerderivator.

Om funktionen däremot har en språngdiskontinuitet i punkten  $t_0 \in I$  så att exempelvis  $f(t_0^+) > f(t_0^-)$ , så kan omöjligtvis grafen  $y = S_n f(t)$  till partialsumman ligga i ett sådant band, eftersom partialsummorna är kontinuerliga funktioner. Vad man däremot skulle kunna förvänta sig är att partialsummornas grafer ska konvergera mot en kurva, som i en omgivning till vänster och till höger om diskontinuitetspunkten  $t_0$  sammanfaller med funktionskurvan  $y = f(t)$  och för  $t = t_0$  består av en vertikal linje mellan punkterna  $(t_0, f(t_0^-))$  och  $(t_0, f(t_0^+))$ . Så är emellertid inte fallet utan för  $t = t_0$  får man ett vertikalt segment av en längd som är ca 18 % längre än  $|f(t_0^+) - f(t_0^-)|$ .

Fenomenet kallas *Gibbs fenomen*, och vi skall härleda det i det mest renodlade fallet, nämligen då  $f$  är den  $2\pi$ -periodiska fyrkantsvågfunktion som definieras av att  $f(t) = 1$  för  $0 < t < \pi$ ,  $f(t) = -1$  för  $-\pi < t < 0$ , och  $f(0) = 0$ . Eftersom funktionen är udda, har den en sinusserie med koefficienter

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nt \, dt = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

som är noll för jämna  $n$ . Det följer av sats 3.11.1 att fourierserien är konvergent och att

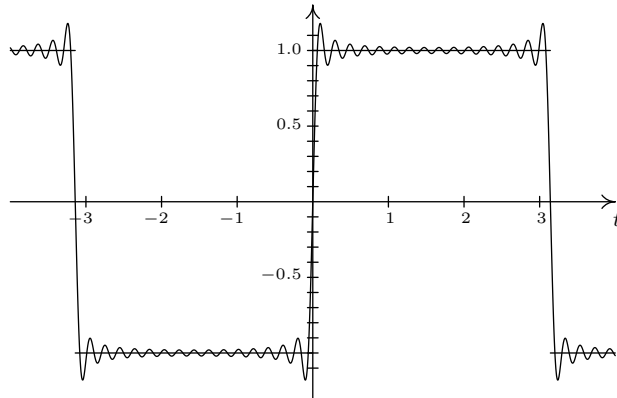
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

för  $-\pi < t < \pi$ .

Betrakta nu seriens partialsummor

$$S_{2N+1}f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$$

på intervallet  $]0, \pi[$ . Vi vet att  $S_{2N+1}f(t) \rightarrow 1$  då  $N \rightarrow \infty$ , men om vi ritar graferna till  $S_{2N+1}f$  kommer vi att upptäcka ett märkligt beteende.  $S_{2N+1}f(t)$  har ett maximum i en punkt  $t_N > 0$  nära 0, och  $t_N$  går mot 0 då  $N$  växer, men maximivärdet närmar sig inte 1 utan förblir istället större än 1.17. Jämför figur 3.12.



**Figur 3.12.** Gibbs fenomen: Fyrkantsvågen  $f(t)$  och partialsumman  $S_{31}f(t)$ .

Låt oss analysera situationen i detalj. Derivatans till  $S_{2N+1}f$  kan beräknas på följande sätt:

$$\begin{aligned} (S_{2N+1}f)'(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \cos(2n+1)t = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^N e^{i(2n+1)t} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \left( e^{it} \frac{e^{i(2N+2)t} - 1}{e^{i2t} - 1} \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \frac{e^{i(2N+2)t} - 1}{e^{it} - e^{-it}} \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{Re} \frac{i - ie^{i(2N+2)t}}{2 \sin t} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(2N+2)t}{\sin t}. \end{aligned}$$

Det första nollstället i intervallet  $]0, \pi[$  till derivatan  $(S_{2N+1}f)'$  ligger i punkten  $t_N = \pi/(2N+2)$ . Genom att betrakta derivatans tecken på ömse sidor om punkten drar vi slutsatsen att  $t_N$  är en maximipunkt. För att beräkna maximivärdet noterar vi först att  $S_{2N+1}f(0) = 0$ , varav följer att

$$(3.14) \quad S_{2N+1}f(t_N) = \int_0^{t_N} (S_{2N+1}f)'(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin(2N+2)t}{\sin t} dt.$$

Vi vill undersöka gränsvärdet av  $S_{2N+1}f(t_N)$  då  $N \rightarrow \infty$ . Eftersom integralen i (3.14) är en smula komplicerad på grund av nämnaren, approximerar vi den med den enklare integralen

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin(2N+2)t}{t} dt = \quad [\text{sätt } u = (2N+2)t] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = I. \end{aligned}$$

Integralerna  $I_N$  har med andra ord det konstanta värdet  $I$ , och en numerisk beräkning ger vid handen att  $I \approx 1.179$ .

Härnäst noterar vi att

$$S_{2N+1}f(t_N) - I = \frac{2}{\pi} \int_0^{t_N} \left( \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin(2N+2)t \, dt.$$

Funktionen

$$g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t}$$

går mot 0 då  $t \rightarrow 0$ , så dess absoluta värde är därför säkert mindre än 1 på intervallet  $[0, t_N]$ , bara  $N$  är tillräckligt stort. Slutsatsen blir att

$$|S_{2N+1}f(t_N) - I| \leq \frac{2}{\pi} \cdot t_N = \frac{1}{N+1}.$$

Följaktligen konvergerar  $S_{2N+1}f(t_N)$  mot  $I$  då  $N \rightarrow \infty$ .

Eftersom funktionen  $S_{2N+1}f$  är udda, har den ett minimum i punkten  $-t_N$ , och minimivärdet är approximativt lika med  $-1.179$  för stora  $N$ .

Fastän funktionen  $f$  har ett språng i origo som är lika med 2 enheter, kommer således partialsummorna  $S_{2N+1}f(t)$  i en omgivning av origo att approximera ett vertikalt segment av ungefärlig längd 2.358 då  $N$  går mot oändligheten. Samma fenomen inträffar vid varje sprängdiskontinuitet.

### 3.13 Formler för godtycklig periodlängd

Fourierserieutvecklingen till en periodisk funktion med godtycklig period kan man få genom att skala om funktionen så att perioden blir  $2\pi$ . För framtida bruk ska vi nu beskriva de formler som man då erhåller.

Antag att funktionen  $f$  är periodisk med periodlängd  $P$ , dvs. att

$$f(t+P) = f(t) \quad \text{för alla } t \in \mathbf{R},$$

och sätt  $\Omega = 2\pi/P$ , funktionens *grundvinkelfrekvens*. Definiera funktionen  $g$  genom att sätta

$$g(u) = f(u/\Omega);$$

då är  $g(u+2\pi) = f(u/\Omega + 2\pi/\Omega) = f(u/\Omega + P) = f(u/\Omega) = g(u)$ , dvs. funktionen  $g$  är  $2\pi$ -periodisk och har en fourierserieutveckling på formen

$$f(u/\Omega) = g(u) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inu}$$

med

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) e^{-inu} \, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u/\Omega) e^{-inu} \, du \\ &= \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-in\Omega t} \, dt, \end{aligned}$$

där vi förstas gjort variabelbytet  $t = u/\Omega$  för att erhålla den sistnämnda integralen. Samma variabelbyte i serieutvecklingen av  $g$  ger att

$$f(t) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{in\Omega t},$$

vilket är den sökta fourierserieutvecklingen av  $f$ .

Motsvarande kan förstas göras för den trigonometriska varianten av fourierserieutvecklingen, vilket resulterar i följande formler:

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \cos n\Omega t dt \quad \text{och} \quad b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \sin n\Omega t dt.$$

För  $P$ -periodiska  $L^2$ -funktioner får slutligen Parsevals formel följande utseende:

$$\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

## Kapitel 4

# Tillämpningar på fourierserien

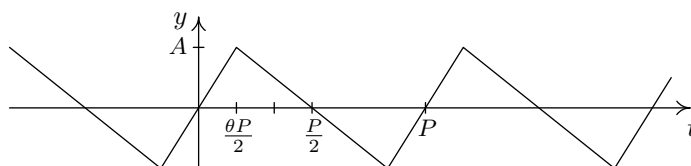
### 4.1 Toner

I inledningskapitlet introducerade vi fourierserien genom att diskutera toner; en ton med tonhöjden  $\nu$  Hz modellerades som en periodisk funktion  $f$  med en fourierserieutveckling av typen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi\nu nt + \phi_n)$$

på amplitud-fasvinkelform, och de ingående sinusoiderna  $A_n \sin(2\pi\nu nt + \phi_n)$  kallades deltoner.

Som exempel ska vi nu analysera en ton  $f(t)$  med frekvens  $\nu$ , amplitud  $A$  och sågtandsform enligt figur 4.1.



**Figur 4.1.** Sågtandsformad vågfunktion  $f$

Funktionen  $f$  är udda och periodisk med period  $P = 1/\nu$  och antar maximivärdet  $A$  för  $t = \theta P/2$ , där  $0 < \theta < 1$ . På intervallet  $[0, P/2]$  är därför

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2A\nu}{\theta}t & \text{för } 0 \leq t \leq \frac{\theta P}{2} \\ \frac{2A\nu}{1-\theta}\left(\frac{P}{2} - t\right) & \text{för } \frac{\theta P}{2} \leq t \leq \frac{P}{2}. \end{cases}$$

På trigonometrisk form har funktionen  $f$  fourierserietvecklingen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi\nu nt,$$

där

$$b_n = \frac{4}{P} \int_0^{P/2} f(t) \sin 2\pi\nu nt \, dt.$$

Variabelbytet  $x = 2\pi\nu t$  resulterar i formeln

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x/2\pi\nu) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2A}{\theta\pi} \left( \int_0^{\theta\pi} \frac{x}{\pi} \sin nx \, dx + \frac{\theta}{(1-\theta)} \int_{\theta\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin nx \, dx \right), \end{aligned}$$

och efter partiell integration fås

$$b_n = \frac{2A}{\theta(1-\theta)\pi^2} \cdot \frac{\sin n\theta\pi}{n^2}.$$

Absolutbeloppet av kvoten  $b_n/b_1$  mellan amplituden  $b_n$  hos övertonen med frekvens  $n\nu$  och amplituden  $b_1$  hos grundtonen ger ett mått på den relativa tonstyrkan hos övertonen. I föreliggande fall är

$$\frac{b_n}{b_1} = \frac{\sin n\theta\pi}{\sin \theta\pi} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Om  $\theta = 1/N$ , där  $N$  är ett heltal, så är  $b_{kN} = 0$  för alla  $k$ , vilket innebär att det inte finns några övertoner med frekvenser som är heltalsmultipler av  $N\nu$ .

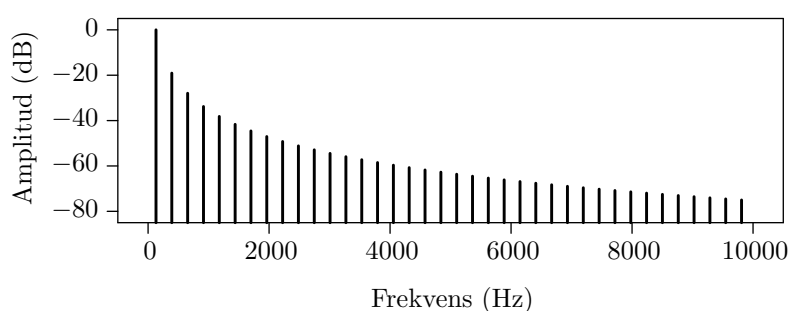
Låt oss nu speciellt analysera fallet  $\theta = 1/2$ . Då är alltså  $b_n = 0$  för alla jämna tal  $n$  medan  $|b_n/b_1| = 1/n^2$  för udda  $n$ . Om grundfrekvensen  $\nu$  hos sågtandstonen är lika med frekvensen hos tonen lilla c som är 130.8 Hz, får de nio första deltonerna frekvenser och relativ styrka  $b_n/b_1$  enligt tabell 4.1, där vi för varje delton också angivet motsvarande ton i tolvtonsskalan.<sup>1</sup> Sågtandstonens spektrum visas i figur 4.2. Observera att amplitudskalan är logaritmisk.

<sup>1</sup>Intervallt mellan en ton och tonen med dubblad frekvens kallas en *oktav*. I västerländsk musik delas oktaven i 12 (logaritmiskt) lika stora halvtonsteg, vilket betyder att varje halvtonsteg multiplicerar frekvensen med  $2^{1/12} = 1.0595$ . Det går exempelvis 5 halvtonsteg mellan tonerna C och F och 7 halvtonsteg mellan tonerna C och G inom en och samma oktav, vilket innebär att tonerna F och G har frekvenser som är  $2^{5/12} = 1.3348$  resp.  $2^{7/12} = 1.4983$  gånger frekvensen hos C. Tonstegsintervall av samma storlek som intervallen C–F resp. C–G kallas kvart resp. kvint. Notera att de rationella talen  $4/3$  resp.  $3/2$  är mycket bra approximationer till  $2^{5/12}$  resp.  $2^{7/12}$  vilket förklarar varför kvarter och kvinter klingar harmoniskt. Vid s. k. ren stämning stämmer man för övrigt musikinstrumenten så att kvarts- och kvintintervallen blir exakt  $4/3$  och  $3/2$ .



Tabell 4.1. Deltoner till sågtandstonen för  $\theta = 1/2$ .

Delton nr $n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frekvens, Hz	131	262	392	523	654	785	916	1047	1177
Tonläge	c	c <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	e <sup>2</sup>	g <sup>2</sup>	a <sup>#2</sup>	c <sup>3</sup>	d <sup>3</sup>
Relativ styrka	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{25}$	0	$\frac{1}{49}$	0	$\frac{1}{81}$

Figur 4.2. Sågtandstonens spektrum då  $\theta = 1/2$ .

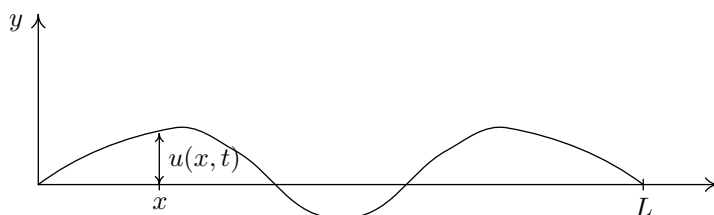
## 4.2 Svängande strängen

I det förra avsnittet undersökte vi toner som fysikaliskt sett är periodiska mekaniska vågor som i form av förtätningar och förtunningar i luften når örat. Man kan som bekant åstadkomma sådana vågor på olika sätt, genom att knäppa, gnida eller slå på en sträng som i stränginstrument eller genom att sätta en luftpelare i rörelse som i blåsinstrument. Den alstrade tonens tonhöjd, tonstyrka och klangfärg beror av geometriska och fysikaliska egenskaper hos instrumentet. Vi ska analysera detta för det enkla fallet att vårt instrument består av en enda sträng.

Betrakta för den skull en sträng av längd  $L$  som är fastspänd i sina ändpunkter som vi förlägger till punkterna 0 och  $L$  på  $x$ -axeln. Om vi sätter strängen i rörelse i  $xy$ -planet, t. ex. genom att lyfta den och sedan släppa den (som på en gitarr) eller genom att slå på den (som hammaren i ett piano),

---

Omfånget av det hörbara frekvensområdet motsvarar ca 10 oktaver, så det behövs ca 120 namn för att notera de av tolvtonskalan genererade tonerna. Det gör man genom att först ge de olika oktaverna namn såsom stora oktaven, lilla (eller ostrukna) oktaven, ettstrukna, tvåstrukna oktaven, osv. Sedan får tonerna inom en oktav oktavens namn som tillägg. Exempelvis kallas tonen C i stora oktaven "stora C" och betecknas C, tonen C i lilla oktaven kallas "lilla C" och betecknas c, tonen C i ettstrukna oktaven kallas "ettstrukna c" och betecknas c<sup>1</sup>, osv. På ett piano svarar C-tangenten mitt på pianot mot ettstrukna c. Tonernas frekvenser fixeras av att a<sup>1</sup>, ettstrukna a, har frekvensen 440 hertz.



**Figur 4.3.** Svängande sträng

så kommer den att svänga periodiskt till dess att rörelsen så småningom dämpas av friktionen mot luften och av gravitationen.

Om vi bortser från dämpningen och låter  $u(x, t)$  beteckna avvikelserna från viloläget i punkten  $x$  vid tidpunkten  $t$ , så följer det från Newtons rörelselagar att rörelsen för  $0 < x < L$  och  $t > 0$  beskrivs av den partiella differentialekvationen

$$(pd) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Här är  $\rho$  strängens densitet (massa per längdenhet) och  $T$  strängens tension som är ett mått på strängens motståndskraft mot förändring och som ökar med ökande spänning hos strängen.

Eftersom strängen är fastspänd i sina ändpunkter har vi också två randvillkor i form av

$$(rv) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{för } t \geq 0.$$

Strängens rörelse bestäms slutligen också av begynnelsevillkoren

$$(bv) \quad \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < L; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

där  $u_0(x)$  beskriver strängens läge och  $v_0(x)$  är den hastighet vid punkten  $x$  som strängen har i  $y$ -riktningen i startögonblicket  $t = 0$ .

Vi ska nu konstruera en lösning till differentialekvationen som satisfierar givna rand- och begynnelsevillkor och konstaterar då först att funktionerna

$$u_n(x, t) = b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

satisfierar de homogena randvillkoren (rv) för alla positiva heltal  $n$  och godtyckligt val av funktionerna  $b_n(t)$ . En godtycklig summa av sådana funktioner satisfierar också randvillkoren, så därför ska vi undersöka om vi inte kan

hitta en lösning till vårt problem i form av en lämplig oändlig summa av funktioner  $u_n(x, t)$ . För att förenkla beteckningarna sätter vi

$$\Omega = \pi/L$$

och ansätter följaktligen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\Omega x.$$

Låt oss nu anta att summan är konvergent för  $0 \leq x \leq L$  och  $t \geq 0$ , att funktionerna  $b_n$  är minst två gånger deriverbara samt att vi kan bestämma de partiella derivatorna till funktionen  $u$  genom att derivera innanför summatecknet – att så verkligen är fallet kommer vi att verifiera i efterhand. Då blir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin n\Omega x$$

och

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \Omega^2 b_n(t) \sin n\Omega x.$$

Genom att jämföra koefficienterna för  $\sin n\Omega x$  ser vi att vår funktion  $u$  satisfierar differentialekvationen (pd) om

$$\rho b_n''(t) = -n^2 \Omega^2 T b_n(t)$$

för alla  $n$ . Detta är en ordinär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter vars karakteristiska ekvation har rötterna  $\pm nc\Omega i$ , där vi satt

$$c = \sqrt{T/\rho}.$$

Differentialekvationens allmänna lösning har således formen

$$b_n(t) = A_n \cos nc\Omega t + B_n \sin nc\Omega t.$$

Förutsatt att våra förutsättningar angående deriveringen är uppfyllda satisfierar därför funktionen

$$(4.1) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nc\Omega t + B_n \sin nc\Omega t) \sin n\Omega x$$

såväl differentialekvation som randvillkor, men det återstår förstås att uppfylla begynnelsevillkoren som kräver att

$$(4.2) \quad \begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\Omega x = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc\Omega B_n \sin n\Omega x = v_0(x). \end{cases}$$

För att bestämma koefficienterna  $A_n$  och  $B_n$  så att detta gäller utvidgar vi funktionerna  $u_0(x)$  och  $v_0(x)$  till udda funktioner på intervallet  $[-L, L]$  och sedan till periodiska funktioner med period  $2L$ . De utvidgade funktionernas fourierserier kommer då på trigonometrisk form att vara rena sinusserier, och koefficienterna i dessa serier bestämmer koefficienterna  $A_n$  och  $B_n$ , närmare bestämt som

$$(4.3) \quad \begin{cases} A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin n\Omega x \, dx \\ nc\Omega B_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin n\Omega x \, dx. \end{cases}$$

Om det finns en lösning  $u(x, t)$  som uppfyller våra förutsättningar om deriverbarhet, så har den således formen (4.1) med koefficienter som ges av ekvationerna (4.3).

Vår härledning bygger på antagandet att det finns en deriverbar lösning med en fourierserieutveckling som kan deriveras under summatecknet. I efterhand kan vi verifiera detta genom att visa att den erhållna lösningen verkligen har dessa egenskaper förutsatt att funktionerna  $u_0$  och  $v_0$  i begynnelsevillkoret är tillräckligt reguljära.

**Sats 4.2.1.** *Antag att de periodiska, udda utvidgningarna av funktionerna  $u_0$  och  $v_0$  är oändligt deriverbara. Då är den av serien (4.1) definierade funktionen  $u(x, t)$  med konstanter  $A_n$  och  $B_n$  bestämda av ekvation (4.3) oändligt deriverbar och en lösning till differentialekvationen (pd) som uppfyller randvillkoret (rv) och begynnelsevillkoret (bv).*

*Bevis.* Det följer av sats 3.7.4 att koefficienterna  $A_n$  och  $B_n$  för varje naturligt tal  $p$  uppfyller olikheter av typen  $|A_n| \leq Kn^{-p}$  och  $|B_n| \leq Kn^{-p}$  där  $K$  är en konstant. Serien (4.1) liksom de serier som fås genom att derivera partiellt under summatecknet ett godtyckligt antal gånger är därför absolutkonvergenta, och man kan genom att resonera som i sats 2.2.4 visa att funktionen  $u$  har partiella derivator av varje ordning samt att derivatorna erhålls genom derivering under summatecknet. Vidare konvergerar enligt sats 3.8.2 fourierserierna i (4.2) med  $u_0(x)$  resp.  $v_0(x)$  som summa. Funktionen  $u(x, t)$  satisfierar därför såväl differentialekvation som begynnelsevillkor.  $\square$

*Anmärkning.* Man kan också visa att lösningen i satsen ovan är entydigt bestämd.

Det följer omedelbart av lösningsformeln att  $u(x, t + 2\pi/c\Omega) = u(x, t)$  för alla  $x$  och  $t$ . Den vibrerande strängen återfår med andra ord sin ursprungliga form  $y = u_0(x)$  periodiskt med perioden

$$P = 2\pi/c\Omega = 2L\sqrt{\rho/T},$$

vilket är anledningen till att den alstrar ljudvågor med frekvensen

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Frekvensen hos den alstrade tonen ökar således med minskande stränglängd, ökande spänning och minskande densitet (tjocklek), något som man enkelt kan verifiera genom att knäppa på en gitarrsträng.

## Övningar

4.1 Bestäm en lösning till vågekvationen

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin 2x, & 0 < x < \pi. \end{array} \right.$$

4.2 Vibrationerna hos en pianosträng beskrivs idealiserat av följande differentialekvation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} 1/h, & \text{för } a < x < a + h, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Här beskriver  $a$  hammarens anslagspunkt på strängen, och  $h$  som är ett litet tal, är hammarens bredd. Bestäm gränsvärdet till lösningen  $u(x, t)$  då  $h \rightarrow 0$ .

## 4.3 Värmeledning i en stav

I inledningskapitlet härledde vi utifrån fysikaliska principer en partiell differentialekvation för diffusion. Värmeledning fungerar på ett helt analogt sätt. Om  $u(x, y, z, t)$  betecknar temperaturen i punkten  $(x, y, z)$  inuti en homogen kropp  $K$  vid tidpunkten  $t$ , så satisfierar således  $u$  differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u,$$

förutsatt att det inte finns några värmekällor eller värmesänkor inuti kroppen. Här är  $\kappa$  en materialkonstant som beror på kroppens värmeledningsförmåga.

Vi ska nu lösa värmeledningsekvationen i det fall då vår kropp  $K$  är en homogen stav av längd  $L$  som hålls isolerad från omgivningen utom i ändarna, där temperaturen hålls konstant. Allt värmeflöde sker i detta fall i stavens längdriktning, så problemet att bestämma värmefördelningen inuti staven är i princip endimensionellt. Med  $u(x, t)$  som temperaturen i punkten  $x$  vid tiden  $t$ , beskrivs temperaturen för  $0 < x < L$  och  $t > 0$  följaktligen av differentialekvationen

$$(pd) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ett randvillkor av typen

$$(rv) \quad u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b \quad \text{för } t \geq 0,$$

där  $a$  och  $b$  är givna tal, och ett begynnelsevillkor av typen

$$(bv) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{för } 0 < x < L,$$

där  $u_0$  är en given funktion.

Vi ska lösa denna differentialekvation med fouriermetoder och börjar med att behandla fallet *homogena* randvillkor, dvs. fallet  $a = b = 0$ . Om vi sätter  $\Omega = \pi/L$  så kan vi precis som för vågekvationen konstatera att funktionerna

$$u_n(x, t) = b_n(t) \sin n\Omega x$$

satisfierar dessa randvillkor för varje  $n$  och varje val av deriverbar funktion  $b_n(t)$ . Det är därför naturligt att försöka ansätta en lösning till vårt problem på formen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\Omega x.$$

Förutsatt att vi kan derivera partiellt under summatecknet blir nu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(t) \sin n\Omega x \quad \text{och} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \Omega^2 b_n(t) \sin n\Omega x, \end{aligned}$$

så  $u(x, t)$  löser den partiella differentialekvationen (pd) och randvärdesvillkoret (rv) med  $a = b = 0$  om

$$b'_n(t) = -\kappa n^2 \Omega^2 b_n(t).$$

Vi har nu en första ordningens differentialekvation med lösningen

$$b_n(t) = B_n e^{-\kappa\Omega^2 n^2 t},$$

vilket innebär att vår lösning till värmeledningsproblemet bör ha formen

$$(4.4) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\kappa\Omega^2 n^2 t} \sin n\Omega x.$$

För att också uppfylla begynnelsevillkoret ska koefficienterna  $B_n$  bestämmas så att

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\Omega x = u_0(x).$$

Koefficienterna ska med andra ord vara koefficienter i sinusserien till funktionen  $u_0$ , och sinusserien fås genom att utvidga  $u_0$  till en udda periodisk funktion med period  $2L$ . Detta bestämmer koefficienterna som

$$(4.5) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin n\Omega x \, dx.$$

När vi nu har funnit en formel för lösningen, kan vi i efterhand verifiera att deriverbarhetsförutsättningarna faktiskt är uppfyllda, och detta leder till följande sats.

**Sats 4.3.1.** *Antag att funktionen  $u_0$  är kontinuerlig och begränsad med höger- och vänsterderivator i varje punkt. Då löser den av serien (4.4) definierade funktionen  $u$  med koefficienter bestämda av ekvation (4.5) värmelednings-ekvationen (pd) med homogena randvillkor (rv) och begynnelsevillkoret (bv). Funktionen  $u$  har vidare partiella derivator av alla ordningar.*

*Bevis.* Det följer av förutsättningarna att begynnelsevillkoret är uppfyllt, så det räcker att verifiera att  $u$  har partiella derivator av godtycklig ordning samt att dessa fås genom att derivera under summatecknet.

Den  $n$ :te termen i den serie som fås genom att derivera serien (4.4) partiellt under summatecknet  $p$  gånger med avseende på  $x$  och  $q$  gånger med avseende på  $t$  har formen

$$B_n (n\Omega)^p (-\kappa\Omega^2 n^2)^q e^{-\kappa\Omega^2 n^2 t} (\pm \sin n\Omega x)$$

med sinus bytt mot cosinus om  $p$  är udda. Eftersom fourierkoefficienterna  $B_n$  är begränsade följer det att ovanstående term för  $t > \delta > 0$  och alla  $x$  till beloppet är begränsad av

$$C n^{p+2q} e^{-an^2}$$

för  $a = \kappa\Omega^2 \delta > 0$  och någon konstant  $C$  som inte beror av  $n$ .

För varje exponent  $r$  är serien  $\sum_n n^r e^{-an^2}$  konvergent, så det följer att den partiellt deriverade serien är absolutkonvergent och, med argument som i beviset för sats 2.2.4, att det är legitimt att derivera under summatecknet. Följaktligen är funktionen  $u(x, t)$  oändligt deriverbar, och speciellt är deriveringarna som ledde till formlerna för de partiella derivatorna  $\frac{\partial u}{\partial t}$  och  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  tillåtna. Detta visar a posteriori att härledningen av formeln (4.4) för lösningen  $u(x, t)$  är korrekt.  $\square$

### Inhomogena randvillkor

Det allmänna fallet med inhomogena randvillkor återför vi på det homogena fallet genom att sätta

$$\phi(x) = a + \frac{b-a}{L}x$$

samt konstatera att funktionen  $u(x, t)$  löser värmeledningsekvationen (pd) med inhomogena randvillkor (rv) och begynnelsevillkor  $u(x, 0) = u_0(x)$  om och endast om funktionen

$$v(x, t) = u(x, t) - \phi(x)$$

löser samma värmeledningsekvation (pd) med de homogena randvillkoren  $v(0, t) = v(L, t) = 0$  och begynnelsevillkoret  $v(x, 0) = u_0(x) - \phi(x)$ .

### Varianter

Värmespridningen i en stav som är isolerad även i sina ändpunkter vilket innebär att det inte förekommer något utflöde av värme i stavens längdriktning i ändpunkterna, beskrivs av samma partiella differentialekvation som ovan, dvs.

$$(pd) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

men randvillkoren har nu formen

$$(rv') \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Givet ett begynnelsevillkor av samma typ som tidigare, dvs.

$$(bv) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L,$$

så erhåller vi nu den entydigt bestämda lösningen genom ansatsen

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\kappa \Omega^2 n^2 t} \cos n \Omega x,$$



där som tidigare  $\Omega = \pi/L$ . Koefficienterna  $A_n$  fås den här gången genom att utveckla funktionen  $u_0$  i en cosinusserie, vilket betyder att

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos n\Omega x \, dx.$$

Notera att stavens temperatur när lång tid förflutit, dvs.  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ , är konstant och lika med

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) \, dx$$

vilket är medelvärdet av den initiala temperaturen i staven. Detta förefaller rimligt eftersom ingen värme försvinner ut ur staven.

## Övningar

4.3 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + \sin x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4.4 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + 3 \cos 4x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4.5 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4.6 Lös värmeledningsekvationerna

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = \pi x - x^2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0; \\ u(x, 0) = \pi x - x^2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4.7 Bestäm en lösning till värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 1, & t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

#### 4.4 Dirichlets problem för en skiva

Värmeledningsekvationen  $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u$  beskriver temperaturen i en kropp  $K$  som funktion av tiden  $t$ , och givet att temperaturen inte varierar med tiden på kroppens yta  $\partial K$ , är temperaturen  $u$  inuti kroppen bestämd för all framtid  $t$  av begynnelsevärdena vid någon tidpunkt, t. ex.  $t = 0$ . När lång tid förflutit, i matematiska termer då  $t$  går mot oändligheten, bör temperaturen nå ett stationärt tillstånd som karakteriseras av att den inte förändras med tiden, dvs. av att  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Den stationära temperaturfördelningen  $u = u(x, y, z)$  inuti kroppen erhålls därför som lösning till den partiella differentialekvationen

$$\Delta u = 0$$

med ett randvärdesvillkor av typen

$$u(x, y, z) = f(x, y, z) \quad \text{för } (x, y, z) \in \partial K.$$

En lösning  $u$  till den partiella differentialekvation  $\Delta u = 0$  kallas *harmonisk* i (det inre av)  $K$ , så med denna terminologi kan vi formulera problemet att bestämma den stationära värmefördelningen på följande sätt.

*Dirichlets problem:* Bestäm en funktion  $u$  som är harmonisk i det inre av  $K$  och lika med en given funktion  $f$  på randen  $\partial K$  av  $K$ .

Dirichlets problem är trivialt i en dimension – om  $u''(x) = 0$  för alla  $x$  i ett intervall  $]0, L[$ , så är  $u(x)$  ett förstegradspolynom. Med randvillkoren  $u(0) = a$  och  $u(L) = b$  blir därför  $u(x) = a + (b - a)x/L$  den unika lösningen.

I två dimensioner kan man angripa problemet med hjälp av teorin för analytiska funktioner, och om området är en cirkelskiva kan vi använda fourierteknik. Så låt oss därför studera Dirichlets problem för cirkelskivan

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Vi antar alltså att vi har en funktion  $f(x, y)$  som är definierad då  $x^2 + y^2 = 1$  och söker en funktion  $u(x, y)$  som satisfierar differentialekvationen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i cirkelskivan och randvillkoret

$$u(x, y) = f(x, y)$$

för alla punkter på periferin  $x^2 + y^2 = 1$  av cirkelskivan.

Geometrin i problemet gör det naturligt att övergå till polära koordinater och införa funktionerna  $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  och  $\tilde{f}(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$ . Kedjeregeln ger oss sambandet

$$\Delta u = r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2},$$

så i polära koordinater kan vi skriva Dirichlets problem på formen

$$(pd) \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

med randvillkoret

$$(rv) \quad \tilde{u}(1, \theta) = \tilde{f}(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Det är lätt att verifiera att funktionerna  $\tilde{u}_n(r, \theta) = r^{|n|} e^{in\theta}$  löser differentialekvationen (pd) för alla heltal  $n$ . Om koefficienterna  $c_n$  är begränsade så definierar därför

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

en funktion  $\tilde{u}$  som löser differentialekvationen (pd), ty den oändliga serien, liksom alla de serier som fås genom att derivera partiellt under summatecknet ett godtyckligt antal gånger med avseende på  $r$  och  $\theta$ , majoreras i cirkelskivan  $0 \leq r \leq r_0 < 1$  av konvergenta numeriska serier (jmf sats 2.2.4). Funktionen  $\tilde{u}$  har därför partiella derivator av godtycklig ordning, och derivatorna fås genom att derivera under summatecknet, och detta medför speciellt att  $\tilde{u}$  löser differentialekvationen.

Randvillkoret (bv) övergår nu i likheten

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{in\theta} = \tilde{f}(\theta),$$

som bestämmer koefficienterna  $c_n$  entydigt som fourierkoefficienterna till funktionen  $\tilde{f}$ , dvs.  $c_n = \hat{\tilde{f}}(n)$ .

Vi erinrar nu om våra resultat i avsnitt 3.8 gällande abelsummation som innebär att

$$\tilde{u}(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = \int_{\mathbf{T}} P_r(t) \tilde{f}(\theta - t) dt$$

där

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}$$

är Poissonkärnan. I ljuset av sats 3.8.1 har vi därför bevisat följande resultat.

**Sats 4.4.1.** *Funktionen*

$$\tilde{u}(r, \theta) = \int_{\mathbf{T}} P_r(t) \tilde{f}(\theta - t) dt$$

är harmonisk i enhetsskivan  $D$ , och i alla randpunkter  $(\cos \theta, \sin \theta)$  där randfunktionen  $f$  är kontinuerlig är

$$\lim_{r \rightarrow 1} \tilde{u}(r, \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta).$$

# Kapitel 5

## Fouriertransformen

### 5.1 Introduktion

För att en funktion ska kunna skrivas som en fourierserie måste funktionen vara periodisk. Denna inskränkning är dock inte så allvarlig som man kan tycka vid första anblicken; funktioner med begränsade intervall som definitionsmängd kan ju alltid utvidgas till periodiska funktioner, och de kan därför – om de är tillräckligt reguljära – representeras av fourierserier i sina ursprungliga definitionsmängder. För icke-periodiska funktioner med hela  $\mathbf{R}$  som definitionsmängd finns det emellertid inte något hopp om att erhålla fourierserier som representerar funktionerna överallt. Lösningen består i att istället representera sådana funktioner med integraler. För att komma fram till hur denna integralrepresentation bör se ut resonerar vi i detta avsnitt helt heuristiskt och lämnar detaljfrågor om konvergens till följande avsnitt.

Låt därför  $f(t)$  vara en hygglig funktion, definierad på  $\mathbf{R}$  och med absolutkonvergent integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ , och låt  $T$  vara ett (stort) positivt tal. Genom att utvidga restriktionen av funktionen  $f$  till intervallet  $] -T, T[$  periodiskt med period  $2T$  får vi för  $|t| < T$  en fourierserieutveckling av  $f(t)$  av följande slag:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(T) e^{in\pi t/T},$$

där fourierkoefficienterna  $c_n(T)$  ges av formeln

$$c_n(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-in\pi t/T} dt.$$

Tanken är nu att låta  $T$  gå mot oändligheten. Eftersom integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\pi t/T} dt$$

är absolutkonvergenta, går de båda svansarna

$$\int_{-\infty}^{-T} f(t) e^{-in\pi t/T} dt \quad \text{och} \quad \int_T^{\infty} f(t) e^{-in\pi t/T} dt$$

mot 0 då  $T \rightarrow \infty$ , så därför bör vi för stora  $T$  med god approximation kunna sätta

$$c_n(T) \approx \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\pi t/T} dt.$$

Om vi inför definitionen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbf{R})$$

kan vi alltså kortare skriva  $c_n(T) \approx (2T)^{-1} \hat{f}(n\pi/T)$ , och insättning av detta i fourierserien för  $f(t)$  på intervallet  $[-T, T]$  ger oss approximationen

$$f(t) \approx \frac{1}{2T} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n\pi/T) e^{in\pi t/T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\pi}{T} \hat{f}(n\pi/T) e^{in\pi t/T}.$$

Summan i högerledet är en rektangelapproximation till  $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  med steglängd  $\pi/T$ , och när  $T \rightarrow \infty$  konvergerar summan mot denna integral. Efter gränsövergång bör vi således erhålla formeln

$$(5.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Funktionen  $\hat{f}$  kallas *fouriertransformen* till funktionen  $f$ , och genom integralformeln (5.1) som går under namnet *inversionsformeln*, representeras  $f$  av sin fouriertransform på ett sätt som motsvarar hur en periodisk funktion representeras av sin fourierserie. Naturligtvis behöver funktionen  $f$  uppfylla vissa villkor för att formeln ovan ska gälla, och sådana villkor ska vi återkomma till längre fram.

Vi kompletterar den informella härledningen av inversionsformeln med en lika informell härledning av en motsvarighet till Parsevals formel som för  $2T$ -periodiska funktioner har följande form:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(T)|^2.$$

Insättning av approximationen  $c_n(T) \approx (2T)^{-1} \hat{f}(n\pi/T)$  ger efter multiplikation med  $2T$

$$\int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \approx \frac{1}{2T} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(n\pi/T)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\pi}{T} |\hat{f}(n\pi/T)|^2.$$

Summan i högerledet konvergerar mot integralen  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$  då  $T \rightarrow \infty$ . Vi kan följaktligen förvänta oss att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Denna formel, *Plancherels formel*, gäller (med lämplig tolkning av fouriertransformen  $\hat{f}$ ) för alla funktioner  $f$  med ändligt vänsterled, och vi kommer att behandla den i avsnitt 5.8.

Vi avslutar det här avsnittet med en fysikalisk tolkning av inversionsformeln och Plancherels formel genom att låta funktionen  $f(t)$  vara en kontinuerlig signal som varierar med tiden  $t$ . Funktionerna  $e^{i\omega t}$  representerar då rena periodiska svängningar med vinkelfrekvensen  $\omega$ . Om  $t$  mäts i sekunder så är tiden för en period lika med  $2\pi/\omega$  sekunder, dvs. svängningsfunktionen  $e^{i\omega t}$  hinner med  $\omega/2\pi$  perioder per sekund vilket innebär att dess frekvens är  $\omega/2\pi$  hertz.

En godtycklig kontinuerlig signal som avtar tillräckligt snabbt i oändligheten kan sättas ihop av rena svängningar, och inversionsformeln (5.1) beskriver hur detta går till. En integral av typen  $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$  kan tolkas som signalens energiinnehåll under tiden mellan  $t_1$  och  $t_2$ , medan integralen  $\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$  istället är energiinnehållet i frekvensbandet mellan  $\omega_1$  och  $\omega_2$  (om man mäter i lämpliga enheter). Plancherels formel uttrycker då bara att energin är densamma om man summerar över hela signalens livslängd eller över alla frekvenser.

## 5.2 Fouriertransformen

Låt oss påminna om att  $L^1(\mathbf{R})$  betecknar rummet av alla absolutintegrabla funktioner på  $\mathbf{R}$  och att vi för sådana funktioner  $f$  definierar  $L^1$ -normen  $\|f\|_1$  som

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt.$$

Om funktionen  $f$  är absolutintegrabel, så är integralen  $\int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$  absolutkonvergent för alla reella tal  $\omega$ . Detta tillåter oss att göra följande definition.

**Definition.** Låt  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och definiera en funktion  $\hat{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  genom att för  $\omega \in \mathbf{R}$  sätta

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Funktionen  $\hat{f}$  kallas *fouriertransformen* till funktionen  $f$  och betecknas också  $\mathcal{F}[f]$ .

EXEMPEL 5.2.1. Låt oss bestämma fouriertransformen till den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-a,a]}$  till det symmetriska intervallet  $[-a, a]$ . Eftersom

$$\chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } |t| \leq a, \\ 0 & \text{för } |t| > a, \end{cases}$$

är

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) &= \int_{\mathbf{R}} \chi_{[-a,a]} e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} \left[ e^{-i\omega t} \right]_{-a}^a \\ &= 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}.\end{aligned}\quad \square$$

EXEMPEL 5.2.2. Funktionen  $e^{-|t|}$  har fouriertransformen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(1+i\omega)} dt \\ &= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.\end{aligned}\quad \square$$

EXEMPEL 5.2.3. Analogt får man att funktionen

$$e^{-|t|} \operatorname{sgn} t = \begin{cases} e^{-t} & \text{om } t > 0, \\ 0 & \text{om } t = 0, \\ -e^t & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

har fouriertransformen

$$\mathcal{F}[e^{-|t|} \operatorname{sgn} t](\omega) = -\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}.\quad \square$$

Eftersom  $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ , kan fouriertransformen till en funktion  $f$  förstås också beräknas som

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{\mathbf{R}} f(t) \sin \omega t dt.$$

För reellvärda funktioner  $f$  ger detta en naturlig uppdelning av fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  i real- och imaginärdel. För *jämna*, *reellvärda* funktioner  $f$  är speciellt fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

reellvärd för alla  $\omega$ , och för *udda*, *reellvärda* funktioner  $f$  är

$$\hat{f}(\omega) = -i \int_{\mathbf{R}} f(t) \sin \omega t dt = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

rent imaginär för alla  $\omega$ .

Det är alltså ingen tillfällighet att fouriertransformerna i exemplen 5.2.1 och 5.2.2 är reellvärda och att fouriertransformen i exempel 5.2.3 är rent imaginär.



## Övningar

5.1 Bestäm fouriertransformen till funktionen  $f$  om

- a)  $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$     b)  $f(t) = t \cdot \chi_{[0,1]}(t)$     c)  $f(t) = te^{-|t|}$   
 d)  $f(t) = \sin t \cdot \chi_{[0,\pi]}(t)$     e)  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ .

## 5.3 Egenskaper och räkneregler

Fouriertransformerna i de tre exemplen i föregående avsnitt är kontinuerliga funktioner och går mot noll i oändligheten. Motsvarande gäller generellt för fouriertransformen till en  $L^1$ -funktion.

**Sats 5.3.1.** *Fouriertransformen  $\hat{f}$  till en funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$  och*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

För alla  $\omega \in \mathbf{R}$  är vidare

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1.$$

*Bevis.* Begränsningen följer med en gång av triangelolikheten för integraler.

För att bevisa att fouriertransformen  $\hat{f}$  är kontinuerlig använder vi satsen om dominerad konvergens; eftersom funktionerna  $t \mapsto e^{-i\omega t}$  är kontinuerliga och uniformt begränsade kan vi göra gränsövergång under integraltecknet och får för varje  $\omega_0 \in \mathbf{R}$  att

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \hat{f}(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbf{R}} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = \hat{f}(\omega_0), \end{aligned}$$

vilket visar att fouriertransformen  $\hat{f}$  är kontinuerlig.

Att  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow \pm\infty$  är bara en omformulering av Riemann-Lebesgues lemma (sats 2.3.3).  $\square$

Sats 5.3.1 innebär att fouriertransformen  $\mathcal{F}$ , dvs. avbildningen  $f \mapsto \hat{f}$ , är en avbildning från rummet  $L^1(\mathbf{R})$  till rummet  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$  av alla kontinuerliga funktioner  $g$  på  $\mathbf{R}$  som har egenskapen att  $g(\omega) \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Detta betyder emellertid inte att värdemängden till  $\mathcal{F}$  är lika med  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ .

$L^1(\mathbf{R})$  är ett linjärt, translations- och skalningsinvariant rum, och nästa sats visar att fouriertransformering är en linjär operation och beskriver hur den fungerar ihop med translation, skalning, konjugering och multiplikation med den komplexa exponentialfunktionen.

**Sats 5.3.2.** Låt  $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ . För alla  $\omega \in \mathbf{R}$  är då

$$\begin{aligned} (a) \quad & \widehat{(af + bg)}(\omega) = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega) & (a, b \in \mathbf{C}) \\ (b) \quad & \widehat{f(t - t_0)}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-it_0\omega} & (t_0 \in \mathbf{R}) \\ (c) \quad & \widehat{f(\lambda t)}(\omega) = |\lambda|^{-1} \hat{f}(\lambda^{-1}\omega) & (\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0) \\ (d) \quad & \widehat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)} \\ (e) \quad & \widehat{(e^{i\omega_0 t} f)}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0) & (\omega_0 \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

*Bevis.* (a), (d) och (e) är uppenbara, och (b) och (c) följer efter enkla variabelbyten.  $\square$

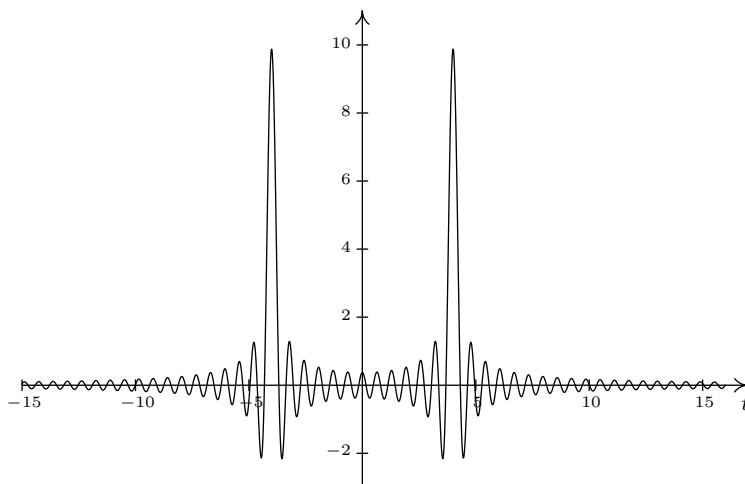
**EXEMPEL 5.3.1.** Definiera en funktion  $f$  genom att sätta  $f(t) = \cos bt$  för  $|t| \leq a$  och  $f(t) = 0$  för  $|t| > a$ . Med hjälp av den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-a,a]}$  för intervallet  $[-a, a]$  kan vi skriva funktionen som

$$f(t) = \cos bt \cdot \chi_{[-a,a]} = \frac{1}{2}(e^{ibt} + e^{-ibt}) \cdot \chi_{[-a,a]},$$

och vi kan därför beräkna dess fouriertransform genom att kombinera resultatet i exempel 5.2.1 med räkneregel (e) i sats 5.3.2:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\sin a(\omega - b)}{\omega - b} + 2 \frac{\sin a(\omega + b)}{\omega + b} \right) = \frac{\sin a(\omega - b)}{\omega - b} + \frac{\sin a(\omega + b)}{\omega + b}.$$

I figur 5.1 visas fouriertransformen då  $a = 10$  och  $b = 4$ .  $\square$



**Figur 5.1.** Fouriertransformen till funktionen  $f(t) = \cos 4t \cdot \chi_{[-10,10]}(t)$ .

### Övningar

- 5.2 Bestäm med hjälp av sats 5.3.2 och resultaten i exemplen 5.2.1 och 5.2.2 fouriertransformen till funktionen  $f$  om
- a)  $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$    b)  $f(t) = \sin t \cdot \chi_{[-\pi,\pi]}(t)$    c)  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$ .
- 5.3 Definiera för  $f \in L^1(\mathbf{R})$  funktionen  $\tilde{f}$  genom att sätta  $\tilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$ .
- a) Bestäm sambandet mellan fouriertransformerna  $\hat{f}$  och  $\hat{\tilde{f}}$ .
- b) Visa att fouriertransformen  $\hat{f}$  är reell om  $f = \tilde{f}$ .

## 5.4 Fouriertransformering och derivering

En anledning till att fouriertransformen är så användbar är att derivering genom fouriertransformering överförs i den mycket enklare operationen multiplikation. Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 5.4.1.** *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och att både  $f$  och  $f'$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

*Bevis.* Eftersom integralen  $\int_{\mathbf{R}} |f(t)| dt$  är ändlig, finns det en följd  $(t_n)_1^\infty$  med egenskapen att  $t_n \rightarrow \infty$  och  $f(t_n) \rightarrow 0$ , då  $n \rightarrow \infty$ . (Annars skulle det finnas ett tal  $\epsilon > 0$  och ett tal  $T$  så att  $|f(t)| \geq \epsilon$  för alla  $t \geq T$ , något som uppenbarligen är orimligt när  $f$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ .) Analogt finns det en följd  $(u_n)_1^\infty$  sådan att  $u_n \rightarrow -\infty$  och  $f(u_n) \rightarrow 0$ .

Partiell integration ger nu

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n}^{t_n} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left[ f(t) e^{-i\omega t} \right]_{u_n}^{t_n} + i\omega \int_{u_n}^{t_n} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= i\omega \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega). \end{aligned} \quad \square$$

Nästa sats ger istället ett tillräckligt villkor för att fouriertransformen ska vara deriverbar.

**Sats 5.4.2.** *Om funktionerna  $f(t)$  och  $tf(t)$  båda tillhör rummet  $L^1(\mathbf{R})$ , så är fouriertransformen  $\hat{f}$  deriverbar och*

$$\widehat{(tf(t))}(\omega) = i\hat{f}'(\omega).$$

*Bevis.* Formellt erhåller man derivatan genom att derivera

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

under integraltecknet. Detta resulterar nämligen i

$$\hat{f}'(\omega) = -i \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \widehat{(tf(t))}(\omega).$$

Naturligtvis krävs det någon form av motivering för ovanstående operation. Betrakta därför differenskvoten

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)}{h} &= \int_{\mathbf{R}} f(t) \frac{e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}}{h} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} \frac{e^{-iht} - 1}{ht} dt. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\left| \frac{e^{-iht} - 1}{ht} \right| = \left| -i \int_0^1 e^{-ihtu} du \right| \leq \int_0^1 |e^{-ihtu}| du = \int_0^1 du = 1,$$

är de kontinuerliga funktionerna

$$g_h(t) = e^{-i\omega t} \frac{e^{-iht} - 1}{ht}$$

till beloppet uniformt begränsade av talet 1. Vidare är

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h(t) = -ie^{-i\omega t}.$$

Satsen om dominerad konvergens tillåter oss därför att i formeln (5.2) låta  $h \rightarrow 0$  under integraltecknet, vilket leder till att differenskvoten går mot

$$-i \int_{\mathbf{R}} t f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \widehat{(tf(t))}(\omega).$$

Detta bevisar satsen. □

Om vi känner en funktions fouriertransform  $\hat{f}$  så kan vi således genom att iterera föregående sats bestämma fouriertransformen till den funktion som fås genom att multiplicera  $f$  med ett polynom, förutsatt att funktionerna  $t^n f(t)$  är absolutintegrabla för alla exponenter  $n$  som är mindre än eller lika med polynomets gradtal.

EXEMPEL 5.4.1. Det är naturligtvis ingen konst att bestämma fouriertransformen till ”takfunktionen”

$$f(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$$

direkt från definitionen, men vi ska som övning beräkna den med hjälp av våra räkneregler. Vi skriver då först om funktionen på följande vis:

$$\begin{aligned} f(t) &= \chi_{[-1,1]}(t) - t\chi_{[0,1]}(t) + t\chi_{[-1,0]}(t) \\ &= \chi_{[-1,1]}(t) + t(\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t + \frac{1}{2}) - \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t - \frac{1}{2})). \end{aligned}$$

Fouriertransformen till funktionen  $g(t) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t + \frac{1}{2}) - \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t - \frac{1}{2})$  får vi genom att tillämpa translationsregeln (b) i sats 5.3.2 på fouriertransformen till den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$  som beräknades i exempel 5.2.1 med följande resultat:

$$\hat{g}(\omega) = (e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}) \cdot 2 \frac{\sin(\omega/2)}{\omega} = 4i \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega}.$$

Vi använder nu regeln för multiplikation med  $t$  på  $f(t) = \chi_{[-1,1]}(t) + tg(t)$  och får då

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + i \frac{d}{d\omega} \left( 4i \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega} \right) \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} - 4 \frac{\omega \sin(\omega/2) \cos(\omega/2) - \sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \\ &= 4 \frac{\sin^2(\omega/2)}{\omega^2}. \end{aligned} \quad \square$$

EXEMPEL 5.4.2. Genom att utnyttja de två föregående satserna kan vi beräkna fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-t^2/2}$ . Eftersom  $f'(t) = -tf(t)$ , är

$$i\omega \hat{f}(\omega) = \widehat{f'}(\omega) = \widehat{(-tf(t))}(\omega) = -i\hat{f}'(\omega),$$

dvs.  $\hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0$ . Den allmänna lösningen till denna differentialekvation är  $\hat{f}(\omega) = Ce^{-\omega^2/2}$ . Konstanten  $C$  bestäms av villkoret

$$C = \hat{f}(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} dt.$$

För att beräkna  $C$  skriver vi  $C^2$  som en dubbelintegral över  $\mathbf{R}^2$  och inför polära koordinater:

$$\begin{aligned} C^2 &= \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2} dx \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2} dy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-r^2/2} dr d\theta = 2\pi \left[ -e^{-r^2/2} \right]_0^\infty = 2\pi. \end{aligned}$$

Följaktligen är  $C = \sqrt{2\pi}$ , och vi har alltså

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}. \quad \square$$

## Övningar

5.4 Beräkna med hjälp av sats 5.4.2 och resultaten i exemplen 5.2.1 och 5.2.2 fouriertransformen till funktionen  $f$  om

a)  $f(t) = t\chi_{[-1,1]}(t)$       b)  $f(t) = te^{-|t|}$ .

- 5.5 Antag att funktionen  $f$  är två gånger kontinuerligt deriverbar och att  $f$ ,  $f'$  och  $f''$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ . Visa att fouriertransformen  $\hat{f}$  också ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ .

## 5.5 Faltning

Medelvärden jämnar ut skillnader. Om  $f$  är en funktion med  $\mathbf{R}$  som definitionsmängd, bör därför medelvärden bildade av dess translater  $f_s$  uppföra sig mer regelbundet än funktionen själv. Ett viktat medelvärde som tar hänsyn till oändligt många translater har formen  $\int_{\mathbf{R}} g(s)f_s ds$ , där  $g$  är en icke-negativ funktion och  $\int_{\mathbf{R}} g(s) ds = 1$ . Integralen  $\int_{\mathbf{R}} g(s)f_s ds$  ska då tolkas som den funktion som i punkten  $t \in \mathbf{R}$  har värdet

$$\int_{\mathbf{R}} g(s)f_s(t) ds = \int_{\mathbf{R}} g(s)f(t-s) ds.$$

Ovanstående sätt att bilda en ny funktion av två givna funktioner  $f$  och  $g$  är ett exempel på en operation som kallas *faltning*. Den allmänna definitionen av begreppet, som inte kräver att den ena funktionen ska vara icke-negativ och ha integral lika med 1, ser ut så här.

**Definition.** Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner definierade på  $\mathbf{R}$ . Integralen

$$\int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds$$

kallas om den är absolutkonvergent för *faltningen* av funktionerna  $f$  och  $g$  (i punkten  $t$ ) och betecknas  $f * g(t)$ .

Variabelbytet  $u = t - s$  ger att

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds = \int_{\mathbf{R}} f(u)g(t-u) du = g * f(t),$$

så faltning är en kommutativ operation.

För att faltningen  $f * g(t)$  ska vara väldefinierad måste funktionen

$$s \mapsto f(t-s)g(s)$$

avta tillräckligt snabbt då  $s$  går mot  $\pm\infty$ , men det är knepigt att ge uttömmande nödvändiga villkor på funktionerna  $f$  och  $g$  för att så ska vara fallet. Om funktionen  $g$  är stor i  $+\infty$  så kan ju detta kompenseras av att funktionen  $f$  är liten i  $-\infty$ , och vice versa. Exempelvis är faltningen väldefinierad för alla  $t \in \mathbf{R}$  om båda funktionerna är identiskt lika med noll på negativa reella axeln  $]-\infty, 0[$ , ty i så fall är produkten  $f(t-s)g(s)$  lika med noll för alla  $s$  om  $t < 0$ , och för alla  $s$  utanför intervallet  $[0, t]$  om  $t \geq 0$ .

Ett annat tillräckligt villkor för att faltningen ska vara väldefinierad överallt, och som vi kommer att använda oss av, ges av nästa sats.

**Sats 5.5.1.** *Antag att en av funktionerna  $f$  och  $g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  och den andra är kontinuerlig och begränsad. Då är faltningen  $f * g$  en kontinuerlig och begränsad funktion på  $\mathbf{R}$ .*

*Bevis.* Antag utan inskränkning att funktionen  $f$  är kontinuerlig och till beloppet begränsad av konstanten  $C$  och att funktionen  $g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . För varje  $t$  är då  $|f(t-s)g(s)| \leq C|g(s)|$  vilket medför att funktionen

$$s \mapsto f(t-s)g(s)$$

är absolutintegrabel. Faltningen  $f * g(t)$  är således väldefinierad för alla  $t$ , och triangelolikheten för integraler ger att

$$|f * g(t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)g(s)| ds \leq \int_{\mathbf{R}} C|g(s)| ds = C\|g\|_1,$$

vilket visar att faltningen  $f * g$  är en begränsad funktion. Att funktionen också är kontinuerlig i alla punkter  $t_0$  följer av satsen om dominerad konvergens enligt vilken

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} f * g(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds = \int_{\mathbf{R}} \lim_{t \rightarrow t_0} f(t-s)g(s) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(t_0-s)g(s) ds = f * g(t_0). \end{aligned} \quad \square$$

**Sats 5.5.2.** *Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner i  $L^1(\mathbf{R})$  och antag att faltningen  $f * g$  är en väldefinierad funktion som är integrerbar på varje begränsat intervall. Då gäller:*

(a) *Faltningen  $f * g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  och  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .*

(b)  *$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ .*

*Anmärkning.* Om man definierar rummet  $L^1(\mathbf{R})$  med hjälp av Lebesgueintegralen, kan man visa att faltningen  $f * g$  av två godtyckliga funktioner i  $f, g \in L^1(\mathbf{R})$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ , att olikheten  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  gäller generellt samt att  $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ . Med vår definition av  $L^1(\mathbf{R})$  i termer av Riemannintegralen får vi nöja oss med ovanstående svagare resultat som emellertid är fullt tillräckligt för våra syften.

*Bevis.* (a) Genom att integrera olikheten

$$|f * g(t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)||g(s)| ds,$$

byta integrationsordning och göra ett variabelbyte erhåller vi olikheten

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbf{R}} |f * g(t)| dt \leq \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)| |g(s)| ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)| |g(s)| dt ds = \int_{\mathbf{R}} (|g(s)| \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)| dt) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} (|g(s)| \int_{\mathbf{R}} |f(u)| du) ds = \|f\|_1 \|g\|_1 \end{aligned}$$

som visar att faltningen  $f * g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ .

(b) Omkastning av integrationsordningen och ett variabelbyte ger:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{\mathbf{R}} f * g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t-s) g(s) e^{-i\omega t} ds dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(t-s) g(s) e^{-i\omega(t-s)} e^{-i\omega s} dt ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} (g(s) e^{-i\omega s} \int_{\mathbf{R}} f(t-s) e^{-i\omega(t-s)} dt) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} (g(s) e^{-i\omega s} \int_{\mathbf{R}} f(u) e^{-i\omega u} du) ds = \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

## Övningar

5.6 Sätt  $f(t) = e^{-t}H(t)$  och  $g(t) = e^t(1 - H(t))$ , där  $H$  är Heavisidefunktionen (dvs.  $H(t) = 0$  om  $t < 0$  och  $H(t) = 1$  om  $t \geq 0$ ). Bestäm produkten  $\hat{f} \cdot \hat{g}$  och faltningen  $f * g$ .

5.7 Bestäm en lösning till integralekvationen

$$f(t) = e^{-|t|} + \frac{1}{2} e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u f(u) du.$$

5.8 a) Bestäm faltningen  $f * f$  om  $f(t) = e^{-|t|}$ .

b) Bestäm en funktion  $y = y(t)$  i  $L^1(\mathbf{R})$  som löser differentialekvationen

$$y''(t) - y(t) = e^{-|t|}.$$

## 5.6 Värmeledningskärnan

Funktionen  $e^{-t^2/2}$  och funktioner som erhålls ur denna funktion genom en skalförändring spelar en viktig roll i många sammanhang, bl. a. som täthetsfunktioner i normalfördelningen och som ingredienser i lösningen till värmeledningsekvationen i ett obegränsat område. En av orsakerna är att funktionen  $e^{-t^2/2}$  upp till en konstant är sin egen fouriertransform. Det finns därför anledning att undersöka denna funktionsfamilj närmare.



**Definition.** Definiera för  $\tau > 0$  funktionerna  $H_\tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  genom att sätta

$$H_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}.$$

Familjen  $(H_\tau)_{\tau>0}$  kallas *värmeledningskärnan* eller *Gausskärnan*.

Notera att alla funktionerna i familjen  $(H_\tau)_{\tau>0}$  erhålls ur funktionen

$$H_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

genom en skalning, ty

$$H_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} H_1(t/\sqrt{\tau}).$$

**Sats 5.6.1.** *Värmeledningskärnan  $(H_\tau)_{\tau>0}$  är en jämn, positiv summationskärna, dvs.*

(i) *funktionerna  $H_\tau$  är positiva och jämna för alla  $\tau > 0$ ;*

(ii)  $\int_{\mathbf{R}} H_\tau(t) dt = 1$  *för alla  $\tau > 0$ ;*

(iii)  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{\infty} H_\tau(t) dt = 0$  *för alla  $\delta > 0$ ;*

(iv)  $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \sup_{t \geq \delta} H_\tau(t) = 0$  *för alla  $\delta > 0$ .*

Vidare är

(v)  $\hat{H}_\tau(\omega) = e^{-\tau\omega^2/2}$ .

*Bevis.* (i) Att funktionerna  $H_\tau$  är jämna och positiva är uppenbart från definitionen.

(v) Funktionen  $H_1$  har enligt exempel 5.4.2 transformen  $\hat{H}_1(\omega) = e^{-\omega^2/2}$ , så enligt skalningsregeln (c) i sats 5.3.2 är  $\hat{H}_\tau(\omega) = \hat{H}_1(\sqrt{\tau}\omega) = e^{-\tau\omega^2/2}$ .

(ii) Eftersom  $\int_{\mathbf{R}} H_\tau(t) dt = \hat{H}_\tau(0)$ , följer (ii) ur (v).

(iii) Genom att utnyttja sambandet mellan  $H_\tau$  och  $H_1$  och göra variabelbytet  $u = t/\sqrt{\tau}$  erhålls

$$\int_{\delta}^{\infty} H_\tau(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{\delta}^{\infty} H_1(t/\sqrt{\tau}) dt = \int_{\delta/\sqrt{\tau}}^{\infty} H_1(u) du,$$

och integralen i högerledet går mot 0 då  $\tau \rightarrow 0^+$ , eftersom den undre integrationsgränsen går mot  $\infty$ .

(iv) Funktionerna  $H_\tau$  är avtagande för  $t > 0$ , så  $\sup_{t \geq \delta} H_\tau(t) = H_\tau(\delta)$  och

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} H_\tau(\delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-\delta^2 x^2} = 0. \quad \square$$

Faltningen mellan en godtycklig funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och en funktion  $H_\tau$  i värmeledningskärnan ger oss ett vägt medelvärde av translaten till funktionen  $f$ , och detta medelvärde bör ha bättre egenskaper än funktionen själv. Så låt oss börja med att hitta ett uttryck för faltningen  $f * H_\tau$  i termer av fouriertransformen  $\hat{f}$ . Vi behöver då först en hjälpsats.

**Lemma 5.6.2.** *Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner i  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$\int_{\mathbf{R}} f(s)\hat{g}(s) ds = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)g(\omega) d\omega.$$

*Bevis.* Omkastning av integrationsordningen ger

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} f(s)\hat{g}(s) ds &= \int_{\mathbf{R}} f(s) \int_{\mathbf{R}} g(\omega)e^{-i\omega s} d\omega ds \\ &= \int_{\mathbf{R}} g(\omega) \int_{\mathbf{R}} f(s)e^{-i\omega s} ds d\omega = \int_{\mathbf{R}} g(\omega)\hat{f}(\omega) d\omega. \quad \square \end{aligned}$$

Sambandet mellan  $f * H_\tau$  och fouriertransformen  $\hat{f}$  ges nu av följande sats.

**Sats 5.6.3.** *Antag  $f \in L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$f * H_\tau(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} d\omega.$$

*Bevis.* Vi använder lemma 5.6.2 med  $g$  som funktionen

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{i\omega t}H_{1/\tau}(\omega)$$

som har fouriertransformen

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-(s-t)^2/2\tau} = H_\tau(t-s).$$

Enligt lemmat är därför

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\tau\omega^2/2}e^{i\omega t} d\omega = \int_{\mathbf{R}} f(s)H_\tau(t-s) ds = f * H_\tau(t). \quad \square$$

## 5.7 Inversionsformler

Kan vi återvinna funktionen  $f$  om vi känner dess fouriertransform  $\hat{f}$ ? I inledningen till det här kapitlet gjorde vi en informell härledning av inversionsformeln

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

men det finns ett problem med formeln som vi måste ta oss an. Fouriertransformen  $\hat{f}$  är visserligen kontinuerlig och begränsad, men den behöver inte vara absolutintegrabel, så integralen ovan behöver inte existera. Exempelvis är fouriertransformen till den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-1,1]}$ , som vi beräknade i exempel 5.2.1, inte absolutintegrabel.

Vi tar därför till samma knep som vi gjorde för fourierserien – vi förbättrar konvergensmöjligheten genom att multiplicera med en funktion som går snabbt mot noll i oändligheten. En bra sådan funktion är  $e^{-\tau\omega^2/2}$  för positiva tal  $\tau$ , och då  $\tau \rightarrow 0^+$  går funktionen mot 1 överallt. Vi ska alltså studera det uttryck som vi fann i sats 5.6.3 nämligen faltninen

$$f * H_\tau(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{-\tau\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega$$

mellan funktionen  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och värmeledningskärnan, och eftersom värmeledningskärnan är en jämn positiv summationskärna följer nu följande sats som korollarium till sats 2.6.1.

**Sats 5.7.1.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och att  $t$  är en punkt där funktionen  $f$  är kontinuerlig eller har en språngdiskontinuitet. Då är*

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} f * H_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{-\tau\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

*Bevis.* Enligt sats 2.6.1 är

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} f * H_\tau(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} f(t-s) H_\tau(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \left( \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t-s) + \lim_{s \rightarrow 0^-} f(t-s) \right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

För funktioner vars fouriertransformer också tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  får vi nu följande korollarium.

**Sats 5.7.2 (Inversionssatsen).** *Antag att både  $f$  och  $\hat{f}$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ . Då är*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

*i alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig eller har en språngdiskontinuitet.*

*Bevis.* Funktionerna  $e^{-\tau\omega^2/2}$  är uniformt begränsade (av konstanten 1) och går punktvis mot 1 då  $\tau \rightarrow 0^+$ . För funktioner med  $\hat{f}$  tillhörande  $L^1(\mathbf{R})$  kan vi därför tillämpa på satsen om dominerad konvergens och flytta in gränsövergången i sats 5.7.1 innanför integraltecknet, vilket resulterar i den önskade likheten.  $\square$

Om funktionen  $f$  är kontinuerlig och absolutintegrabel och fouriertransformen  $\hat{f}$  också är absolutintegrabel, så är således

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Genom att först byta  $t$  mot  $-t$  och sedan byta plats på  $t$  och  $\omega$  kan vi skriva detta som

$$2\pi f(-\omega) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega).$$

För kontinuerliga absolutintegrabla funktioner vars fouriertransformer också är absolutintegrabla gäller således likheten

$$(5.3) \quad \hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f},$$

där funktionen  $\check{f}$  definieras av att

$$\check{f}(t) = f(-t)$$

för alla  $t$ .

EXEMPEL 5.7.1. I exempel 5.2.2 beräknade vi fouriertransformen till den jämna funktionen  $f(t) = e^{-|t|}$  och fann att

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Eftersom  $\hat{f}$  är absolutintegrabel följer det av sambandet (5.3) att

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}. \quad \square$$

En annan konsekvens av sats 5.7.1 är följande entydighetssats.

**Sats 5.7.3 (Entydighetssatsen).** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och att  $\hat{f}(\omega) = 0$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ . Då är  $f(t) = 0$  i alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.*

*Bevis.* Om  $\hat{f}(\omega) = 0$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ , så är förstas

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{-\tau\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega = 0$$

för alla  $t$ , och därför är  $f(t) = 0$  i alla kontinuitetspunkter på grund av sats 5.7.1.  $\square$

Även i de fall då integralen  $\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  inte existerar kan integralerna

$$S_a(f; t) = \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

av den kontinuerliga funktionen  $\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}$  över *symmetriska* intervall  $[-a, a]$ , ha ett gränsvärde då  $a$  går mot oändligheten. Dessa integraler ska ses som motsvarigheten till fourierseriens symmetriska partialsummor, och konvergenzkriteriet för fourierserier i sats 3.11.1 har också mycket riktigt följande direkta motsvarighet för fouriertransformen.

**Sats 5.7.4.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$ . I alla punkter  $t$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig eller har en språngdiskontinuitet och de båda generaliserade ensidiga derivatorna  $f'_-(t)$  och  $f'_+(t)$  existerar, är*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Vi hoppar över beviset för satsen som bygger på att  $S_a(f; t)$  kan skrivas som en faltning

$$S_a(f; t) = f * D_a(t)$$

med

$$D_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin at}{\pi t}.$$

Funktionerna  $D_a$ , *Dirichletkärnan* på  $\mathbf{R}$ , har egenskaper som är analoga med Dirichletpolynomens – de är jämna, kontinuerliga funktioner,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_a(t) dt = 1 \text{ för alla } a > 0 \quad \text{och} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\infty} D_a(t) dt = 0 \text{ om } \delta > 0.$$

Beviset för sats 3.11.1 kan därför i stort sett kopieras.

EXEMPEL 5.7.2. Fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t$  beräknades i exempel 5.2.3 och befanns vara  $\hat{f}(\omega) = -2i\omega(1 + \omega^2)^{-1}$ . Förutsättningarna i satsen ovan är i detta fall uppfyllda i alla punkter  $t$ , varför

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a -\frac{2i\omega}{1 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega = e^{-|t|} \operatorname{sgn} t.$$

Genom att först ersätta  $t$  med  $-t$  och sedan låta variablerna  $t$  och  $\omega$  byta roller erhåller vi efter förenkling följande resultat:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{t}{1 + t^2} e^{-i\omega t} dt = -\pi i e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega. \quad \square$$

## Övningar

5.9 Bestäm fouriertransformen till funktionen  $f(t) = \frac{1}{b^2 + t^2}$  och beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at}{b^2 + t^2} dt$$

för alla positiva värden på de reella konstanterna  $a$  och  $b$ .

5.10 Utnyttja resultatet i exempel 5.4.1 för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

5.11 Beräkna, t. ex. genom att först bestämma derivatans transform, fouriertransformen till funktionen

$$f(t) = \arctan(t+1) - \arctan(t-1).$$

5.12 Funktionen  $f$  är kontinuerlig och tillhör  $L^1(\mathbf{R})$ . Vidare är

$$\int_{-1}^1 f(t-s) ds = f(t)$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Visa att  $f(t) = 0$  för alla  $t$ .

5.13 Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  är kontinuerlig och att  $f(t-1) + f(t) + f(t+1) = 0$  för alla  $t \in \mathbf{R}$ . Visa, t. ex. genom att fouriertransformera, att  $f(t) = 0$  för alla  $t \in \mathbf{R}$ .

5.14 Sätt

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(t^2+n^2)}.$$

- Visa att serien är likformigt konvergent på  $\mathbf{R}$  och att funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ .
- Beräkna fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .
- Beräkna  $L^1$ -normen  $\|f\|_1$ .

## 5.8 Plancherels formel

Som vi påpekat tidigare kan integraler av typen  $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt$  i många sammanhang tolkas som energiuttryck. Det är därför naturligt att rummet av funktioner med ändlig kvadratisk integral spelar en viktig roll eftersom det är rummet av funktioner med ändlig energi.

**Definition.** En funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  tillhör rummet  $L^2(\mathbf{R})$  om den är integrerbar över varje begränsat intervall och den generaliserade integralen  $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt$  är konvergent.

Som mått på storleken av en funktion  $f \in L^2(\mathbf{R})$  används den s. k.  $L^2$ -normen

$$\|f\|_2 = \left( \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Om  $f$  och  $g$  är två funktioner i  $L^2(\mathbf{R})$  så är

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2,$$

en olikhet som visas med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet precis som i fallet  $L^2(\mathbf{T})$ . (Se kapitel 3.10.) Det följer att summan  $f + g$  av två funktioner  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$  ligger i  $L^2(\mathbf{R})$ , och naturligtvis ligger också  $\alpha f$  i  $L^2(\mathbf{R})$  för varje skalär  $\alpha$ .  $L^2(\mathbf{R})$  är med andra ord ett linjärt rum.

Precis som i fallet  $L^2(\mathbf{T})$  visar man också att translation är en kontinuerlig operation i  $L^2(\mathbf{R})$ , dvs.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|f_t - f_{t_0}\|_2 = 0$$

för alla funktioner  $f \in L^2(\mathbf{R})$ .

En annan konsekvens av Cauchy–Schwarz olikhet är att faltningen  $f * g$  av två  $L^2$ -funktioner alltid är väldefinierad och kontinuerlig. Vi har nämligen följande sats.

**Sats 5.8.1.** *Antag att  $f$  och  $g$  är två funktioner i  $L^2(\mathbf{R})$ . Då är faltningen  $f * g(t)$  väldefinierad för alla  $t \in \mathbf{R}$ , och funktionen  $f * g$  är kontinuerlig och begränsad på  $\mathbf{R}$ .*

*Bevis.* Låt  $\check{f}$  vara funktionen  $\check{f}(t) = f(-t)$ . Det följer av Cauchy–Schwarz olikhet att

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t-s)g(s)| ds = \int_{\mathbf{R}} |\check{f}_t(s)g(s)| ds \leq \|\check{f}_t\|_2 \|g\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty,$$

så den generaliserade integralen

$$f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s) ds$$

är absolutkonvergent för alla  $t$ . Det följer vidare av triangelolikheten för integraler och olikheten ovan att

$$|f * g(t)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(t-s)g(s)| ds \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

så faltningen  $f * g$  är en begränsad funktion på  $\mathbf{R}$ .

Kontinuiteten följer av olikheten

$$\begin{aligned} |f * g(t) - f * g(t_0)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} (f(t-s) - f(t_0-s))g(s) ds \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{R}} (\check{f}_t(s) - \check{f}_{t_0}(s))g(s) ds \right| \\ &\leq \|\check{f}_t - \check{f}_{t_0}\|_2 \|g\|_2 \leq \|f_t - f_{t_0}\|_2 \|g\|_2, \end{aligned}$$

och det faktum att  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f_t - f_{t_0}\|_2 = 0$ . □

Rummet  $L^2(\mathbf{T})$  är ett delrum till rummet  $L^1(\mathbf{T})$ , och därför hade vi inga problem med att definiera fourierserien till en funktion i  $L^2(\mathbf{T})$  eftersom fourierserien är väldefinierad för alla funktioner i det större rummet  $L^1(\mathbf{T})$ . Något motsvarande gäller inte för de båda rummen  $L^1(\mathbf{R})$  och  $L^2(\mathbf{R})$ . Rummet  $L^2(\mathbf{R})$  är inte ett delrum till  $L^1(\mathbf{R})$ ; exempelvis ligger funktionen  $f(t) = 1/(1+|t|)$  i  $L^2(\mathbf{R})$  men inte i  $L^1(\mathbf{R})$ . Det är därför inte självklart vad som ska menas med fouriertransformen till en godtycklig funktion i  $L^2(\mathbf{R})$ , och vi ska återkomma till det problemet i slutet av det här avsnittet.

Rummet  $L^1(\mathbf{R})$  är inte heller ett delrum till  $L^2(\mathbf{R})$  – ett exempel på en funktion som tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  men inte  $L^2(\mathbf{R})$  ges i övning 5.18. Snittet  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  är därför ett äkta delrum till såväl  $L^1(\mathbf{R})$  som  $L^2(\mathbf{R})$ .

Fouriertransformen  $\hat{f}$  till en funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  behöver, som vi sett flera exempel på, inte tillhöra rummet  $L^1(\mathbf{R})$ ; däremot tillhör fouriertransformen  $\hat{f}$  till en funktion  $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  alltid  $L^2(\mathbf{R})$ . Vi har nämligen följande resultat.

**Sats 5.8.2** (Plancherels formel). *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ . Då tillhör fouriertransformen  $\hat{f}$  rummet  $L^2(\mathbf{R})$  och*

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt.$$

*Bevis.* Sätt

$$g = f * \tilde{f},$$

där  $\tilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$ . Eftersom  $f \in L^2(\mathbf{R})$  är funktionen  $g$  kontinuerlig på grund av sats 5.8.1, och eftersom  $f \in L^1(\mathbf{R})$  kan vi därför med stöd av sats 5.5.2 dra slutsatsen att  $g$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  och att

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{\tilde{f}}(\omega) = \hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2.$$

Genom att tillämpa sats 5.7.1 på funktionen  $g$  i punkten  $t = 0$  och utnyttja att

$$g(0) = \int_{\mathbf{R}} f(u)\overline{f(u-0)} du = \int_{\mathbf{R}} |f(u)|^2 du$$

följer det nu att

$$(5.4) \quad 2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = 2\pi g(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega.$$

Om funktionen  $\hat{f}$  ligger i  $L^2(\mathbf{R})$ , dvs. om  $|\hat{f}|^2$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ , kan vi använda satsen om dominerad konvergens på gränsvärdet i (5.4) med slutsatsen att

$$2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbf{R}} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega = \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$



För att slutföra beviset, dvs. visa att  $\hat{f}$  verkligen ligger i  $L^2(\mathbf{R})$ , konstaterar vi först att  $\int_I |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$  för varje begränsat intervall  $I$ , eftersom fouriertransformen  $\hat{f}$  är begränsad. För sådana intervall kan vi således använda satsen om dominerad konvergens och får att

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_I |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega = \int_I \lim_{\tau \rightarrow 0^+} |\hat{f}(\omega)|^2 e^{-\tau\omega^2/2} d\omega = \int_I |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Eftersom integranden i högerledet av (5.4) är icke-negativ är gränsvärdet för integralen över  $I$  mindre än gränsvärdet i (5.4). För alla begränsade intervall  $I$  är således

$$\int_I |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq 2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt,$$

och detta medför att

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \leq 2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt.$$

Fouriertransformen  $\hat{f}$  ligger således i  $L^2(\mathbf{R})$ , och därmed är beviset för satsen komplett.  $\square$

EXEMPEL 5.8.1. Den karakteristiska funktionen  $\chi_{[-1,1]}$  har fouriertransformen  $2 \frac{\sin \omega}{\omega}$ . Det följer därför av Plancherels formel att

$$2 = \int_{-1}^1 1 dt = \int_{\mathbf{R}} |\chi_{[-1,1]}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega,$$

vilket efter förenkling ger att

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \pi. \quad \square$$

Fouriertransformen är definierad för alla funktioner i  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ , och Plancherels formel gör det nu möjligt att utvidga definitionen av fouriertransformen till hela rummet  $L^2(\mathbf{R})$  på följande vis:

Låt  $f$  vara en godtycklig funktion i  $L^2(\mathbf{R})$ , och definiera för varje positivt heltal  $n$  funktionen  $f_n$  genom att sätta

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{om } |t| \leq n \\ 0, & \text{om } |t| \geq n. \end{cases}$$

Funktionerna  $f_n$  tillhör förstås  $L^2(\mathbf{R})$  och eftersom

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f_n(t)| dt &= \int_{-n}^n |f(t)| \cdot 1 dt \leq \left( \int_{-n}^n |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{-n}^n 1^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2n} \|f\|_2 < \infty \end{aligned}$$

tillhör de också  $L^1(\mathbf{R})$ . Vidare gäller att

$$\|f_n - f\|_2 = \left( \int_{\mathbf{R}} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left( \int_{|t| \geq n} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

då  $n \rightarrow \infty$ . Det följer därför av triangelolikheten

$$\|f_n - f_m\|_2 = \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f - f_m\|_2$$

att

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt = \|f_n - f_m\|_2^2 \rightarrow 0 \quad \text{då } m, n \rightarrow \infty.$$

Eftersom funktionerna  $f_n$  ligger i  $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  kan vi nu använda Plancherels formel med slutsatsen att också

$$\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}_n(\omega) - \hat{f}_m(\omega)|^2 d\omega \rightarrow 0 \quad \text{då } m, n \rightarrow \infty.$$

Man kan visa, vilket kräver kunskaper som ligger en bit utöver vad som förutsätts i den här boken, att detta medför att det finns en funktion  $g$  som har egenskapen att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}_n(\omega) - g(\omega)|^2 d\omega = 0.$$

Denna funktion  $g$  kallas fouriertransformen till funktionen  $f$  och betecknas  $\hat{f}$  eller  $\mathcal{F}f$ .

EXEMPEL 5.8.2. Enligt exempel 5.7.2 är

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{t}{1+t^2} e^{-i\omega t} d\omega = -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

Detta betyder att

$$\mathcal{F}\left[\frac{t}{1+t^2}\right](\omega) = -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn} \omega.$$

Observera att funktionen  $t/(1+t^2)$  tillhör  $L^2(\mathbf{R})$  men inte  $L^1(\mathbf{R})$ . □

Identiteten i sats 5.8.2 kan nu utvidgas till att gälla för hela  $L^2(\mathbf{R})$ .

**Sats 5.8.3** (Plancherels formler). För alla funktioner  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$  är

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ \text{(ii)} \quad & \int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

*Bevis.* Med beteckningarna ovan gäller att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 = 0.$$

Härav följer med hjälp av triangelolikheten

$$\|f\|_2 - \|f - f_n\|_2 \leq \|f_n\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f\|_2$$

att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$ , och på motsvarande sätt att  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ . Men enligt sats 5.8.2 är  $\|\hat{f}_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_n\|_2$ , så det följer att

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2,$$

vilket är ekvivalent med likheten (i).

Den polariserade versionen (ii) följer av (i) om man uttrycker den inre produkten med hjälp av normen som i beviset för Parsevals formler.  $\square$

## Övningar

5.15 Funktionen  $f$  definieras av att  $f(t) = (2 - |t|) \cdot \chi_{[-2,2]}(t)$ .

- Beräkna fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .
- Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

5.16 Använd fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-|t|} \cos t$  för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} d\omega.$$

5.17 Definiera funktionen  $f$  genom att sätta  $f(t) = (1 - t^2) \cdot \chi_{[-1,1]}(t)$

- Bestäm fouriertransformen  $\hat{f}$ .
- Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin t - t \cos t)^2}{t^6} dt.$$

5.18 Låt  $f$  vara en funktion som är lika med noll överallt utom på intervallen  $[n, n + 2n^{-3}]$  för  $n = 1, 2, 3, \dots$ , där funktionens graf är en likbent triangel med intervallet som bas och höjden  $n$ . Visa att  $f$  tillhör  $L^1(\mathbf{R})$  men inte  $L^2(\mathbf{R})$ .

5.19 Visa att varje begränsad funktion i  $L^1(\mathbf{R})$  tillhör  $L^2(\mathbf{R})$ .

5.20 Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och definiera en ny funktion  $g$  genom att sätta

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \overline{f(t-x)} dt.$$

Bestäm  $\hat{g}(\omega)$ .

(Inom signalteorin kallas  $g$  *autokorrelationsfunktionen* till  $f$ .)

5.21 Definiera funktionen  $f$  genom att sätta

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } |t| \leq 1, \\ 2 - |t| & \text{för } 1 < |t| \leq 2, \\ 0 & \text{för } |t| > 2. \end{cases}$$

a) Bestäm fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .

b) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos t - \cos 2t)^2}{t^4} dt.$$

c) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t - \cos 2t}{t^2} e^{-|t|} dt.$$

5.22 a) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

b) Bestäm fouriertransformen till funktionen  $g$  om

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq -1, \\ (t+1)e^{-t} & \text{för } -1 \leq t \leq 1, \\ 2e^{-t} & \text{för } t \geq 1. \end{cases}$$

c) Bestäm fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  om funktionen  $f$  uppfyller likheten

$$ef(t+1) - e^{-1}f(t-1) = g(t),$$

där  $g$  är funktionen i b).

d) Beräkna  $L^2$ -normen  $\|f\|_2$  för funktionen  $f$  i c).

## 5.9 Poissons summationsformel

Låt  $f$  vara en kontinuerlig funktion med reella axeln som definitionsområde och antag att  $f(t) = O(1/|t|^{1+\delta})$  för någon positiv konstant  $\delta$  då  $t \rightarrow \pm\infty$ . Antagandena medför att funktionen  $f$  ligger i  $L^1(\mathbf{R})$ , så funktionen har en fouriertransform  $\hat{f}$ .

Betrakta nu summan

$$F(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n).$$

Vi påstår att serien är konvergent för alla  $t \in \mathbf{R}$  samt att summan är en kontinuerlig,  $2\pi$ -periodisk funktion. Att summan är periodisk är uppenbart, så därför räcker det att visa att serien är konvergent för  $0 \leq t \leq 2\pi$  samt att summafunktionen  $F$  är kontinuerlig där. Men våra antaganden medför att  $|f(t + 2\pi n)| \leq C/|n|^{1+\delta}$  för  $0 \leq t \leq 2\pi$ , så därför är serien konvergent och summan  $F(t)$  kontinuerlig på intervallet  $[0, 2\pi]$  enligt korollarium 2.2.5

Funktionen  $F$  har således en fourierserie, och följande räkning ger oss fourierkoefficienterna  $\hat{F}(k)$  till  $L^1(\mathbf{T})$ -funktionen  $F$  uttryckta i termer av fouriertransformen  $\hat{f}$  till  $L^1(\mathbf{R})$ -funktionen  $f$ :

$$\begin{aligned} \hat{F}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2\pi n) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2\pi n) e^{-ik(t+2\pi n)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k). \end{aligned}$$

(Bytet av summations- och integrationsordning, som var nödvändigt för att erhålla den andra likheten i ovanstående kedja av likheter, är tillåtet på grund av sats 2.4.3.)

Vi har med andra ord kommit fram till att

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(t + 2\pi n) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{int},$$

och eftersom funktionen i vänsterledet är kontinuerlig kan vi ersätta  $\sim$  med äkta likhet  $=$  i varje punkt  $t$  där fourierserien i högerledet är konvergent.

För  $t = 0$  får vi speciellt likheten

$$(5.5) \quad 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(2\pi n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n),$$

som alltså gäller om serien i högerledet är konvergent. Observera att summan i högerledet ska tolkas som gränsvärdet av symmetriska partialsummor, dvs.

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n).$$

Ett enkelt variabelbyte leder nu fram till följande resultat:

**Sats 5.9.1** (Poissons summationsformel). *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig och att det finns två konstanter  $C > 0$  och  $\delta > 0$  sådana att  $|f(t)| \leq C/|t|^{1+\delta}$  för alla  $t$ . Låt vidare  $L$  vara ett positivt tal. Då är*

$$\frac{2\pi}{L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(2\pi \frac{n}{L}\right) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(nL)$$

*förutsatt att summan i högerledet, uppfattad som gränsvärdet av de symmetriska partialsummorna, är konvergent.*

*Bevis.* Likheten följer genom att tillämpa formel (5.5) på funktionen  $g(t) = L^{-1}f(L^{-1}t)$  som uppfyller de nödvändiga förutsättningarna för formeln.  $\square$

## Övningar

5.23 Använd Poissons summationsformel och fouriertransformen till funktionen  $f(t) = e^{-|t|}$  för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+an^2},$$

där  $a > 0$ .

5.24 Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $\mathbf{R}$ ,  $|f(t)| \leq t^{-2}$  för  $|t| \geq 1$  och  $\hat{f}(n) = 0$  för alla heltal  $n$ . Sätt

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi).$$

Visa att  $g(t) = 0$  för alla  $t$ .

## 5.10 Fourieranalys i högre dimensioner

I många tillämpningar är förekommande funktioner flervariabelfunktioner vilket är en anledning till att utveckla fourieranalys också för sådana funktioner. Dessbättre är det mycket enkelt att generalisera definitionen av fouriertransformen till funktioner på  $\mathbf{R}^n$ , och de flesta resultaten i det här kapitlet gäller med lämplig tolkning i den nya situationen och med i stort sett oförändrade bevis. Vi nöjer oss därför här med att ge själva definitionen samt med att formulera några av de viktigare resultaten.

Vi skriver

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx$$

för integralen av en funktion  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$  över hela  $\mathbf{R}^n$ , och rummet av alla integrerbara funktioner  $f$  som uppfyller villkoret

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| dx < \infty$$

betecknas  $L^1(\mathbf{R}^n)$ .

För  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  och  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  i  $\mathbf{R}^n$  sätter vi vidare  $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  och  $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ , dvs.  $x \cdot y$  är den vanliga skalärprodukten på  $\mathbf{R}^n$  och  $|x|$  är längden av vektorn  $x$ .

**Definition.** För  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$  och  $\omega \in \mathbf{R}^n$  sätter vi

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx$$

och kallar funktionen  $\hat{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$  *fouriertransformen* till  $f$ .

Fouriertransformen till en  $L^1(\mathbf{R}^n)$ -funktion är kontinuerlig; mer precist gäller:

**Sats 5.10.1.** Låt  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ . Då är fouriertransformen  $\hat{f}$  en kontinuerlig funktion,  $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$  för alla  $\omega$  och  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$ .

Fouriertransformen till linjärkombinationer, translater, produkter med en komplex exponentialfunktion och faltningar fås med hjälp av följande sats.

**Sats 5.10.2.** Antag att  $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ . Då är

- (a)  $\widehat{(\alpha f + \beta g)}(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$  för alla  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ,
- (b)  $\widehat{f(x-a)}(\omega) = \hat{f}(\omega) e^{-ia \cdot \omega}$  för alla  $a \in \mathbf{R}^n$ ,
- (c)  $\widehat{(e^{ia \cdot x} f)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$  för alla  $a \in \mathbf{R}^n$ ,
- (d)  $\widehat{(f * g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$ .

Nästa sats som generaliserar sats 5.4.1, innebär att fouriertransformen bestämmer kontinuerliga  $L^1(\mathbf{R}^n)$ -funktioner entydigt.

**Sats 5.10.3.** Antag att  $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$  och att  $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}^n$ . Då är  $f(x) = g(x)$  i alla punkter  $x$  där de båda funktionerna är kontinuerliga.

Det som gör fouriertransformen till ett användbart verktyg i teorin för partiella differentialekvationer är att derivering (med avseende på  $x_j$ ) omvandlas till något mycket enklare, nämligen multiplikation (med  $i\omega_j$ ).

**Sats 5.10.4.** Om  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$  är kontinuerligt differentierbar och den partiella derivatan  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  också tillhör  $L^1(\mathbf{R}^n)$ , så är

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\omega) = i\omega_j \hat{f}(\omega).$$

För  $L^1(\mathbf{R}^n)$ -funktioner  $f$  vars fouriertransform också tillhör  $L^1(\mathbf{R}^n)$ , kan vi rekonstruera  $f$  från dess fouriertransform med hjälp av följande inversions-sats.

**Sats 5.10.5.** Antag att  $f$  och  $\hat{f}$  båda ligger i  $L^1(\mathbf{R}^n)$ . Då är

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega$$

i alla punkter  $x$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.

För  $L^2$ -funktioner konstruerar man fouriertransformen genom utvidgning:

**Sats 5.10.6.** Det finns en unik kontinuerlig linjär avbildning

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$$

som sammanfaller med fouriertransformen på delrummet  $L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ . För alla funktioner  $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$  gäller vidare Plancherels likhet:

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\mathcal{F}f\|_2^2.$$

## 5.11 Fouriertransformen för mått

Det är också möjligt att definiera en fouriertransform för andra objekt än funktioner, och allra enklast är det att utvidga definitionen till att också gälla för ändliga mått såsom Diracmåttet och allmänna sannolikhetsmått.

Vi erinrar om att ett ändligt mått  $\mu$  är en kontinuerlig linjär funktional som till att börja med är definierad för alla funktioner  $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ , dvs. kontinuerliga funktioner  $\phi$  som går mot noll i oändligheten, och att vi för funktionalvärdet  $\mu(\phi)$  använder integralbeteckningen

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t) d\mu(t).$$

Definitionsområdet för måttet kan utvidgas till en klass av funktioner som innehåller alla begränsade kontinuerliga funktioner, och eftersom funktionerna  $e^{-i\omega t}$  är kontinuerliga och begränsade kan vi nu helt sonika definiera fouriertransformen  $\hat{\mu}(\omega)$  av måttet  $\mu$  som

$$\hat{\mu}(\omega) = \mu(e^{-i\omega t}) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i\omega t} d\mu(t).$$



Fouriertransformen  $\hat{\mu}$  blir därigenom en kontinuerlig och begränsad funktion på  $\mathbf{R}$ .

Definitionen generaliserar definitionen av fouriertransformen för absolutintegrabla funktioner, ty en sådan funktion  $f$  svarar som mått mot måttet  $f(t) dt$ , och detta mått har enligt definitionen ovan fouriertransformen

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

som är den vanliga fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$ .

Diracmättet  $\delta_a$  i punkten  $a$  får fouriertransformen

$$\hat{\delta}_a(\omega) = \delta_a(e^{-i\omega t}) = e^{-ia\omega},$$

och speciellt är alltså  $\hat{\delta}(\omega) = 1$  för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ .

Om  $\mu$  och  $\nu$  är två mått, så definierar vi deras *faltning*  $\mu * \nu$  som det mått som uppfyller likheten

$$\mu * \nu(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} \phi(s+t) d\mu(s) \right) d\nu(t)$$

för alla kontinuerliga funktioner  $\phi$ . För mått av typen  $f(t) dt$  är den nya definitionen konsistent med definitionen av faltning för funktioner.

Faltningen är kommutativ, och det är lätt att verifiera att

$$\mu * \delta = \delta * \mu = \mu$$

för alla mått  $\mu$ . Diracmättet  $\delta$  fungerar alltså som multiplikativ enhet för faltning.

Insättning av  $\phi(t) = e^{-i\omega t}$  i faltningsdefinitionen leder vidare till likheten

$$\widehat{\mu * \nu}(\omega) = \hat{\mu}(\omega) \hat{\nu}(\omega).$$



## Kapitel 6

# Tillämpningar på fouriertransformen

### 6.1 Värmeledningsekvationen på $\mathbf{R}$

I kapitel 4 studerade vi värmeledningsproblemet för en ändlig stav. Nu ska vi studera motsvarande problem för en oändlig stav som vi modellerar som reella axeln. Antag att begynnelsetemperaturen i punkten  $x$  vid tiden  $t = 0$  är  $f(x)$ , och låt  $u(x, t)$  beteckna temperaturen i samma punkt vid tiden  $t$ . Det följer med samma resonemang som i avsnitt 4.3 att funktionen  $u$  satisfierar den partiella differentialekvation

$$(pd) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

för  $x \in \mathbf{R}$  och  $t > 0$  och uppfyller begynnelsevillkoret

$$u(x, 0) = f(x)$$

för alla  $x \in \mathbf{R}$ .

Vi ska härleda en lösning  $u$  till problemet och räknar till en början helt formellt. Låt för den skull  $\hat{u}(\omega, t)$  beteckna fouriertransformen till funktionen  $u(\cdot, t)$  så att

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{\mathbf{R}} u(x, t) e^{-ix\omega} dx.$$

Derivering under integraltecknet ger att

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-ix\omega} dx = \mathcal{F}_x \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\omega),$$

där  $\mathcal{F}_x$  betecknar fouriertransformering med avseende på variabeln  $x$ . Formeln för andraderivatans fouriertransform ger oss å andra sidan att

$$\mathcal{F}_x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}_x(u)(\omega) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t),$$

så genom att fouriertransformera den givna partiella differentialekvationen erhåller vi följande ordinära differentialekvation i variabeln  $t$ :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega, t) = -\kappa\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

med lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = C(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t}.$$

På grund av begynnelsevillkoret  $u(x, 0) = f(x)$  är vidare

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),$$

vilket innebär att integrationskonstanten  $C(\omega)$  är lika med  $\hat{f}(\omega)$  och att följaktligen

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t}.$$

Vi erinrar nu om värmeledningskärnan

$$H_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-x^2/2\tau}$$

som vi introducerade avsnitt 5.5, och vars fouriertransform är

$$\hat{H}_\tau(\omega) = e^{-\tau\omega^2/2}.$$

I termer av den är tydligen

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega)\hat{H}_{2\kappa t}(\omega),$$

och enligt faltningsformeln är därför

$$u(x, t) = (f * H_{2\kappa t})(x).$$

Genom att precisera förutsättningarna i ovanstående informella härledning erhåller vi följande sats.

**Sats 6.1.1.** *Antag att  $f \in L^1(\mathbf{R})$  och sätt*

$$u(x, t) = (f * H_{2\kappa t})(x)$$

för  $t > 0$  och  $x \in \mathbf{R}$ , där  $H_\tau$  är värmeledningskärnan. Då är funktionen  $u$  oändligt deriverbar i övre halvplanet  $x \in \mathbf{R}$ ,  $t > 0$  och en lösning till värmeledningsekvationen (pd). I varje punkt  $x$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig, konvergerar  $u(x, t)$  mot  $f(x)$  då  $t \rightarrow 0$ .

*Bevis.* (i) Enligt sats 5.6.3 är

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega.$$

För  $t > 0$  kan vi nu utan problem derivera partiellt under integraltecknet ett obegränsat antal gånger med avseende på såväl  $x$  som  $t$  beroende på att  $e^{-\kappa\omega^2 t}$  avtar så snabbt då  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Funktionen  $u$  är därför oändligt deriverbar i övre halvplanet. Eftersom funktionerna  $e^{-\kappa\omega^2 t} e^{i\omega x}$  satisfierar värmeledningsekvationen för varje fixt  $\omega$ , följer det genom derivering under integraltecknet att också funktionen  $u(x, t)$  satisfierar värmeledningsekvationen. Att  $u(x, t) \rightarrow f(x)$  då  $t \rightarrow 0$  i kontinuitetspunkterna till  $f$  är en omedelbar konsekvens av sats 5.7.1.  $\square$

*Anmärkning.* Villkoren i sats 6.1.1 garanterar att värmeledningsekvationen (pd) är lösbar, men de är inte tillräckliga för att lösningen ska vara entydigt bestämd. För entydighet behöver man ställa krav på lösningens uppförande då  $x$  går mot oändligheten.

## 6.2 Samplingsatsen

En analog signal som modelleras av en funktion  $f$ , säges vara *bandbegränsad* till intervallet  $]a, b[$  om signalens spektrum ligger i intervallet, dvs. om fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  är lika med noll för alla  $\omega$  utanför intervallet  $]a, b[$ . Intervallets längd  $b - a$  kallas signalens *bandbredd*. Vi antar i det här avsnittet för enkelhets skull att funktionen  $f$  är kontinuerlig och att det finns konstanter  $C > 0$  och  $\alpha > 1$  sådana att  $|f(t)| \leq C|t|^{-\alpha}$  för alla  $t$ , något som förstås medför att funktionen  $f$  tillhör vår klass  $L^1(\mathbf{R})$ .

Den teoretiska grundvalen för digital teknik för inspelning, lagring och avspelnning av akustiska signaler finns i följande sats.

**Sats 6.2.1** (Samplingsatsen). *En kontinuerlig signal med bandbredd  $2L$  är entydigt bestämd av signalens värden i de diskreta tidpunkterna  $n\pi/L$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .*

*Bevis.* Vi noterar först att vi utan inskränkning kan anta att bandbegränsningsintervallet är symmetriskt kring origo, dvs. är intervallet  $]-L, L[$ . Om signalen  $f$  har sitt spektrum i ett godtyckligt intervall  $]a, b[$  av längd  $2L$  och  $m$  betecknar intervallets mittpunkt, så har nämligen den kontinuerliga signalen  $g(t) = e^{-imt} f(t)$  sitt spektrum i intervallet  $]-L, L[$  eftersom  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega + m)$ , och vi kan uppenbarligen rekonstruera  $f$  från värdena i punkterna  $n\pi/L$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , om vi kan rekonstruera signalen  $g$  från samma värden.

Anta alltså att  $f$  är bandbegränsad till intervallet  $I = ]-L, L[$ . Eftersom fouriertransformen till en  $L^1(\mathbf{R})$ -funktion är kontinuerlig och  $\hat{f}(\omega) = 0$  utanför det begränsade intervallet  $I$ , ligger  $\hat{f}$  i  $L^1(\mathbf{R})$ . Inversionsatsen ger oss därför likheten

$$(6.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

För att bevisa satsen räcker det därför att visa att fouriertransformen  $\hat{f}(\omega)$  är entydigt bestämd av funktionens värden i samplingspunkterna. Vi

använder för den skull Poissons summationsformel (sats 5.9.1) med  $L$  bytt mot  $2L$  på funktionen  $h(t) = f(t)e^{-i\omega t}$ , där  $\omega$  är ett tal i intervallet  $I$ , och får likheten

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{h}(2nL) = \frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h\left(\frac{n\pi}{L}\right).$$

Eftersom  $\hat{h}(2nL) = \hat{f}(2nL + \omega)$  och fouriertransformen  $\hat{f}$  är noll utanför intervallet  $I = ]-L, L[$  och punkterna  $2nL + \omega$  ligger i intervallet  $I$  bara för  $n = 0$ , är

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{h}(2nL) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(2nL + \omega) = \hat{f}(\omega).$$

Summationsformeln övergår därför för  $|\omega| < L$  i likheten

$$(6.2) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega n\pi/L},$$

som visar att fouriertransformen är entydigt bestämd av funktionens värden i punkterna  $n\pi/L$ .  $\square$

En bandbegränsad signal kan rekonstrueras från samplingsvärdena med hjälp av rekonstruktionsformeln i följande sats.

**Sats 6.2.2.** *Antag att  $f$  är en kontinuerlig signal som är bandbegränsad till intervallet  $]-L, L[$ . Då är*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}$$

för alla  $t \in \mathbf{R}$ .

*Bevis.* Vi får den sökta formeln för  $f(t)$  genom att sätta in det i formel (6.2) erhållna uttrycket för  $\hat{f}(\omega)$  i inversionsformeln (6.1) och sedan byta ordning mellan integration och summation, något som är tillåtet eftersom serien  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)$  är absolutkonvergent på grund av våra antaganden om storleksordningen hos funktionen  $f$  i oändligheten:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{\pi}{L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{i(t-n\pi/L)\omega} d\omega = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \int_{-L}^L e^{i(t-n\pi/L)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{2 \sin(Lt - n\pi)}{t - n\pi/L} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lt - n\pi)}{Lt - n\pi}. \end{aligned} \quad \square$$

För att vi ska kunna använda rekonstruktionsformeln krävs det att signalen har ändlig bandbredd. Men vilka analoga signaler har ändlig bandbredd? Egentligen inga fysiska signaler, ty en sådan signal varar ju bara under ett ändligt tidsintervall och ska då egentligen modelleras med en funktion  $f$  som är noll utanför ett begränsat intervall. Och en sådan funktion som inte är

identiskt lika med noll, kan inte ha en fouriertransform  $\hat{f}$  som är noll utanför ett ändligt intervall.

I praktiken spelar dock detta inte någon roll. Det mänskliga örat kan inte uppfatta ljud med högre frekvens än 20 kHz. Med tiden  $t$  angiven i sekunder har signalen  $e^{i\omega t}$  frekvensen  $|\omega|/2\pi$  Hz och den är således ohörbar om  $|\omega| > 40\,000\pi$ . Alla hörbara signaler kan därför anses ha sitt spektrum i intervallet  $] -40\,000\pi, 40\,000\pi[$  och därmed ha en bandbredd som inte överstiger  $80\,000\pi$ . För perfekt ljudåtergivning räcker det därför att sampla signalen i diskreta tidpunkter med tidsavståndet  $\Delta t = 1/40\,000$  sekund, dvs. med samplingsfrekvensen 40 kHz. Vanliga CD-spelare använder samplingsfrekvensen 44.1 kHz.

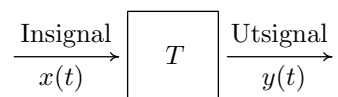
### Övning

- 6.1 Antag att funktionen  $f$  är kontinuerlig och lika med noll utanför ett begränsat intervall samt att fouriertransformen  $\hat{f}$  också är noll utanför något begränsat intervall. Visa att  $f$  är lika med noll överallt.

[Ledning: Antag utan inskränkning att  $f$  är noll utanför intervallet  $[0, \pi]$ , och låt  $F$  vara restriktionen av  $f$  till intervallet  $[0, 2\pi]$ . Visa genom att beräkna fourierkoefficienterna att  $F$  är ett trigonometriskt polynom, vilket är orimligt om inte  $F(t) = 0$  för alla  $t$ .]

## 6.3 Linjära tidsinvarianta system

I inledningskapitlet exemplifierade vi begreppet (diskret) faltning med diskreta svarta lådor. Nu ska vi diskutera den analoga motsvarigheten, dvs. system eller apparater som tar emot kontinuerliga signaler, processar dem på något sätt och levererar kontinuerliga utsignaler. Vi är fortfarande inte intresserade av vad som händer inuti systemet/apparaten utan betraktar det som en funktion  $T$  med mängden av alla möjliga insignaler som definitionsmängd. Sambandet mellan insignal  $x$  och utsignal  $y$  har följaktligen formen  $y = T(x)$ , och vi kan beskriva det hela schematiskt med figur 6.1.



**Figur 6.1.** Analog svart låda

Ett sådant system kallas *linjärt* om funktionen  $T$  är linjär, dvs. om

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$$

för alla insignaler  $x_1$  och  $x_2$  och alla skalärer  $a_1$  och  $a_2$ .

Inga verkliga apparater kan naturligtvis vara fullständigt linjära, men många kan med god approximation anses vara linjära inom sina begränsade funktionsområden.

Om ett system fungerar på samma sätt oavsett när det används, kallas det tidsinvariant. För att formulera egenskapen matematisk låter vi  $x_\tau$  beteckna den med  $\tau$  enheter translaterade signalen  $x$ , dvs.  $x_\tau(t) = x(t - \tau)$ . Systemet  $T$  är då *tidsinvariant* om

$$T(x_\tau) = T(x)_\tau$$

för alla signaler  $x$  och alla  $\tau \in \mathbf{R}$ . Om insignalen  $x(t)$  ger upphov till utsignalen  $y(t)$ , så ska alltså den translaterade insignalen  $x(t - \tau)$  resultera i utsignalen  $y(t - \tau)$ .

System som är både linjära och tidsinvarianta kallas *LTI-system*. Exempel på apparater som kan modelleras som LTI-system är digitala förstärkare och filter.<sup>1</sup>

EXEMPEL 6.3.1. Ett system där utsignalens värde varje tidpunkt  $t$  är medelvärdet av insignalen under tidsintervallet  $[t - 1, t + 1]$ , dvs. där sambandet mellan insignal  $x$  och utsignal  $y$  ges av ekvationen

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} x(s) ds,$$

är ett LTI-system.

Sambandet mellan ut- och insignal kan uttryckas som en faltning. Variabelsubstitutionen  $s = t - u$  i integralen ger nämligen att

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(t - u) du = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} x(t - u) \chi_{[-1,1]}(u) du,$$

så  $y = k * x$  för funktionen  $k = \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}$ . □

EXEMPEL 6.3.2. Ett system där utsignalens värde vid varje tidpunkt  $t$  är lika med medelvärdet av insignalens värden vid tidpunkterna  $t - 1$  och  $t + 1$ , dvs. där

$$y(t) = \frac{x(t - 1) + x(t + 1)}{2},$$

är också ett LTI-system. Även i detta fall kan vi skriva sambandet mellan ut- och insignal som en faltning  $y = k * x$ , men nu behöver vi använda oss av Diracmättet för att definiera  $k$ . För Diracmättet  $\delta_a$  i punkten  $a$  är  $\delta_a * x(t) = x(t - a)$ , så faltningssambandet gäller för  $k = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$ . □

<sup>1</sup>Ett filter är en komponent som släpper igenom signaler vars frekvenser ligger inom ett givet intervall och kraftigt reducerar övriga signaler.



Låt  $T$  vara ett LTI-system som kan processa sinusoider och deras komplexa motsvarigheter, dvs. de komplexa exponentialfunktionerna, och låt  $y^\omega(t)$  beteckna utsignalen till insignalen  $e^{i\omega t}$ . Vi ska titta på utsignalen till den translaterade insignalen  $e^{i\omega(t-\tau)}$ . Eftersom

$$e^{i\omega(t-\tau)} = e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t}$$

är utsignalen dels lika med  $y^\omega(t-\tau)$  på grund av tidsinvarians, dels lika med  $e^{-i\omega\tau} y^\omega(t)$  på grund av linearitet. Det följer att

$$y^\omega(t-\tau) = e^{-i\tau\omega} y^\omega(t)$$

för alla  $\tau$  och alla  $t$ , och genom att speciellt välja  $t = 0$  och sedan byta  $\tau$  mot  $-\tau$  ser vi att

$$T(e^{i\omega t}) = y^\omega(t) = y^\omega(0)e^{i\omega t}.$$

Funktionerna  $e^{i\omega t}$  är med andra ord egenfunktioner till avbildningen  $T$  med  $K(\omega) = y^\omega(0)$  som motsvarande egenvärden. Sammanfattningsvis har vi därmed visat följande sats.

**Sats 6.3.1.** För LTI-system  $T$  är de komplexa exponentialfunktionerna  $e^{i\omega t}$  egenfunktioner, dvs. det finns en funktion  $K(\omega)$  med egenskapen att

$$T(e^{i\omega t}) = K(\omega)e^{i\omega t}.$$

Funktionen  $K(\omega)$  kallas systemets frekvenssvar.

EXEMPEL 6.3.3. För LTI-systemet i exempel 6.3.1 resulterar insignalen  $e^{i\omega t}$  i utsignalen

$$y^\omega(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} e^{i\omega s} ds.$$

Frekvenssvaret är därför

$$K(\omega) = y^\omega(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\omega s} ds = \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Den uppmärksamme läsaren noterar nu att frekvenssvaret  $K(\omega)$  är fouriertransform till funktionen  $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$ , dvs. till den funktion  $k$  som gör att sambandet mellan in- och utsignal kan skrivas som en faltning  $y = k * x$ .  $\square$

EXEMPEL 6.3.4. Frekvenssvaret i LTI-systemet i exempel 6.3.2 är på motsvarande vis

$$K(\omega) = \frac{1}{2}(e^{-i\omega} + e^{i\omega}) = \cos \omega,$$

och även i det här exemplet är frekvenssvaret lika med fouriertransformen till  $k = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$  i faltningssambandet  $y = k * x$  mellan in- och utsignal.  $\square$

Alla system i vilka sambandet mellan in- och utsignal ges av en faltning, är LTI-system.

**Sats 6.3.2.** Låt  $k$  vara en funktion eller mer allmänt ett mått. Då definierar faltningen  $y = k * x$  ett LTI-system med  $x$  som insignal och  $y$  som utsignal.

Det är underförstått att de tillåtna insignalerna är de funktioner som gör faltningen väldefinierad.

*Bevis.* Både linearitet och tidsinvarians följer omedelbart från faltningsdefinitionen  $y(t) = k * x(t) = \int_{\mathbf{R}} k(t-u)x(u) du$ .  $\square$

I LTI-systemet  $y = k * x$  kallas  $k$  systemets *impulssvar*, och anledningen är att insignalen  $\delta$  (en impuls) ger  $y = k * \delta = k$  som utsignal.

Att LTI-systemen i exemplen ovan kan skrivas som faltningar och att frekvenssvaret  $K(\omega)$  ges av fouriertransformen till impulssvaret  $k$  är ingen tillfällighet, utan motsvarande gäller under tämligen allmänna förhållanden som följande heuristiska resonemang visar.

Låt  $T$  vara ett LTI-system vars frekvenssvar  $K(\omega)$  är fouriertransform till någon funktion  $k$  (eller mer generellt till något mått  $k$ ), och betrakta en insignal  $x(t)$  med fouriertransform  $\hat{x}(\omega)$ . Antag att signalen kan rekonstrueras från fouriertransformen med hjälp av inversionssatsen, dvs. att

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

att motsvarande gäller för signalen  $k * x(t)$ , samt att LTI-systemet  $T$  är kontinuerligt i den bemärkelsen att linearitetsegenskapen kan utsträckas från att gälla för ändliga summor av insignaler till ”oändliga summor” i form av integraler. Då är

$$\begin{aligned} T(x)(t) &= T\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} T(\hat{x}(\omega) e^{i\omega t}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) T(e^{i\omega t}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{x}(\omega) K(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{k}(\omega) \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{k * x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= k * x(t). \end{aligned}$$

En önskvärd egenskap hos många verkliga system är att de ska vara stabila. Det finns flera olika stabilitetsbegrepp i bruk, men det vanligaste är följande.

**Definition.** Ett LTI-system kallas *BIBO-stabilt* om utsignalen är begränsad för varje begränsad insignal. BIBO står för ”bounded input-bounded output”.

**Sats 6.3.3.** LTI-systemet  $y = k * x$ , där  $k$  är en funktion, är BIBO-stabilt om och endast om funktionen  $k$  är absolutintegrabel.

*Bevis.* Att systemet är BIBO-stabilt om  $k \in L^1(\mathbf{R})$  följer av olikheten

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} k(s)x(t-s) ds \right| \leq \int_{\mathbf{R}} |k(s)||x(t-s)| ds \leq \int_{\mathbf{R}} |k(s)| \sup_{s \in \mathbf{R}} |x(s)| ds \\ &= \|k\|_1 \sup_{s \in \mathbf{R}} |x(s)|, \end{aligned}$$

som visar att utsignalen är begränsad för alla begränsade insignaler.

Antag omvänt att systemet är BIBO-stabilt och låt  $x(t)$  vara den insignal som fås genom att sätta  $x(t) = \overline{k(-t)}/|k(-t)|$  om  $k(-t) \neq 0$  och  $x(t) = 0$  om  $k(-t) = 0$ . Insignalen  $x(t)$  är då till beloppet begränsad av 1, så motsvarande utsignal  $y(t)$  är begränsad. Eftersom

$$y(0) = \int_{\mathbf{R}} k(s)x(-s) ds = \int_{\mathbf{R}} |k(s)| ds = \|k\|_1,$$

är  $\|k\|_1 < \infty$ . □

EXEMPEL 6.3.5. Ett lågpasfilter är ett filter som släpper igenom signaler med frekvenser som understiger ett givet värde  $a$  och reducerar övriga signaler. Ett LTI-system med följande frekvenssvar

$$K(\omega) = \chi_{[-a,a]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{om } |\omega| \leq a \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

skulle därför vara ett perfekt lågpasfilter eftersom systemet annihilerar signaler med frekvenser som överstiger  $a$  fullständigt. Motsvarande impuls svar  $k$ , dvs. den funktion som har  $K$  som fouriertransform, är funktionen  $\sin at/\pi t$  och den är inte absolutintegrabel. Ett idealt lågpasfilter är därför inte BIBO-stabilt. □

Ideala lågpasfilter går heller inte att realisera i praktiken, bl. a. av det skälet att det inte fungerar i realtid. För system som fungerar i realtid kan utsignalens värde i en punkt  $t$  bara bero av insignalens värden i tidpunkter upp till och med  $t$ . Sådana system kallas *kausala*. Ett system  $T$  är med andra ord kausalt om

$$x(s) = z(s) \text{ för } s \leq t \Rightarrow T(x)(t) = T(z)(t)$$

för alla  $t$ . För linjära system  $T$  är detta ekvivalent med att

$$x(s) = 0 \text{ för } s \leq t \Rightarrow T(x)(t) = 0.$$

**Sats 6.3.4.** Ett faltningssystem är kausalt om och endast om det kan skrivas på formen

$$y(t) = \int_0^\infty k(s)x(t-s) ds.$$

*Bevis.* Antag först att systemet  $T$  har den formen, och låt  $x$  vara en insignal sådan att  $x(s) = 0$  för  $s \leq t$ . Då är

$$T(x)(t) = \int_0^\infty k(s)x(t-s) ds = \int_0^\infty k(s) \cdot 0 ds = 0$$

vilket visar att systemet är kausalt.

Antag omvänt att systemet  $y = T(x) = k * x$  är kausalt. För alla signaler  $x$  med  $x(s) = 0$  för  $s \leq 0$  är då är

$$0 = T(x)(0) = \int_{\mathbf{R}} k(s)x(0-s) ds = \int_{-\infty}^0 k(s)x(-s) ds,$$

och eftersom  $x(-s)$  kan väljas godtyckligt för  $s < 0$  medför detta att  $\int_{-\infty}^0 k(s)f(s) ds = 0$  för alla funktioner  $f$ . Speciellt är därför

$$\begin{aligned} T(x)(t) &= \int_{\mathbf{R}} k(s)x(t-s) ds = \int_{-\infty}^0 k(s)x(t-s) ds + \int_0^\infty k(s)x(t-s) ds \\ &= \int_0^\infty k(s)x(t-s) ds \end{aligned}$$

för alla insignaler  $x$ . □

EXEMPEL 6.3.6. Inga av systemen i exemplen 6.3.1, 6.3.2 och 6.3.5 är kausala. □

## 6.4 Heisenbergs osäkerhetsprincip

Vi börjar med en olikhet som brukar kallas Heisenbergs olikhet eftersom den finns implicit i ett av hans kvantmekaniska arbeten.

**Sats 6.4.1** (Heisenbergs olikhet). *För alla funktioner  $f \in L^2(\mathbf{R})$  är*

$$(6.3) \quad \int_{\mathbf{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2.$$

*Mer generellt gäller att*

$$(6.4) \quad \int_{\mathbf{R}} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{\mathbf{R}} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} \left( \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2.$$

*för alla reella tal  $a, b$ .*

*Bevis.* Genom att använda olikheten (6.3) på funktionen

$$g(t) = e^{-ib(t+a)} f(t+a),$$

som har fouriertransformen

$$\hat{g}(\omega) = e^{iaw} \hat{f}(\omega + b)$$

ser man att olikheten (6.4) följer av olikheten (6.3).

Vi visar inte satsen i dess fulla generalitet, utan för att undvika tekniska svårigheter inskränker vi oss till fallet att funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar, att  $|f(t)| \leq \text{Konst} \cdot |t|^{-\alpha}$  för någon konstant  $\alpha > 1/2$  samt att derivatan  $f'$  tillhör rummet  $L^1(\mathbf{R})$ .

För att visa olikheten (6.3) kan vi vidare naturligtvis utan inskränkning anta att integralerna  $\int_{\mathbf{R}} t^2 |f(t)|^2 dt$  och  $\int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$  är ändliga. Av formeln  $\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$  och Plancherels formel följer då att derivatan  $f'$  är kvadratisk integrerbar. Genom att utnyttja att

$$\frac{d}{dt} |f(t)|^2 = \frac{d}{dt} (f(t)\overline{f(t)}) = f'(t)\overline{f(t)} + f(t)\overline{f'(t)} = 2 \operatorname{Re}(f(t)\overline{f'(t)})$$

får vi nu med hjälp av partiell integration:

$$\begin{aligned} (6.5) \quad \int_a^b |f(t)|^2 dt &= \left[ t|f(t)|^2 \right]_a^b - \int_a^b t \frac{d}{dt} |f(t)|^2 dt \\ &= b|f(b)|^2 - a|f(a)|^2 - 2 \operatorname{Re} \int_a^b t f(t)\overline{f'(t)} dt. \end{aligned}$$

Våra antaganden om storleksordningen hos funktionen  $f$  i oändligheten medför att  $t|f(t)|^2 \rightarrow 0$  då  $t \rightarrow \pm\infty$ . Genom gränsövergång  $b \rightarrow \infty$  och  $a \rightarrow -\infty$  i likheten (6.5) erhåller vi därför följande likhet.

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}} t f(t)\overline{f'(t)} dt.$$

Cauchy-Schwarz olikhet och Plancherels formel ger nu att

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt &= -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}} t f(t)\overline{f'(t)} dt \leq 2 \left| \int_{\mathbf{R}} t f(t)\overline{f'(t)} dt \right| \\ &\leq 2 \left( \int_{\mathbf{R}} |t f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{R}} |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= 2 \left( \int_{\mathbf{R}} |t f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( (2\pi)^{-1} \int_{\mathbf{R}} |\omega f(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

som efter kvadrering är olikheten (6.3). □

Vi ska nu ge en sannolikhetssteoretisk tolkning av Heisenbergs olikhet och erinrar då om att en *täthetsfunktion* är en icke-negativ funktion  $g$  sådan att  $\int_{\mathbf{R}} g(t) dt = 1$ , dvs. en icke-negativ funktion  $g \in L^1(\mathbf{R})$  med  $\|g\|_1 = 1$ .

Täthetsfunktioner  $g$  ger upphov till sannolikhetsmått på  $\mathbf{R}$ , och om  $\int_{\mathbf{R}} t^2 g(t) dt < \infty$ , så existerar väntevärdet

$$\mu = \int_{\mathbf{R}} t g(t) dt$$

och *variansen*

$$\text{Var}(g) = \int_{\mathbf{R}} (t - \mu)^2 g(t) dt = \int_{\mathbf{R}} t^2 g(t) dt - \mu^2.$$

Liten varians betyder att huvudparten av sannolikhetsmassan är lokaliserad till en liten omgivning av väntevärdet, medan stor varians innebär att sannolikhetsmassan är utsmetad över ett större intervall.

Låt nu  $f \in L^2(\mathbf{R})$  vara en funktion med norm  $\|f\|_2 = 1$ . Enligt Plancherels sats är då också  $\|(2\pi)^{-1/2}\hat{f}\|_2 = 1$ , och detta innebär att både  $|f|^2$  och  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$  är täthetsfunktioner till sannolikhetsmått. Om vi i sats 6.4.1 väljer konstanterna  $a$  och  $b$  som väntevärdena till  $|f|^2$  resp.  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$ , så får vi därför följande resultat för de båda sannolikhetsmåttens varians.

**Sats 6.4.2.** *Antag  $f \in L^2(\mathbf{R})$  och  $\|f\|_2 = 1$ . Då är*

$$\text{Var}(|f|^2) \cdot \text{Var}((2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{4}.$$

Resultatet innebär att de båda varianserna inte kan vara små samtidigt. Om tätheten  $|f|^2$  har en liten varians  $\delta$ , så har den duala tätheten  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$  en varians av minst storleksordningen  $1/\delta$ .

Heisenbergs olikhet har som nämnts sina rötter i kvantmekaniken. Inom kvantmekaniken beskrivs läge och rörelsemängd hos en elektron som rör sig utefter en linje av  $L^2(\mathbf{R})$ -funktioner. Varken läge eller rörelsemängd kan anges exakt utan det är enbart möjligt att ange sannolikheten för att elektronen ska befinna sig inom ett givet intervall och ha en rörelsemängd inom ett givet intervall. Positionssannolikheten har en täthetsfunktion av typen  $|f|^2$  med  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , medan täthetsfunktionen för rörelsemängd ges av  $(2\pi)^{-1}|\hat{f}|^2$ .

Om man använder positionsfördelningens väntevärde för att ange elektronens läge, så blir fördelningens standardavvikelse, dvs. kvadratroten ur variansen, ett mått på osäkerheten i positionsangivelsen. Ju mindre standardavvikelse desto mer sannolikt att elektronen befinner sig i ett intervall av given storlek kring väntevärdet. På motsvarande sätt blir standardavvikelsen hos täthetsfunktionen för rörelsemängden ett mått på osäkerheten då rörelsemängden anges av motsvarande väntevärde. Om  $\Delta x$  och  $\Delta p$  står för standardavvikelsena i positionsangivelsen resp. rörelsemängdsangivelsen, så blir därför den kvantmekaniska tolkningen av olikheten i sats 6.4.2 att

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq C,$$

där  $C$  är en konstant, och med rätt val av fysikaliska enheter är  $C = h/4\pi$ , där  $h$  är Plancks konstant. Olikheten visar att det är principiellt omöjligt att med godtyckligt stor precision samtidigt bestämma läge och rörelsemängd.

## 6.5 Centrala gränsvärdessatsen

Låt oss börja med att rekapitulera några grundläggande begrepp från sannolikhets teorin och samtidigt fixera den notation som vi kommer att använda oss av.

En reell *stokastisk variabel*  $X$  är en funktion som är definierad på något sannolikhetsrum. Vi kan därför meningsfullt tala om sannolikheten att  $X$  ska ha ett värde som ligger i en viss delmängd  $B$  av  $\mathbf{R}$ , och denna sannolikhet betecknas  $\Pr(X \in B)$ . Speciellt kan vi betrakta sannolikheten  $\Pr(X \leq x)$  att  $X$  ska vara mindre än eller lika med  $x$ , och detta ger oss den stokastiska variabelns (*kumulativa*) *fördelningsfunktion*  $F$ , som definieras av att

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

för alla  $x$ . Givet fördelningsfunktionen  $F$  kan vi omvänt bestämma sannolikheten  $\Pr(X \in B)$  för varje mängd  $B$  som kan erhållas genom upprepad union- och snittbildning av intervall.

Ett sätt att bilda fördelningsfunktioner är att utgå från en icke-negativ funktion  $f \in L^1(\mathbf{R})$  med  $\|f\|_1 = 1$  och sätta

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Funktionen  $f$  kallas då motsvarande stokastiska variabels *täthetsfunktion*.

Till varje stokastisk variabel  $X$  kan man associera en linjär s. k. *väntevärdesoperator*  $E_X$  som är definierad för en klass av funktioner som inkluderar alla begränsade styckvis kontinuerliga funktioner, och som för den karakteristiska funktionen  $\chi_{]-\infty, x]}$  till intervallet  $]-\infty, x]$  ges av att

$$E_X(\chi_{]-\infty, x]}) = F(x).$$

En stokastisk variabel  $X$  är således fullständigt bestämd av sin väntevärdesoperator  $E_X$ .

För stokastiska variabler med täthetsfunktion  $f$  är speciellt

$$E_X(g) = \int_{\mathbf{R}} g(t)f(t) dt,$$

för alla funktioner  $g$  som uppfyller villkoret  $\int_{\mathbf{R}} |g(t)|f(t) dt < \infty$ .

Om  $E_X(\text{id})$  existerar för den identiska funktionen  $\text{id}$ , dvs. funktionen som definieras av att  $\text{id}(t) = t$  för alla  $t$ , så sätter man

$$E(X) = E_X(\text{id})$$

och kallar  $E(X)$  för *väntevärdet* eller *medelvärdet* av den stokastiska variabeln  $X$ . För stokastiska variabler  $X$  med täthetsfunktion  $f$  är alltså speciellt

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} tf(t) dt$$

förutsatt att integranden  $tf(t)$  är absolutintegrabel.

Ett slående faktum av stor betydelse är att om  $X$  är en stokastisk variabel och  $g$  är en godtycklig funktion och vi definierar en ny stokastisk variabel  $Y$  genom att sätta  $Y = g(X)$ , så är

$$E(g(X)) = E_X(g),$$

om något av de två väntevärdena existerar. I det fall då  $X$  har täthetsfunktion  $f$ , är således speciellt

$$E(g(X)) = \int_{\mathbf{R}} g(t)f(t) dt.$$

Väntevärdena  $E(X^n)$  kallas i förekommande fall för den stokastiska variabeln  $X$ :s *moment av ordning  $n$* . Förstamomentet är tydligen lika med väntevärdet och betecknas ofta  $\mu$ . Om andramomentet existerar, så existerar automatiskt förstamomentet  $\mu$ , liksom *variansen*

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Låt nu  $X$  vara en godtycklig stokastisk variabel med väntevärdesoperator  $E_X$  och låt  $\omega \in \mathbf{R}$ . Eftersom funktionen  $t \mapsto e^{i\omega t}$  är begränsad, har den stokastiska variabeln  $e^{i\omega X}$  ett väntevärde, nämligen  $E(e^{i\omega X}) = E_X(e^{i\omega t})$ . Vi kan därför definiera en funktion  $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  genom att sätta

$$\phi(\omega) = E(e^{i\omega X}).$$

Probabilisterna kallar funktionen  $\phi$  för den stokastiska variabelns *karaktéristiska funktion*.<sup>2</sup>

Om den stokastiska variabeln  $X$  har en täthetsfunktion  $f$ , så är tydligen

$$\phi(\omega) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(-\omega),$$

vilket är förklaringen till att fourieranalys är ett viktigt hjälpmedel inom sannolikhets teorin.<sup>3</sup> Det följer av inversionssatsen att den karakteristiska funktionen  $\phi$  bestämmer täthetsfunktionen  $f$  och därmed också fördelningsfunktionen  $F$  entydigt.

Naturligtvis är  $\phi(0) = 1$ , och om andramomentet existerar, så följer det av sats 5.4.2 att funktionen  $\phi$  är två gånger deriverbar med derivatorna

$$\phi'(\omega) = i \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} t f(t) dt \quad \text{och} \quad \phi''(\omega) = - \int_{\mathbf{R}} e^{i\omega t} t^2 f(t) dt,$$

<sup>2</sup>Ordet karakteristisk funktion förekommer således i två betydelser, dels som karakteristisk funktion till en mängd, dels som karakteristisk funktion till en stokastisk variabel. Karakteristiska funktioner till mängder kallas också för indikatorfunktioner.

<sup>3</sup>Den karakteristiska funktionen är en fouriertransform även för stokastiska variabler som inte har någon täthetsfunktion, t. ex. diskreta stokastiska variabler, men då krävs det att vi generaliserar begreppet fouriertransform till att omfatta transform av mått.



och speciellt är alltså  $\phi'(0) = iE(X)$  och  $\phi''(0) = -E(X^2)$ . För stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians  $\sigma^2$  är med andra ord  $\phi(0) = 1$ ,  $\phi'(0) = 0$  och  $\phi''(0) = -\sigma^2$ , vilket betyder att  $\phi$  har en Taylorutveckling kring 0 på formen

$$(6.6) \quad \phi(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + o(\omega^2).$$

Detta gäller också i det allmänna fallet även om härledningen ovan bara gjorts för stokastiska variabler med täthetsfunktion.

Det finns flera olika sätt att definiera konvergens för följd av stokastiska variabler, och ett viktig resultat är följande sats som innebär att punktvis konvergens hos de karakteristiska funktionerna medför s. k. konvergens i fördelning.

**Sats 6.5.1** (Lévy's sats). *Låt  $(Y_n)_1^\infty$  vara en följd av stokastiska variabler med fördelningsfunktioner  $(F_n)_1^\infty$  och karakteristiska funktioner  $(\phi_n)_1^\infty$ , och antag att*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\omega) = \phi(\omega)$$

för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ , där  $\phi$  är den karakteristiska funktionen till någon stokastisk variabel  $Y$  med fördelningsfunktion  $F$ . Då är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

i alla punkter  $x$  där fördelningsfunktionen  $F$  är kontinuerlig.

En stokastisk variabel  $X$  med täthetsfunktionen

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

kallas *normalfördelad* med parametrarna  $\mu$  och  $\sigma^2$ , och det är lätt att verifiera att  $\mu$  är variabelns väntevärde och att  $\sigma^2$  är dess varians. Om väntevärdet är 0 och variansen är 1, kallas variabeln *standardnormalfördelad*. Fördelningsfunktionen till standardnormalfördelningen betecknas  $\Phi$ , och dess karakteristiska funktion  $\phi$  är (jmf exempel 5.4.2)

$$\phi(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}.$$

Inom sannolighetsteorin spelar normalfördelningen en speciellt betydelsefull roll av följande anledning:

**Sats 6.5.2** (Centrala gränsvärdessatsen). *Antag att  $X_1, X_2, X_3, \dots$  är en följd av oberoende, lika fördelade stokastiska variabler med väntevärde  $\mu$  och varians  $\sigma^2$ , och sätt*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

För alla reella tal  $x$  är då

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

*Bevis.* Slumpvariablerna  $X_k - \mu$  har samma sannolikhetsfördelning, så de har förstås också samma karakteristiska funktion som vi betecknar  $\phi$ , och eftersom deras väntevärde och varians är 0 resp.  $\sigma^2$ , ges  $\phi$ 's Taylorutveckling av ekvation (6.6).

Låt nu  $\phi_n$  beteckna den karakteristiska funktionen till den stokastiska variabeln  $(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$ . På grund av Lévy's sats räcker det att bevisa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(\omega) = \phi(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

för alla  $\omega \in \mathbf{R}$ .

Eftersom de stokastiska variablerna  $X_k$  är oberoende, är också variablerna  $e^{i\omega(X_k - \mu)}$  oberoende, så det följer att

$$\begin{aligned} \phi_n(\omega) &= \mathbf{E}\left(e^{i\omega \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i\omega \frac{(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(e^{i\omega \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot e^{i\omega \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} \cdot \dots \cdot e^{i\omega \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(e^{i\omega \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \cdot \mathbf{E}\left(e^{i\omega \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \cdot \dots \cdot \mathbf{E}\left(e^{i\omega \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\omega^2}{2n} + o\left(\frac{\omega^2}{n}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

För fixt  $\omega$  går

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{2n} + o\left(\frac{\omega^2}{n}\right)\right)^n$$

mot  $\exp(-\frac{1}{2}\omega^2)$  då  $n \rightarrow \infty$ . Därmed är beviset klart.  $\square$

## Övning

6.2 Beräkna täthetsfunktionen till summan av två oberoende normalfördelade stokastiska variabler  $X_1$  och  $X_2$  med medelvärde och varians  $\mu_1$  och  $\sigma_1^2$  resp.  $\mu_2$  och  $\sigma_2^2$ , dvs beräkna faltningen  $\phi_{\mu_1, \sigma_1} * \phi_{\mu_2, \sigma_2}$ , där

$$\phi_{\mu, \sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Formulera resultatet i sannolikhetsteoretiska termer.

# Kapitel 7

## Laplacetransformen

För att en funktion ska kunna fouriertransformeras måste den tillhöra  $L^1(\mathbf{R})$  eller  $L^2(\mathbf{R})$ , vilket innebär att sådana viktiga funktioner som polynom och exponentialfunktioner saknar fouriertransform.<sup>1</sup> För att råda bot på detta ska vi definiera en transform som fungerar för funktioner som inte växer snabbare än exponentiellt.

### 7.1 Laplacetransformens definition

Låt  $f$  vara en funktion som till att börja med är definierad på halvaxeln  $[0, \infty[$  och utvidga funktionen till hela  $\mathbf{R}$  genom att sätta  $f(t) = 0$  för  $t < 0$ . Låt  $\sigma$  vara ett reellt tal och betrakta produkten  $f(t)e^{-\sigma t}$ ; för  $\sigma > 0$  går faktorn  $e^{-\sigma t}$  mot 0 då  $t \rightarrow +\infty$ , så därför har produkten  $f(t)e^{-\sigma t}$  större förutsättningar än funktionen  $f$  att vara absolutintegrabel. Även om  $f(t)$  är stor för stora  $t$  kan således funktionen  $f(t)e^{-\sigma t}$  tillhöra  $L^1(\mathbf{R})$ , och vi kan då bilda fouriertransformen som är

$$\mathcal{F}([f(t)e^{-\sigma t}])(\tau) = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\tau t} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(\sigma+i\tau)t} dt.$$

Detta leder oss till att betrakta absolutkonvergenta generaliserade integraler av typen

$$(7.1) \quad \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

där  $s$  är ett komplext tal. Här och i fortsättningen kommer vi konsekvent att skriva komplexa tal på formen  $s = \sigma + \tau i$ , där alltså  $\sigma$  betecknar realdelen och  $\tau$  imaginärdelen.

Observera att

$$|f(t)e^{-(\sigma+i\tau)t}| = |f(t)|e^{-\sigma t},$$

---

<sup>1</sup>Man kan definiera fouriertransformen för polynom, men transformerna blir då inte funktioner utan distributioner.

så integralen (7.1) är absolutkonvergent om och endast om

$$(7.2) \quad \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty.$$

Om villkoret (7.2) är uppfyllt för ett visst värde  $\sigma = \sigma_0$ , så är det uppenbarligen också uppfyllt för alla värden på  $\sigma$  som är större än  $\sigma_0$ . För en funktion  $f$  som är definierad på positiva reella axeln gäller därför ett av följande tre alternativ:

- (i) Integralen  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  är absolutkonvergent för alla komplexa tal  $s$ ;
- (ii) Det finns ett minsta reellt tal  $\sigma_0$  sådant att integralen  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  är absolutkonvergent för alla komplexa tal  $s$  med  $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ ;
- (iii) Integralen  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  är inte absolutkonvergent för något komplext tal  $s$ .

Vi definierar nu funktionen  $f$ 's *absolutkonvergensabskissa*  $\sigma_a(f)$  som  $-\infty$  i fallet (i), som talet  $\sigma_0$  i fallet (ii) och som  $+\infty$  i fallet (iii). Detta innebär att mängden  $\Omega = \{s \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_a(f)\}$  i respektive fall är lika med hela komplexa talplanet, ett öppet halvplan och den tomma mängden, och att integralen  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  är absolutkonvergent för alla  $s \in \Omega$ .

EXEMPEL 7.1.1. Integralen  $\int_0^{\infty} e^{t^2} e^{-st} dt$  är inte konvergent för något värde på  $s$ , integralen  $\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$  är absolutkonvergent för  $\operatorname{Re} s > 0$ , integralen  $\int_0^{\infty} (1+t^2)^{-1} e^{-st} dt$  är konvergent för  $\operatorname{Re} s \geq 0$  och integralen  $\int_0^{\infty} e^{-t^2} e^{-st} dt$  är konvergent för alla komplexa tal  $s$ . Absolutkonvergensabskissan för de fyra funktionerna  $e^{t^2}$ ,  $1$ ,  $(1+t^2)^{-1}$  och  $e^{-t^2}$  är med andra ord i tur och ordning  $+\infty$ ,  $0$ ,  $0$  och  $-\infty$ .  $\square$

För att säkerställa att integralen  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  ska vara väldefinierad och absolutkonvergent för åtminstone något  $s$ , dvs. i ett halvplan eller hela komplexa talplanet, kommer vi att inskränka oss till att betrakta funktioner som inte växer snabbare än exponentiellt då  $t \rightarrow \infty$ . Klassen av alla sådana funktioner kommer att betecknas  $\mathcal{E}$  och den precisa definitionen ser ut så här:

**Definition.** En funktion  $f: [0, \infty[ \rightarrow \mathbf{C}$  tillhör klassen  $\mathcal{E}$  om funktionen är Riemannintegrerbar på varje begränsat delintervall av  $[0, \infty[$  och det finns en reell konstant  $k$  och en positiv konstant  $M$  så att

$$|f(t)| \leq Me^{kt}$$

för alla  $t \geq 0$ .

Begränsningsvillkoret i definitionen medför att

$$\int_0^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t} dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-k)t} dt < \infty$$

för  $\sigma > k$ , så integralen  $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$  är säkert absolutkonvergent i halvplanet  $\operatorname{Re} s > k$ , vilket för konvergensabskissans del betyder att  $\sigma_a(f) \leq k$ .

Speciellt är alltså  $\sigma_a(f) \leq 0$  för alla begränsade funktioner  $f$ .

EXEMPEL 7.1.2. Eftersom  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-kt} = 0$  om  $k > 0$ , har funktionerna  $te^{-kt}$  ett maximivärde  $M_k$  på positiva reella axeln för varje  $k > 0$ , och detta innebär att  $t \leq M_k e^{kt}$  för alla  $t \geq 0$ . Funktionen  $f(t) = t$  tillhör således klassen  $\mathcal{E}$ , och funktionens absolutkonvergensabskissa  $\sigma_a(t)$  uppfyller olikheten  $\sigma_a(t) \leq k$  för alla  $k > 0$ , vilket medför att  $\sigma_a(t) \leq 0$ . Eftersom  $\int_0^\infty te^{0 \cdot t} dt = +\infty$  kan absolutkonvergensabskissan inte vara mindre än 0, så därför är  $\sigma_a(t) = 0$ .  $\square$

EXEMPEL 7.1.3. En enkel modifiering av resonemanget i föregående exempel visar att varje polynom  $p(t)$  ligger i  $\mathcal{E}$  och har en absolutkonvergensabskissa som är lika med 0, utom då  $p(t)$  är nollpolynomet då absolutkonvergensabskissan förstås är lika med  $-\infty$ .

Produkten  $p(t)e^{ct}$  mellan ett godtyckligt polynom och en godtycklig komplex exponentialfunktion tillhör också klassen  $\mathcal{E}$  och dess absolutkonvergensabskissa är lika med  $\operatorname{Re} c$ , utom i det triviala fallet då  $p(t)$  är nollpolynomet.  $\square$

**Definition.** För funktioner  $f$  i klassen  $\mathcal{E}$  och komplexa tal  $s = \sigma + \tau i$  med realdel  $\sigma > \sigma_a(f)$  sätter vi

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

och kallar  $\tilde{f}(s)$  *laplacetransformen* till  $f$ . Ibland kommer vi att skriva  $\mathcal{L}[f]$  istället för  $\tilde{f}$ .

Fördelen med att definiera laplacetransformen för komplexa argument  $s = \sigma + \tau i$  är att det ger oss ett enkelt samband mellan laplacetransformen och fouriertransformen. Som vi noterade inledningsvis är

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_{\mathbf{R}} f^*(t) e^{-\sigma t} e^{-i\tau t} dt = \mathcal{F}[f^*(t) e^{-\sigma t}](\tau),$$

där  $f^*$  är den funktionen som fås av  $f$  genom att sätta

$$f^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < 0, \\ f(t) & \text{om } t \geq 0. \end{cases}$$

Laplacetransformen till funktionen  $f$  i punkten  $s = \sigma + \tau i$  är således lika med fouriertransformen till funktionen  $f^*(t) e^{-\sigma t}$  i punkten  $\tau$ . Man kan utnyttja detta samband för att översätta egenskaper hos fouriertransformen till egenskaper hos laplacetransformen.

EXEMPEL 7.1.4. Låt oss beräkna laplacetransformen till exponentialfunktionen  $f(t) = e^{ct}$ ,  $t \geq 0$ . Här är  $c = a + bi$  ett godtyckligt komplext tal.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &= \int_0^\infty e^{ct} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} dt = \left[ -\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s-c} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t}.\end{aligned}$$

För  $\sigma > a$  är  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-c)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-a)t} e^{-i(\tau-b)t} = 0$ . Det följer att

$$\mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c} \quad \text{om } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c.$$

Genom att speciellt välja  $c = 0$  respektive  $c = 1$  får man

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad \text{för } \operatorname{Re} s > 0 \quad \text{och} \quad \mathcal{L}[e^t](s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{för } \operatorname{Re} s > 1.$$

Värdena  $c = \pm i$  ger istället att  $\mathcal{L}[e^{it}](s) = (s-i)^{-1}$  och  $\mathcal{L}[e^{-it}](s) = (s+i)^{-1}$  för  $\operatorname{Re} s > 0$ , och eftersom  $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$  och  $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ , följer det att

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos t](s) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{s^2+1}, \\ \mathcal{L}[\sin t](s) &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i} \right) = \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

för  $\operatorname{Re} s > 0$ . □

EXEMPEL 7.1.5. Vi beräknar laplacetransformen till funktionen  $f(t) = t$ . För  $\operatorname{Re} s > 0$  är

$$\mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left[ -t \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \left[ e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Här har vi utnyttjat att  $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ . □

EXEMPEL 7.1.6. Funktionen  $[t]$ , heltalsdelen av  $t$ , definieras av att

$$[t] = n \quad \text{om } n \leq t < n+1,$$

där  $n$  betecknar ett godtyckligt heltal. Funktionen har sprängdiskontinuiteter i heltalspunkterna, och eftersom  $\lim_{t \rightarrow \infty} [t] e^{-kt} = 0$  för  $k > 0$  är dess laplacetransform definierad i halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$ . Genom att utnyttja identiteten

$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z(1-z)^{-2}$  som gäller för  $|z| < 1$ , får vi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[[t]](s) &= \int_0^{\infty} [t]e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} [t]e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} ne^{-st} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ns^{-1}(e^{-ns} - e^{-(n+1)s}) = s^{-1}(1 - e^{-s}) \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-ns} \\ &= s^{-1}(1 - e^{-s})e^{-s}(1 - e^{-s})^{-2} = s^{-1}e^{-s}(1 - e^{-s})^{-1} \\ &= \frac{1}{s(e^s - 1)}. \quad \square \end{aligned}$$

### Faltning

För funktioner  $f$  och  $g$  på reella axeln definieras faltningen  $f * g$  av formeln  $f * g(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t-u)g(u) du$ . Om funktionerna  $f$  och  $g$  båda är lika med noll på den negativa reella axeln, så är  $f(t-u)g(u) = 0$  för  $u < 0$  och för  $u > t$ , och därför är  $f * g(t) = 0$  om  $t < 0$ , och

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

om  $t \geq 0$ . För att den sistnämnda formeln ska vara meningsfull räcker det att funktionerna  $f$  och  $g$  är definierade på den positiva reella axeln, och denna observation motiverar följande definition av begreppet faltning för funktioner i klassen  $\mathcal{E}$ .

**Definition.** *Faltningen*  $f * g$  av två funktioner  $f$  och  $g$  i klassen  $\mathcal{E}$  definieras av formeln

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

för  $t \geq 0$ .

Vi lämnar som övning att visa att faltningen av två funktioner i  $\mathcal{E}$  inte växer snabbare än exponentiellt.

EXEMPEL 7.1.7. Låt  $f(t) = e^t$  och  $g(t) = \cos t$ . Då är

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^{t-u} \cos u du = e^t \int_0^t e^{-u} \cos u du.$$

Integralen i högerledet kan beräknas med hjälp av två partiella integrationer eller enklare genom att ersätta  $\cos u$  med  $\frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu})$ . Slutresultatet blir (kontrollera gärna!):

$$\int_0^t e^{-u} \cos u du = \frac{1}{2}(1 + e^{-t}(\sin t - \cos t)),$$

dvs.

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t). \quad \square$$

## Övningar

7.1 Bestäm laplacetransformen till funktionen  $f$  om

a)  $f(t) = t^2$    b)  $f(t) = te^{2t}$    c)  $f(t) = e^t \sin t$    d)  $f(t) = \chi_{[0,1]}(t)$

e)  $f(t) = t\chi_{[0,1]}(t)$

f) funktionen är periodisk med period 1 och  $f(t) = t$  för  $0 \leq t < 1$ .

7.2 Beräkna faltningen  $f * g$  för

a)  $f(t) = 1, g(t) = t$    b)  $f(t) = g(t) = t$    c)  $f(t) = t, g(t) = e^{2t}$

d)  $f(t) = 1, g(t) = \chi_{[0,1]}(t)$    e)  $f(t) = t, g(t) = \chi_{[0,1]}(t)$ .

7.3 Visa kommutativa och associativa lagen för faltning, dvs.

$$f * g = g * f,$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

7.4 a) Låt  $f$  och  $g$  vara två funktioner i  $\mathcal{E}$  och antag att  $|f(t)| \leq Me^{kt}$  och  $|g(t)| \leq Me^{kt}$ . Visa att  $|f * g(t)| \leq M^2te^{kt}$ .

b) Visa följande olikhet för absolutkonvergensabskissan till en faltning:

$$\sigma_a(f * g) \leq \max(\sigma_a(f), \sigma_a(g)).$$

7.5 Antag att funktionen  $f$ 's laplacetransform  $\tilde{f}(s)$  existerar för  $s \geq 0$ , och låt  $g$  beteckna laplacetransformen till funktionen  $\tilde{f}$ , dvs.  $g(s) = \mathcal{L}[\tilde{f}](s)$ . Visa att

$$g(s) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+s} dt.$$

(Man kallar  $g$  för Stieltjestransformen av  $f$ .)

## 7.2 Räkner regler

För att laplacetransformen ska bli ett effektivt räknehjälpmiddel behöver vi, förutom att kunna ett antal elementära funktioners laplacetransformer, också räkner regler för hur transformen beter sig då funktioner kombineras på olika sätt. Det är enkelt att verifiera att man inte lämnar klassen  $\mathcal{E}$  när man bildar linjärkombinationer, skalningar och faltningar av funktioner i klassen samt när man multiplicerar en funktion i klassen med en komplex exponentialfunktion. Här följer motsvarande räkner regler för laplacetransformering.

**Sats 7.2.1.** Låt  $f$  och  $g$  vara funktioner i klassen  $\mathcal{E}$ , låt  $c$  och  $d$  vara komplexa tal, och låt  $\lambda$  vara ett positivt reellt tal. Då är

(a)  $\mathcal{L}[cf + dg](s) = c\mathcal{L}[f](s) + d\mathcal{L}[g](s)$

(b)  $\mathcal{L}[f(\lambda t)](s) = \lambda^{-1}\mathcal{L}[f](s/\lambda)$

(c)  $\mathcal{L}[e^{ct}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - c)$

(d)  $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$

för alla  $s$  för vilka laplacetransformerna i högerleden existerar.



*Bevis.* Vi lämnar reglerna (a) – (c) som enkla övningar. Räkningregel (d) följer genom omkastning av integrationsordningen på följande vis:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty (f * g)(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \int_0^t f(t-u)g(u) e^{-st} du dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t f(t-u) e^{-s(t-u)} g(u) e^{-su} du dt \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u) e^{-s(t-u)} g(u) e^{-su} dt du \\ &= \int_0^\infty g(u) e^{-su} \int_u^\infty f(t-u) e^{-s(t-u)} dt du \\ &= \int_0^\infty g(u) e^{-su} du \int_0^\infty f(v) e^{-sv} dv = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s). \quad \square\end{aligned}$$

EXEMPEL 7.2.1. Vi vet redan att  $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ . Med hjälp av (b) och (c) i sats 7.2.1 får man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin at](s) &= \frac{1}{a((s/a)^2 + 1)} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{och} \\ \mathcal{L}[e^{bt} \sin at](s) &= \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}.\end{aligned}$$

På motsvarande sätt fås

$$\mathcal{L}[e^{bt} \cos at](s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}. \quad \square$$

För att sambandet mellan laplace- och fouriertransformen ska gälla ska funktionen som transformeras sättas lika med noll för negativa värden på argumentet. Detta har som konsekvens att definitionen av högertranslation ser ut så här för funktioner som ska laplacetransformeras.

**Definition.** För  $f \in \mathcal{E}$  och  $\lambda > 0$  definieras den högertranslaterade funktionen  $f_\lambda$  av att

$$f_\lambda(t) = f(t-\lambda)H(t-\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{om } t < \lambda, \\ f(t-\lambda) & \text{om } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Högertranslation motsvaras på transformsidan av multiplikation med funktionen  $e^{-\lambda s}$ .

**Sats 7.2.2.** Antag att funktionen  $f$  har laplacetransform och att  $\lambda > 0$ . Då är

$$\mathcal{L}[f_\lambda](s) = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f](s)$$

för alla  $s$  för vilka högerledet existerar.

*Bevis.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_\lambda](s) &= \int_0^\infty f_\lambda(t)e^{-st} dt = \int_\lambda^\infty f(t-\lambda)e^{-st} dt \\ &= e^{-s\lambda} \int_0^\infty f(u)e^{-su} du = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f](s). \quad \square\end{aligned}$$

## Övningar

7.6 Beräkna laplacetransformerna till funktionen  $f$  om

a)  $f(t) = \sin 3t$     b)  $f(t) = \cos 3t$     c)  $f(t) = e^{-2t} \cos 3t$

d)  $f(t) = e^{2(t-1)}H(t-1)$     e)  $f(t) = e^{3t} * \sin 2t$

## 7.3 Deriverbarhet och entydighet

Laplacetransformerna är mycket snälla funktioner – de är oändligt deriverbara och går mot noll då  $\operatorname{Re} s$  går mot oändligheten.

**Sats 7.3.1.** *Laplacetransformen  $\tilde{f}$  till en funktion  $f \in \mathcal{E}$  är deriverbar i hela sitt definitionsområde  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$  med derivata*

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

*Anmärkning.* För läsare som har studerat komplex analys kan vi formulera sats 7.3.1 på följande sätt: *Laplacetransformen  $\tilde{f}$  är analytisk i halvplanet  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$ . Detta faktum har långtgående konsekvenser.*

*Bevis.* Formellt får man derivatan  $\tilde{f}'(s)$  genom att derivera laplacetransformerna

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

under integraltecknet, vilket ger

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds} (f(t)e^{-st}) dt = - \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

För att rigoröst motivera att detta är tillåtet betraktar man differenskvoten

$$\frac{\tilde{f}(s+h) - \tilde{f}(s)}{h} = \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h} dt.$$

Med hjälp av satsen om dominerad konvergens (sats 2.4.1) kan man visa att det är tillåtet att göra gränsövergången  $h \rightarrow 0$  under integraltecknet, och eftersom  $(e^{-ht} - 1)/h \rightarrow -t$ , leder detta till den önskade slutsatsen

$$\frac{d}{ds} \tilde{f}(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(s+h) - \tilde{f}(s)}{h} = - \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt.$$

Vi hoppar över detaljerna i beviset.  $\square$

Genom iteration får vi följande följande korollarium till sats 7.3.1.

**Korollarium 7.3.2.** *Antag  $f \in \mathcal{E}$ . Då har laplacetransformen  $\tilde{f}$  derivator av alla ordningar i definitionssområdet  $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$  och*

$$\frac{d^n}{ds^n} \tilde{f}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

EXEMPEL 7.3.1. Vi vet att  $\mathcal{L}[e^{ct}](s) = (s - c)^{-1}$ . Genom att derivera  $n$  gånger får vi

$$\mathcal{L}[t^n e^{ct}](s) = \frac{n!}{(s - c)^{n+1}},$$

och som specialfall

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad \square$$

Med hjälp av resultatet i föregående exempel och partialbråksuppdelning kan vi nu laplaceinvertera rationella funktioner. Vi visar först ett exempel.

EXEMPEL 7.3.2. Bestäm en funktion  $f$  med laplacetransformen

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 - s + 7}{(s - 1)^2(s^2 + 2s + 5)}.$$

*Lösning.* Vi börjar med att partialbråksuppdelna funktionen och får

$$F(s) = \frac{1}{(s - 1)^2} + \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}.$$

Vi kvadratkompletterar nämnaren  $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$  och gör sedan omskrivningen

$$F(s) = \frac{1}{(s - 1)^2} + \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}.$$

Nu ser vi att  $F$  är laplacetransform till funktionen

$$f(t) = te^t + e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

Alternativt kunde vi ha börjat med att faktorisera nämnaren i den rationella funktionen  $F$  fullständigt med hjälp av de komplexa rötterna  $-1 \pm 2i$  till andragsgradspolynomet  $s^2 + 2s + 5$ . Detta leder till partialbråksuppdelningen

$$F(s) = \frac{1}{(s - 1)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i}{s + 1 - 2i} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i}{s + 1 + 2i}.$$

Nu känner vi igen  $F$  som laplacetransform till funktionen

$$\begin{aligned} f(t) &= te^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)e^{-(1-2i)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)e^{-(1+2i)t} \\ &= te^t + e^{-t} \left( \frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) - \frac{1}{4}i(e^{2it} - e^{-2it}) \right) \\ &= te^t + e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t), \end{aligned}$$

dvs. samma funktion som ovan.

Det återstår förstås att visa att funktionen  $f$  är unik i den bemärkelsen att det inte finns några andra kontinuerliga funktioner med samma laplacetransformen. Den frågan ska vi strax återkomma till.  $\square$

Resultatet i exemplet ovan låter sig omedelbart generaliseras och vi har följande sats.

**Sats 7.3.3.** *Varje rationell funktion där täljaren har lägre grad än nämnaren, är laplacetransform till en funktion i  $\mathcal{E}$ .*

*Bevis.* Sådana rationella funktioner är linjärkombinationer av partialbråk av typen  $(s-c)^{-(n+1)}$  med  $n \geq 0$ , och de är därför laplacetransformer till motsvarande linjärkombinationer av funktionerna  $\frac{1}{n!}t^n e^{ct}$ .  $\square$

Att täljaren i den rationella funktionen ska ha lägre grad än nämnaren för att vara laplacetransformen till en funktion är ett nödvändigt villkor på grund av följande sats.

**Sats 7.3.4.** *Om  $f \in \mathcal{E}$ , så gäller att  $\tilde{f}(s) \rightarrow 0$  då  $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$ .*

*Bevis.* Välj  $\sigma_0 > \sigma_a(f)$ , sätt  $s = \sigma + \tau i$  och betrakta laplacetransformen  $\tilde{f}(s)$  för  $\sigma > \sigma_0$ . Eftersom funktionen  $|f(t)|e^{-\sigma_0 t}$  är absolutintegrabel på positiva reella axeln,  $|e^{(\sigma_0 - \sigma)t}| \leq 1$  och  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} e^{(\sigma_0 - \sigma)t} = 0$  om  $t > 0$ , följer det av satsen om dominerad konvergens att

$$|\tilde{f}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma t} dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{(\sigma_0 - \sigma)t} dt \rightarrow 0 \quad \text{då } \sigma \rightarrow \infty. \quad \square$$

Eftersom laplacetransformen  $\mathcal{L}[f]$  är definierad som en integral över intervallet  $[0, \infty[$  kan den naturligtvis inte ge någon information om funktionsvärdena  $f(t)$  för  $t < 0$ , såvida vi inte har ytterligare information om funktionen. För restriktionen av  $f$  till intervallet  $[0, \infty[$  har vi emellertid följande entydighetsresultat.

**Sats 7.3.5 (Entydighetssatsen).** *Antag att  $f \in \mathcal{E}$  och att  $\tilde{f}(s) = 0$  för alla  $s$  i något intervall på  $\mathbf{R}$ . Då är  $f(t) = 0$  i alla punkter  $t \in [0, \infty[$  där funktionen  $f$  är kontinuerlig.*

Beviset utnyttjar egenskaper hos analytiska funktioner och bör därför hoppas över av den som inte har studerat komplex analys.

*Bevis.* På grund av entydighetssatsen för analytiska funktioner är  $\tilde{f}(s) = 0$  för alla  $s$  i transformens definitionsområde. Om  $\sigma_0 > \sigma_a(f)$ , så är därför speciellt  $\tilde{f}(\sigma_0 + \tau i) = 0$  för alla  $\tau \in \mathbf{R}$ . Men

$$\tilde{f}(\sigma_0 + \tau i) = \mathcal{F}[e^{-\sigma_0 t} f(t)](\tau),$$

där vi definierat om  $f$  genom att sätta  $f(t) = 0$  för  $t < 0$ . Fouriertransformen till  $L^1(\mathbf{R})$ -funktionen  $e^{-\sigma_0 t} f(t)$  är således identiskt noll. Entydighetssatsen för fouriertransformen leder därför till slutsatsen att  $e^{-\sigma_0 t} f(t) = 0$  i alla punkter  $t$  där funktionen är kontinuerlig, och följaktligen är  $f(t) = 0$  i alla punkter  $t$  där  $f$  är kontinuerlig.  $\square$

**Korollarium 7.3.6.** Om  $f, g \in \mathcal{E}$  och  $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)$  för alla tillräckligt stora reella tal  $s$ , så är  $f(t) = g(t)$  i alla punkter  $t \in [0, \infty[$  där båda funktionerna är kontinuerliga.

*Bevis.* Tillämpa entydighetssatsen på funktionen  $f - g$ .  $\square$

Genom att utnyttja sambandet mellan laplace- och fouriertransformerna kan vi översätta inversionsformeln för fouriertransformen i sats 5.7.4 till en inversionsformel för laplacetransformen.

**Sats 7.3.7** (Inversionsformeln för laplacetransformen). Antag att funktionen  $f \in \mathcal{E}$  är kontinuerligt deriverbar i punkten  $t \geq 0$ . Då är

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \tilde{f}(\sigma + \tau i) e^{(\sigma + \tau i)t} d\tau,$$

där  $\sigma$  är ett godtyckligt tal som uppfyller  $\sigma > \sigma_a(f)$ .

*Bevis.* Inversionsformeln för fouriertransformen ger att

$$e^{-\sigma t} f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \tilde{f}(\sigma + \tau i) e^{i\tau t} d\tau,$$

så formeln i satsen följer efter multiplikation med  $e^{\sigma t}$ .  $\square$

Integralen i inversionsformeln som kallas *Bromwichintegralen*, är en integral över en vertikal linje i det komplexa talplanet, och för att formeln ska vara riktigt användbar bör man utnyttja residy teknik. Detta kräver emellertid kunskaper i komplex analys, och eftersom vi inte förutsätter några sådana fördjupar vi oss inte i detta här.

**EXEMPEL 7.3.3.** Lös integralekvationen

$$f(t) = 1 + \int_0^t f(t-u) e^u du, \quad t \geq 0.$$

*Lösning:* Antag  $f \in \mathcal{E}$ . Genom att laplacetransformera integralekvationen får vi följande algebraiska ekvation

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[1 + f * e^t](s) = \frac{1}{s} + \tilde{f}(s) \frac{1}{s-1}$$

som vi löser med avseende på  $\tilde{f}(s)$ :

$$\tilde{f}(s) = \frac{s-1}{s(s-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2}.$$

Vi drar nu slutsatsen att

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}. \quad \square$$

Det följer av anmärkningen efter sats 7.3.1 och ett resultat inom komplex analys att en funktions laplacetransform  $\hat{f}(s)$  är fullständigt bestämd av dess värden då variabeln  $s$  är reell. Vi utnyttjar detta faktum i följande exempel.

EXEMPEL 7.3.4. Laplacetransformen

$$\mathcal{L}[t^\alpha](s) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt$$

till funktionen  $f(t) = t^\alpha$ , där  $\alpha \geq 0$ , är definierad i området  $\operatorname{Re} s > 0$ . Låt oss först beräkna integralen under antagandet att  $s$  är ett reellt positivt tal. Variabelbytet  $t = u/s$  ger då att

$$(7.3) \quad \mathcal{L}[t^\alpha](s) = s^{-(\alpha+1)} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du = \Gamma(\alpha+1) s^{-(\alpha+1)},$$

där  $\Gamma$  är den s. k. *gammafunktionen* som för  $x > 0$  definieras av att

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du.$$

Med hjälp av partiell integration visar man enkelt att

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

för alla  $x > 0$ , och eftersom  $\Gamma(1) = 1$  följer det genom induktion att

$$\Gamma(n+1) = n!$$

för alla icke-negativa heltal  $n$ . För positiva heltal  $\alpha$  ger därför formel (7.3) samma resultat som exempel 7.3.1.

Härledningen av laplacetransformeln (7.3) är gjord för reella  $s$ , men två analytiska funktioner som är lika på positiva reella axeln är lika i hela sinna definitionsområden. Det följer därför att formeln faktiskt gäller för alla komplexa tal  $s$  med positiv realdel.  $\square$

### Övningar

7.7 Bestäm funktionen  $f$  om dess laplacetransform är

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{s(s+1)} & \text{b) } \frac{1}{s^2+4s+29} & \text{c) } \frac{6s^2+4s-2}{(s-2)^2(s^2+2s+2)} \\ \text{d) } \frac{se^{-s}}{(s^2+1)^2} & \text{e) } \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}. & \end{array}$$

7.8 Bestäm laplacetransformen till funktionen  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

7.9 Bestäm funktionen  $f$  om  $\tilde{f}(s) = \log \frac{s+3}{s+2}$ .

7.10 Bestäm en funktion  $f$  som är definierad på intervallet  $[0, \infty[$  och som löser integralekvationen

$$\int_0^t u f(t-u) du = t \sin t.$$

7.11 Bestäm funktioner  $x(t)$  och  $y(t)$ , definierade för  $t \geq 0$ , så att

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t y(t-u) du \\ y(t) = 1 + 2 \int_0^t x(t-u) \cos u du \end{cases}$$

7.12 Bestäm en lösning till integralekvationen

$$\int_0^t f(t-u) \cos 2u du = \sin t, \quad t \geq 0.$$

7.13 Lös integralekvationen

$$y(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t-u) y(u) du.$$

7.14 Visa rekursionsformeln  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  för  $\Gamma$ -funktionen.

7.15 Visa att  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  och bestäm sedan laplacetransformen till funktionen  $\sqrt{t}$ .

[Ledning: Gör substitutionen  $u = t^2/2$  i definitionen av  $\Gamma(\frac{1}{2})$  och utnyttja sedan fouriertransformen till funktionen  $e^{-t^2/2}$ .]

## 7.4 Derivatans transform och linjära differentialekvationer

Laplacetransformering är en teknik som kan användas för att lösa linjära differentialekvationer. Lösningssmetoden bygger på att man laplacetransformerar den givna differentialekvationen och på så sätt istället erhåller en

ekvation för den obekanta funktionens laplacetransform som man löser explicit.

Metoden förutsätter att vi kan uttrycka laplacetransformen till derivatan  $f'$  i termer av laplacetransformen till funktionen  $f$ . Nästa sats ger receptet för detta.

**Sats 7.4.1.** *Antag att funktionen  $f$  är kontinuerligt deriverbar och att både  $f$  och derivatan  $f'$  tillhör klassen  $\mathcal{E}$ . Då är*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

för alla komplexa tal  $s$  som har en realdel som är större än de båda funktionernas konvergensabskissor.

*Bevis.* Förutsättningarna  $f, f' \in \mathcal{E}$  medför att laplacetransformerna  $\mathcal{L}[f](s)$  och  $\mathcal{L}[f'](s)$  existerar och att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$$

för alla komplexa tal  $s$  med tillräckligt stor realdel. Formeln för partiell integration ger därför att

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \left[ f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} - f(0) + s\mathcal{L}[f](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) \end{aligned}$$

för alla  $s$  med tillräckligt stor realdel, vilket är likheten i satsen. Att likheten sedan i själva verket gäller för alla komplexa tal som har en realdel som är större än de båda funktionernas konvergensabskissor är en konsekvens av entydighetssatsen för analytiska funktioner.<sup>2</sup>  $\square$

**Korollarium 7.4.2.** *Antag att  $f \in \mathcal{E}$  är  $n$  gånger kontinuerligt deriverbar och att alla derivatorna tillhör  $\mathcal{E}$ . För alla komplexa tal  $s$  med tillräckligt stor realdel är då*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k}.$$

*Anmärkning.* Derivatorna  $f^{(k)}(0)$  ska naturligtvis tolkas som högerderivator.

<sup>2</sup>Entydighetssatsen: Om en analytisk funktion  $\phi$  med den öppna sammanhängande mängden  $\Omega$  som definitionsområde är noll på exempelvis ett intervall i  $\Omega$ , så är  $\phi$  lika med noll överallt. Sista steget i beviset för sats 7.4.1 följer nu genom att tillämpa entydighetssatsen på funktionen  $\mathcal{L}[f'](s) - \mathcal{L}[f](s) + f(0)$  som är analytisk i halvplanet  $\operatorname{Re} s > \max(\sigma_a(f), \sigma_a(f'))$ .



*Bevis.* Genom upprepad användning av sats 7.4.1 får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - f(0)s - f'(0),\end{aligned}$$

osv. □

Följande exempel illustrerar hur man använder laplacetransformering för att lösa en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

EXEMPEL 7.4.1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = -8e^{-t} \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

*Lösning:* Vi antar att lösningen  $y = y(t)$ , liksom  $y'$  och  $y''$ , har en laplace-transform. På grund av korollariet ovan är i så fall

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'](s) &= s\tilde{y}(s) - y(0) = s\tilde{y}(s) - 1 \\ \mathcal{L}[y''](s) &= s^2\tilde{y}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2\tilde{y}(s) - s - 3.\end{aligned}$$

Linearitet ger därefter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'' + 2y' - 3y](s) &= s^2\tilde{y}(s) - s - 3 + 2(s\tilde{y}(s) - 1) - 3\tilde{y}(s) \\ &= (s^2 + 2s - 3)\tilde{y}(s) - s - 5.\end{aligned}$$

Å andra sidan visar exempel 7.2.1 att

$$\mathcal{L}[-8e^{-t} \sin 2t](s) = -8 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = -\frac{16}{s^2 + 2s + 5}.$$

Genom att jämföra laplacetransformerna till differentialekvationens vänster- och högerled erhåller vi därför ekvationen

$$(s^2 + 2s - 3)\tilde{y}(s) - s - 5 = -\frac{16}{s^2 + 2s + 5}.$$

Resultatet blev en algebraisk ekvation som vi kan lösa med avseende på  $\tilde{y}$ :

$$\tilde{y}(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}{(s-1)(s+3)(s^2 + 2s + 5)}.$$

Här ser vi inte omedelbart att högerledet är laplacetransformen till någon känd funktion, men om vi först delar upp högerledet i partialbråk, får vi

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}.$$

Nu har vi tur, ty vi känner igen högerledet som laplacetransformen till funktionen  $e^t + e^{-t} \sin 2t$ . Eftersom funktionen  $y$  är entydigt bestämd av sin laplacetransform i intervallet  $[0, \infty[$ , drar vi slutsatsen att differentialekvationens lösning för  $t \geq 0$  är

$$y(t) = e^t + e^{-t} \sin 2t.$$

Naturligtvis löser i detta fall  $y(t)$  differentialekvationen på hela  $\mathbf{R}$ . □

## Övningar

7.16 Lös med hjälp av laplacetransformering systemet

$$\begin{cases} x + y' = 2e^t \\ x' - x - 2y' - y = \sin t \end{cases}$$

med begynnelsevärdena  $x(0) = 2$  och  $y(0) = 1$ .

7.17 Lös systemet

$$\begin{cases} z'' + y = 5e^{2t} \\ y'' - z = 3e^{2t}, \end{cases}$$

där  $y(0) = z(0) = 1$ ,  $y'(0) = z'(0) = 2$ .

7.18 Bestäm laplacetransformen till  $f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du$ .

## 7.5 Begynnelsevärdes- och slutvärdesregeln

När man studerar dynamiska system är man ofta intresserad av att veta hur systemet uppför sig efter lång tid, till exempel om det närmar sig ett stabilt tillstånd. Om tillståndet kan beskrivas av en funktion  $f$  så är med andra ord funktionens eventuella gränsvärde då tiden  $t$  går mot oändligheten en intressant storhet, och detta gränsvärde avspeglas i beteendet hos laplacetransformen  $\tilde{f}(s)$  då  $s \rightarrow 0^+$ . Vi har nämligen följande resultat som ger de båda gränsvärdena  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(t)$  och  $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(t)$  i termer av laplacetransformen  $\tilde{f}$ .

**Sats 7.5.1** (Begynnelsevärdes- och slutvärdesregeln). *Antag  $f \in \mathcal{E}$ .*

(a) *Om gränsvärdet  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  existerar så är*

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s).$$

(b) *Om gränsvärdet  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existerar, så är*

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s\tilde{f}(s).$$

*Det är då underförstått att gränsvärdena då  $s \rightarrow \infty$  och då  $s \rightarrow 0^+$  bara tas för reella  $s$ .*

*Bevis.* Vi noterar först att  $\int_0^\infty se^{-st} dt = 1$  för alla reella positiva tal  $s$  och att därför

$$s\tilde{f}(s) - A = \int_0^\infty sf(t)e^{-st} dt - A = \int_0^\infty (f(t) - A)se^{-st} dt$$

om  $A$  är en godtycklig konstant.

Vi delar nu upp integrationsintervallet  $[0, \infty[$  i två delintervall  $I$  och  $J$ , antingen med  $I = [0, \delta]$  och  $J = [\delta, \infty[$  eller med  $I = [T, \infty[$  och  $J = [0, T]$ , och skriver i båda fallen för  $s > 0$  differensen  $s\tilde{f}(s) - A$  som en summa av tre integraler på följande vis:

$$(7.4) \quad s\tilde{f}(s) - A = \int_I (f(t) - A)se^{-st} dt + \int_J f(t)se^{-st} dt - A \int_J se^{-st} dt \\ = I_1 + I_2 + I_3.$$

(a) För att bevisa begynnelsevärdesregeln sätter vi  $A = f(0^+)$  och väljer givet  $\epsilon > 0$  ett positivt tal  $\delta$  sådant att  $|f(t) - A| < \epsilon$  för  $0 < t \leq \delta$ . Med  $I = [0, \delta]$  och  $J = [\delta, \infty[$  blir nu

$$|I_1| \leq \int_0^\delta |f(t) - f(0^+)|se^{-st} dt \leq \epsilon \int_0^\delta se^{-st} dt < \epsilon \int_0^\infty se^{-st} dt = \epsilon,$$

medan

$$I_3 = -A \int_\delta^\infty se^{-st} dt = -Ae^{-\delta s} \rightarrow 0 \quad \text{då } s \rightarrow \infty.$$

För att uppskatta den tredje integralen  $I_2$  väljer vi först  $a > \sigma_a(f)$ , vilket medför att funktionen  $g(t) = e^{-at}f(t)$  är absolutintegrabel över intervallet  $[0, \infty[$ . Vi gör sedan omskrivningen

$$I_2 = \int_\delta^\infty f(t)se^{-st} dt = \int_\delta^\infty g(t)se^{-(s-a)t} dt.$$

Funktionerna  $t \mapsto se^{-(s-a)t}$  är för  $s \geq \max(a, 0)$  uniformt begränsade i intervallet  $[\delta, \infty[$  eftersom

$$se^{-(s-a)t} \leq se^{-(s-a)\delta} = se^{-s\delta}e^{a\delta} \leq \delta^{-1}e^{a\delta-1} \quad \text{om } s \geq \max(a, 0),$$

och

$$\lim_{s \rightarrow \infty} se^{-(s-a)t} = 0.$$

Det följer därför av satsen om dominerad konvergens att

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I_2 = \int_\delta^\infty \lim_{s \rightarrow \infty} g(t)se^{-(s-a)t} dt = \int_\delta^\infty 0 dt = 0.$$

För alla tillräckligt stora  $s$  är därför  $|s\tilde{f}(s) - A| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < 3\epsilon$ , vilket bevisar påståendet (a).

(b) För att bevisa slutvärdesregeln sätter vi istället  $A = f(\infty)$  och väljer givet  $\epsilon > 0$  talet  $T$  så stort att  $|f(t) - f(\infty)| < \epsilon$  för alla  $t \geq T$ . Med  $I = [T, \infty[$  och  $J = [0, T]$  blir då

$$|I_1| \leq \int_T^\infty |f(t) - f(\infty)|se^{-st} dt \leq \epsilon \int_T^\infty se^{-st} dt < \epsilon \int_0^\infty se^{-st} dt = \epsilon.$$

På intervallet  $J = [0, T]$  är funktionen  $|f|$  uppåt begränsad av någon konstant  $M$  vilket medför att

$$|I_2| \leq \int_0^T |f(t)|se^{-st} dt \leq s \int_0^T M dt = sMT,$$

och vi drar slutsatsen att  $I_2 \rightarrow 0$  då  $s \rightarrow 0^+$ .

Slutligen är

$$I_3 = -A \int_0^T se^{-st} = A(e^{-sT} - 1),$$

så  $I_3$  går också mot noll då  $s \rightarrow 0^+$ .

Det följer därför av uppdelningen (7.4) att det finns ett tal  $s_0 > 0$  sådant att  $|s\tilde{f}(s) - A| < 3\epsilon$  för  $0 < s < s_0$ , och detta bevisar slutvärdesregeln.  $\square$

## Övningar

7.19 Verifiera begynnelse- och slutvärdesregeln för funktionerna

$$\text{a) } f(t) = e^{-t} \quad \text{b) } f(t) = te^{-t} \quad \text{c) } f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

## 7.6 Kausala LTI-system

I linjära tidsinvarianta system kan sambandet mellan insignal  $x$  och utsignal  $y$  under tämligen generella villkor beskrivas av en faltning  $y = k * x$ , och i kausala system är vidare  $k(t) = 0$  för  $t < 0$ , vilket innebär att sambandet har formen

$$y(t) = \int_0^\infty k(u)x(t-u) du.$$

Om systemet befinner sig i vila fram till och med en viss tidpunkt som vi kan välja som  $t = 0$ , är insignalen  $x(t)$  lika med noll för  $t < 0$ . Likheten ovan reduceras därför för  $t \geq 0$  till

$$y(t) = \int_0^t k(u)x(t-u) du,$$

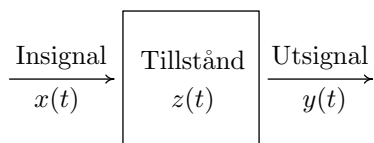
dvs. till den typ av faltning  $y = k * x$  som vi infört i samband med laplacetransformen, och genom laplacetransformering erhålls sambandet

$$\tilde{y}(s) = \tilde{k}(s)\tilde{x}(s)$$

för de ingående funktionernas laplacetransformer. Som tidigare kallas  $k$  systemets *impulssvar* medan  $\tilde{k}$  brukar kallas systemets *överföringsfunktion*.

Vi påminner om att ett dynamiskt system kallas BIBO-stabilt om begränsade insignaler resulterar i begränsade utsignaler. Det följer förstas av sats 6.3.3 att det kausala systemet  $y = k * x$  är BIBO-stabilt om

$$\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty.$$



**Figur 7.1.** Dynamiskt system

I många situationer beskriver man ett dynamiskt systems tillstånd med hjälp av en *tillståndsfunktion*  $z$ . Denna funktion är i allmänhet vektorvärd, men vi antar för enkelhets skull att  $z$  är en vanlig reellvärd funktion.

Låt oss nu anta att tillståndets påverkan av insignalen  $x(t)$  för  $t > 0$  regleras av en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter av typen

$$a_n z^{(n)}(t) + a_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = x(t)$$

där  $a_n \neq 0$ . Att systemet är i vila fram till tidpunkten  $t = 0$ , dvs. att  $z(t) = 0$  för  $t < 0$ , medför speciellt att

$$z^{(n-1)}(0) = \dots = z''(0) = z'(0) = z(0) = 0$$

om tillståndsfunktionen förutsätts vara tillräckligt många gånger kontinuerligt deriverbar i origo. Differentialekvationen och begynnelsevärdena bestämmer sedan förstas systemets tillstånd entydigt.

Utsignalen  $y(t)$  antas vara beroende av systemets tillstånd på så sätt att den är en linjärkombination av derivator till  $z(t)$  av högst ordning  $n - 1$ , dvs.

$$y(t) = b_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \dots + b_2 z''(t) + b_1 z'(t) + b_0 z(t).$$

Låt nu  $P(s)$  och  $Q(s)$  vara polynomen

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad \text{och}$$

$$Q(s) = b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0.$$

På grund av begynnelsevillkoren är  $\widetilde{z^{(k)}}(s) = s^k \widetilde{z}(s)$  så genom att laplace-transformera de båda differentialekvationerna som innehåller  $x(t)$  resp.  $y(t)$  erhåller vi ekvationerna

$$P(s)\widetilde{z}(s) = \widetilde{x}(s) \quad \text{och} \quad \widetilde{y}(s) = Q(s)\widetilde{z}(s),$$

och genom att eliminera  $\widetilde{z}(s)$  erhålls sambandet

$$\widetilde{y}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \widetilde{x}(s)$$

mellan in- och utsignalernas laplacetransformer.

Eftersom täljaren hos den rationella funktionen  $K(s) = Q(s)/P(s)$  har lägre grad än nämnaren, är  $K(s)$  laplacetransform till en kontinuerlig funktion  $k(t)$ , och enligt sats 7.2.1 är  $\mathcal{L}[k * x](s) = \tilde{k}(s)\tilde{x}(s) = K(s)\tilde{x}(s) = \tilde{y}(s)$ . Sambandet mellan utsignal och insignal ges därför av en faltning, nämligen

$$y(t) = k * x(t) = \int_0^t k(t-u)x(u) du.,$$

och  $K$  är det kausala systemets överföringsfunktion.

EXEMPEL 7.6.1. Som konkret exempel betraktar vi en partikel med massa  $m$  som rör sig längs  $x$ -axeln under påverkan av en yttre kraft  $f(t)$ . Låt  $x(t)$  beteckna partikelns läge vid tidpunkten  $t$ , och antag att den är i vila då  $t \leq 0$ . Låt oss slutligen använda läget som den observerade variabeln (utsignalen)  $y$ .

Enligt Newtons rörelselag beskrivs systemets tillstånd av differential-ekvationen  $mx''(t) = f(t)$ , medan  $y(t) = x(t)$ . I föreliggande situation är således  $P(s) = ms^2$ ,  $Q(s) = 1$ ,  $K(s) = Q(s)/P(s) = 1/ms^2$  och  $k(t) = t/m$ . Sambandet mellan kraft (insignal)  $f$  och läge (utsignal)  $x$  ges således av faltningen

$$x(t) = k * f(t) = m^{-1} \int_0^t (t-u)f(u) du. \quad \square$$

Nollställena till nämnaren  $Q(z)$  i en rationell funktion  $P(z)/Q(z)$  som förkortats så att  $P(z)$  och  $Q(z)$  saknar gemensamma nollställen, kallas den rationella funktionens *poler*. Om  $z_0$  är en pol till den rationella funktionen  $R(z)$  så är uppenbarligen

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |R(z)| = +\infty.$$

För kausala LTI-system med rationella överföringsfunktioner kan vi enkelt avgöra om systemen är BIBO-stabila eller ej genom att studera överföringsfunktionernas poler. Vi har nämligen följande sats.

**Sats 7.6.1.** *Ett kausalt linjärt tidsinvariant system med rationell överföringsfunktion är BIBO-stabilt om och endast om överföringsfunktionen inte har några poler i halvplanet  $\operatorname{Re} s \geq 0$ .*

*Bevis.* Betrakta ett kausalt linjärt system med rationell överföringsfunktion. Genom partialbråksutveckling kan överföringsfunktionen  $K(s)$  skrivas som en linjärkombination av bråk av typen  $(s-c)^{-n}$ , där  $c$  är en pol till  $K(s)$  och  $n \geq 1$  är polens ordning, och impulssvaret  $k(t)$  är en linjärkombination av motsvarande funktioner  $t^{n-1}e^{ct}$ . För alla poler  $c$  med negativ realdel är

$$\int_0^\infty |t^{n-1}e^{ct}| dt < \infty,$$

och om alla poler har negativ realdel uppfyller följaktligen linjärkombinationen  $k(t)$  villkoret  $\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty$ , vilket visar att systemet  $y = k * x$  är BIBO-stabilt i detta fall.

För att bevisa omvändningen, dvs. att systemet inte är BIBO-stabilt om överföringsfunktionen har en pol i det slutna halvplanet  $\operatorname{Re} s \geq 0$  noterar vi först att laplacetransformen  $\tilde{f}(s)$  till en begränsad funktion  $f$  är definierad och analytisk i det öppna halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$  eftersom absolutkonvergensabskissan  $\sigma_a(f)$  är  $\leq 0$ . Vidare är funktionen  $(\operatorname{Re} s)\tilde{f}(s)$  begränsad i samma halvplan av konstanten  $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$  på grund av olikheten

$$|\tilde{f}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_0^\infty \|f\|_\infty e^{-\sigma t} dt = \sigma^{-1} \|f\|_\infty.$$

Om laplacetransformen  $\tilde{y}(s)$  till en signal  $y$  har en pol i halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$  eller om

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma |\tilde{y}(\sigma + bi)| = +\infty$$

för något reellt tal  $b$ , så kan följaktligen signalen  $y$  inte vara begränsad.

Antag nu att systemets överföringsfunktion  $K$  har en pol  $c$  i det öppna halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$ . Då resulterar den begränsade insignalen  $H$ , där  $H$  är Heavisidefunktionen, i en obegränsad utsignal  $y$ , eftersom laplacetransformen  $\tilde{y}(s) = K(s)s^{-1}$  då också har en pol i  $c$  och följaktligen inte är definierad i hela det öppna halvplanet.

Om  $K$  istället har en pol  $bi$  på den imaginära axeln, så är utsignalen  $y$  till den begränsade insignalen  $e^{ibt}$  obegränsad, ty för laplacetransformen  $\tilde{y}(s) = K(s)(s - bi)^{-1}$  gäller i detta fall att

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma |\tilde{y}(\sigma + bi)| = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + b^2}} |K(\sigma + bi)| = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} |K(\sigma + bi)| = +\infty.$$

Därmed är beviset klart.  $\square$

## Övningar

- 7.20 Bestäm överföringsfunktion och impulssvar för det kausala systemet  $y = k * x$  om sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av differentialekvationen

$$\begin{cases} z'''(t) + 4z''(t) + 5z'(t) + 2z(t) = x(t) \\ 2z'(t) + z(t) = y(t) \\ z''(0) = z'(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

Är systemet BIBO-stabilt?

- 7.21 Bestäm överföringsfunktion och impulssvar för det kausala systemet  $y = k * x$  om sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av

differentialekvationen

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = x(t) \\ y'(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Är systemet BIBO-stabilt?

7.22 Avgör om det kausala LTI-systemet  $y = k * x$  är BIBO-stabilt för följande impulssvar:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } k(t) = \cos t & \text{b) } k(t) = t^2 e^{-2t} \sin t & \text{c) } k(t) = \chi_{[0,1]}(t) \\ \text{d) } k(t) = \frac{1}{t^2 + 1}. \end{array}$$

7.23 Visa, t. ex. genom att betrakta utsignalens värden i punkterna  $2n\pi$  för insignalen  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n\pi, (n+1)\pi]}(t)$ , att LTI-systemet  $y = k * x$  är BIBO-instabilt om

$$\text{a) } k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \chi_{[n\pi, (n+1)\pi]}(t) \quad \text{b) } k(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

## 7.7 Laplacetransformen för mått

Vi har tidigare förklarat vad som menas med integralen  $\int_{\mathbf{R}} f(t) d\mu(t)$  över hela  $\mathbf{R}$  av en funktion  $f$  med avseende på ett (ändligt) mått  $\mu$ . Integralen  $\int_E f(t) d\mu(t)$  över ett delmängd  $E$  av den reella axeln återför vi nu på definitionen av en integral över hela  $\mathbf{R}$  genom att sätta funktionen  $f$  lika med noll utanför mängden  $E$ , dvs.

$$\int_E f(t) d\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t) \chi_E(t) d\mu(t).$$

Speciellt är alltså

$$\int_{[0, \infty[} f(t) d\mu(t) = \int_{\mathbf{R}} f(t) H(t) d\mu(t)$$

där  $H(t)$  är Heavisidefunktionen, men vi skriver fortsättningsvis

$$\int_0^{\infty} f(t) d\mu(t)$$

istället för  $\int_{[0, \infty[} f(t) d\mu(t)$ .

Utvidningen av definitionsområdet för laplacetransformen till mått sker nu på ett uppenbart sätt: Om  $\mu$  är ett mått på  $\mathbf{R}$  så definieras dess *laplace-transform*  $\tilde{\mu}(s)$  som

$$\tilde{\mu}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mu(t).$$



För ändliga mått  $\mu$ , som är den typ av mått som vi har behandlat, existerar säkert laplacetransformen  $\mu(s)$  för alla komplexa tal  $s$  med realdel  $\operatorname{Re} s \geq 0$ , och man kan visa att funktionen  $\tilde{\mu}$  är begränsad och oändligt deriverbar i det öppna halvplanet  $\operatorname{Re} s > 0$ .

EXEMPEL 7.7.1. Diracmåttet  $\delta_a$ , där  $a \geq 0$ , har laplacetransformen

$$\tilde{\delta}_a(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta_a(t) dt = e^{-as}.$$

Speciellt har således  $\delta$ , Diracmåttet i origo, den konstanta funktionen 1 som laplacetransform.  $\square$

En funktions laplacetransform ger bara information om funktionens restriktion till icke-negativa reella axeln  $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$ . På motsvarande sätt ger laplacetransformen till ett mått bara information om den del av måttet som "lever" på  $\mathbf{R}_+$ . Låt oss säga att ett mått  $\mu$  är *koncentrerat* i mängden  $E$  om

$$\int_{\mathbf{R}} f(t) d\mu(t) = 0$$

för alla begränsade kontinuerliga funktioner  $f$  som är lika med noll på  $E$ . Exempelvis är Diracmåttet  $\delta_a$  koncentrerat i punkten  $a$ .

Man kan nu visa följande entydighetssats.

**Sats 7.7.1.**  *Två ändliga mått som är koncentrerade i (delmängder till) icke-negativa reella axeln  $[0, \infty[$ , är lika om de har samma laplacetransform.*

## Övningar

7.24 Bestäm laplacetransformen till måttet  $\mu = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} \delta_n$ .

7.25 Verifiera transformeringsregeln  $\widetilde{\mu * \nu}(s) = \tilde{\mu}(s)\tilde{\nu}(s)$  för mått.

7.26 Bestäm impulssvar och överföringsfunktion för LTI-systemet

$$y(t) = x(t) + 2x(t-1),$$

där  $x(t) = 0$  för  $t \leq 0$ .



# Kapitel 8

## Z-transformen

### 8.1 Definition och egenskaper

Z-transformen används för att studera följder  $(a_n)_0^\infty$  som inte blir alltför stora då  $n$  går mot oändligheten. Låt oss börja med att definiera detta villkor ordentligt.

**Definition.** En följd  $a = (a_n)_0^\infty$  av komplexa tal säges ha en tillväxt som är *högst exponentiell*, eller tillhöra klassen  $\mathcal{E}$ , om det finns två positiva konstanter  $K$  och  $r$  sådana att

$$|a_n| \leq Kr^n \quad \text{för alla } n.$$

Om  $(a_n)_0^\infty$  och  $(b_n)_0^\infty$  är två följder i  $\mathcal{E}$  och  $\lambda$  är ett godtyckligt komplext tal, så ligger summaföljden  $(a_n + b_n)_0^\infty$  och produktföljden  $(\lambda a_n)_0^\infty$  också i klassen  $\mathcal{E}$ . Detta betyder att  $\mathcal{E}$  är ett vektorrum.

**Definition.** För komplexa följder  $a = (a_n)_0^\infty$  i klassen  $\mathcal{E}$  definieras *z-transformen*  $\mathcal{Z}[a](z)$  som den oändliga serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

där  $z$  är en komplex variabel.

Villkoret att  $a$  tillhör  $\mathcal{E}$  garanterar att det finns ett icke-negativt tal  $\rho_a$  sådant att z-transformen  $\mathcal{Z}[a](z)$  är absolutkonvergent för  $|z| > \rho_a$  och divergent för  $|z| < \rho_a$ . Genom variabelbytet  $t = 1/z$  överförs nämligen z-transformen  $\mathcal{Z}[a](z)$  i potensserien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ , och villkoret att koefficientföljden är högst exponentiellt växande garanterar att potensserien har en konvergensradie  $R$  som är positiv eller  $+\infty$ . Översatt till z-transformen betyder detta att z-transformen är absolutkonvergent om  $|z| > 1/R$  och divergent om  $|z| < 1/R$ .

Av resultaten för potensserier följer vidare att z-transformen definierar en funktion som är oändligt många gånger deriverbar i området  $|z| > \rho_a$  och att derivatorna fås genom att derivera serien termvis.

Den genom variabelbytet  $t = 1/z$  erhållna potensserien innehåller naturligtvis samma information som z-transformen. Man skulle därför lika gärna kunna arbeta med potensserier som med z-transformer, men analogin med laplacetransformen blir bättre om man definierar z-transformen som vi gjort ovan.

EXEMPEL 8.1.1. Låt  $\lambda$  vara ett godtyckligt komplext tal. Följden  $(\lambda^n)_0^\infty$  tillhör förstas klassen  $\mathcal{E}$ , och dess z-transform är

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \lambda/z} = \frac{z}{z - \lambda}$$

för  $|z| > |\lambda|$ . □

Ett för alla tillämpningar väsentligt faktum är att z-transformen bestämmer talföljden entydigt. Detta är kontentan av följande sats.

**Sats 8.1.1** (Entydighetssatsen). *Z-transformen är en injektiv avbildning, dvs. om  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $b = (b_n)_0^\infty$  är två följder i  $\mathcal{E}$  och  $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$  för alla  $z$  utanför någon cirkel i komplexa talplanet, så är  $a = b$ .*

*Anmärkning.* Det räcker att veta att  $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$  för alla reella tal  $z$  som är större än något tal, eller till och med bara att  $\mathcal{Z}[a](z_n) = \mathcal{Z}[b](z_n)$  för någon följd  $(z_n)_0^\infty$  av tal som går mot oändligheten då  $n \rightarrow \infty$ , för att dra slutsatsen att  $a = b$ . Detta följer av att z-transformen är en s. k. analytisk funktion.

*Bevis.* Om  $\mathcal{Z}[a](z) = \mathcal{Z}[b](z)$  för alla  $z$  utanför någon cirkel så är motsvarande potensserier  $\mathcal{Z}[a](1/t)$  och  $\mathcal{Z}[b](1/t)$  lika för alla  $t$  i någon (punkterad) omgivning av  $t = 0$ , och härav följer på grund av entydighetssatsen för potensserier att  $a_n = b_n$  för alla  $n$ . □

En annan enkel observation är att Z-transformen är en linjär avbildning.

**Sats 8.1.2.** *Z-transformen är linjär, dvs. om  $a, b \in \mathcal{E}$  och  $\lambda, \mu$  är komplexa tal så är*

$$\mathcal{Z}[\lambda a + \mu b](z) = \lambda \mathcal{Z}[a](z) + \mu \mathcal{Z}[b](z)$$

för alla  $z$  för vilka högerledet existerar.

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\lambda a + \mu b](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^{-n} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \\ &= \lambda \mathcal{Z}[a](z) + \mu \mathcal{Z}[b](z). \end{aligned} \quad \square$$

Om  $(a_n)_0^\infty$  är en följd som växer högst exponentiellt, så har förstås också följden  $(\lambda^n a_n)_0^\infty$  samma egenskaper för varje komplext tal  $\lambda$ , och sambandet mellan dessa båda följdernas z-transformer ges av nästa sats.

**Sats 8.1.3.** Om  $a = (a_n)_0^\infty$  är en följd i  $\mathcal{E}$  och  $\lambda$  är ett nollskilt komplext tal, så är

$$\mathcal{Z}[(\lambda^n a_n)](z) = \mathcal{Z}[a](z/\lambda).$$

*Bevis.*  $\mathcal{Z}[(\lambda^n a_n)](z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z/\lambda)^{-n} = \mathcal{Z}[a](z/\lambda). \quad \square$

EXEMPEL 8.1.2. Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess z-transform är

$$A(z) = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

*Lösning.* Enligt entydighetssatsen finns det högst en sådan följd, och för att bestämma den börjar vi med att bryta ut faktorn  $z$  och partialbråksuppdelar sedan det resterande bråket:

$$A(z) = z \cdot \frac{z^2 - 4z + 7}{(z-1)(z-2)(z-3)} = z \cdot \left( \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} \right).$$

Man finner lätt att koefficienterna är  $A = 2$ ,  $B = -3$  och  $C = 2$ , varför

$$A(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} - 3 \cdot \frac{z}{z-2} + 2 \cdot \frac{z}{z-3}.$$

Enligt exempel 8.1.1 är  $z/(z-\lambda)$  z-transform till följden  $(\lambda^n)$ , och om vi kombinerar detta faktum med linearitet, drar vi slutsatsen att den sökta följden är

$$a_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n. \quad \square$$

En naturlig generalisering av exempel 8.1.2 är att för alla rationella funktioner  $P(z)/Q(z)$  som är z-transformer, bestämma motsvarande följd. Ett nödvändigt villkor för att en rationell funktion ska vara z-transform är att täljarens gradtal inte är större än nämnarens; detta följer med en gång av följande sats.

**Sats 8.1.4.** För alla följder  $a = (a_n)_0^\infty$  i  $\mathcal{E}$  är  $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}[a](z) = a_0$ .

*Bevis.* Variabelbytet  $z = 1/t$  och det faktum att potensserier är kontinuerliga funktioner medför att

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0. \quad \square$$

Exempel 8.1.1 ger oss den inversa följderna till transformen  $z/(z - \lambda)$ , men för att komma vidare behöver vi också identifiera den inversa följderna till z-transformen  $z/(z - \lambda)^k$  för heltal  $k$  som är större än 1. Följande sats hjälper oss med detta. Vi påminner om att binomialkoefficienterna  $\binom{n}{k}$  ges av formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Observera att denna formel är meningsfull även för naturliga tal  $n$  som är mindre än  $k$  och att  $\binom{n}{k} = 0$  om  $0 \leq n < k$ .

**Sats 8.1.5.** Antag att  $a = (a_n)_0^\infty$  är en följd i  $\mathcal{E}$  med z-transform  $A(z)$  och sätt

$$b_n = \binom{n}{k} a_n,$$

där  $k$  är ett positivt heltal. Då ligger följderna  $b = (b_n)_0^\infty$  i  $\mathcal{E}$  och dess z-transform är

$$\mathcal{Z}[b](z) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)).$$

Speciellt är alltså

$$\mathcal{Z}[(na_n)](z) = -zA'(z).$$

*Bevis.* Det följer av binomialsatsen att  $\binom{n}{k} \leq (1+1)^n = 2^n$ , och denna olikhet medför förstas att följderna  $(b_n)_0^\infty$  tillhör  $\mathcal{E}$ . För att bestämma följdernas z-transform börjar vi med att derivera sambandet

$$z^{k-1} A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-(n-k+1)}$$

$k$  gånger; detta resulterar i formeln

$$\frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} (n-k+1)(n-k+2)\cdots n a_n z^{-(n+1)}$$

Genom att multiplicera båda sidorna i formeln ovan med  $(-1)^k z$  och dividera med  $k!$  erhålls den sökta formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n z^{-n} = \frac{(-1)^k z}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^{k-1} A(z)). \quad \square$$

**Korollarium 8.1.6.** Följderna  $((\binom{n}{k} \lambda^{n-k})_{n=0}^\infty)$  har z-transform  $\frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}$ .

*Bevis.* Vi använder föregående sats på följderna  $(1, 1, 1, \dots)$  bestående av idel ettor och som har z-transform  $z/(z-1)^{-1}$ . Detta ger att

$$\mathcal{Z}[(\binom{n}{k})](z) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{z^k}{z-1} \right) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{z^k - 1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \right).$$

Nu är

$$\frac{z^k - 1}{z - 1} = z^{k-1} + z^{k-2} + \dots + z + 1$$

ett polynom i  $z$  av grad  $k - 1$ , så därför är  $k$ :te derivatan av denna del lika med noll. Det följer att

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[(\binom{n}{k})](z) &= \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k} \left( \frac{1}{z-1} \right) = \frac{(-1)^k z}{k!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{(z-1)^{k+1}} \\ &= \frac{z}{(z-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Detta visar korollariet i fallet  $\lambda = 1$ . Det allmänna fallet fås ur detta specialfall med hjälp av sats 8.1.3, som ger

$$\mathcal{Z}[(\binom{n}{k} \lambda^n)](z) = \frac{z/\lambda}{(z/\lambda - 1)^{k+1}} = \frac{\lambda^k z}{(z - \lambda)^{k+1}},$$

varur formeln i korollariet följer efter division med  $\lambda^k$ .  $\square$

Vi kan nu avgöra vilka rationella funktioner som är  $z$ -transformer och i princip också bestämma motsvarande följder.

**Sats 8.1.7.** *En rationell funktion  $R(z) = P(z)/Q(z)$  är  $z$ -transform till en följd i  $\mathcal{E}$  om och endast om polynomet  $P(z)$  har ett gradtal som inte överstiger gradtalet hos polynomet  $Q(z)$ .*

*Bevis.* Vi vet redan att villkoret på gradtalen är nödvändigt – för att bevisa att det också är tillräckligt antar vi att  $P(z)$  har ett gradtal som högst är lika med gradtalet hos  $Q(z)$ . Vi skriver den rationella funktionen  $R(z)$  på formen

$$R(z) = z \cdot \frac{P(z)}{zQ(z)}$$

och faktoriserar polynomet  $zQ(z)$ :

$$zQ(z) = z^{m_0} (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_k)^{m_k}.$$

Här är  $0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  de komplexa nollställena till polynomet  $zQ(z)$ , och  $m_0, m_1, \dots, m_k$  är nollställenas multiplicitet.

Eftersom gradtalet hos nämnaren  $zQ(z)$  är strikt större än gradtalet hos täljaren  $P(z)$ , kan den rationella funktionen  $P(z)/zQ(z)$  skrivas som en summa av partialbråk av typen

$$\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_{m_0}}{z^{m_0}}$$

och

$$\frac{B_1}{z - \lambda_i} + \frac{B_2}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{B_{m_i}}{(z - \lambda_i)^{m_i}},$$

där varje nollställe  $\lambda_i$  ger en summa av det sistnämnda slaget.

Genom att multiplicera tillbaka  $z$  ser vi att den rationella funktionen  $R(z)$  är en summa av uttryck av följande slag:

$$A_1 + \frac{A_2}{z} + \dots + \frac{A_{m_0}}{z^{m_0-1}}$$

och

$$\frac{B_1 z}{z - \lambda_i} + \frac{B_2 z}{(z - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{B_{m_i} z}{(z - \lambda_i)^{m_i}}.$$

Den förstnämnda summan är  $z$ -transform till följden

$$(8.1) \quad (A_1, A_2, \dots, A_{m_0}, 0, 0, \dots)$$

medan den andra summan är  $z$ -transform till en följd vars  $n$ -te term är

$$(8.2) \quad B_1 \lambda_i^n + B_2 \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} + \dots + B_{m_i} \binom{n}{m_i - 1} \lambda_i^{n-(m_i-1)}.$$

På grund av linearitet är därför  $R(z)$   $z$ -transform till den följd som fås genom att lägga ihop följden (8.1) med alla följderna (8.2).  $\square$

EXEMPEL 8.1.3. Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess  $z$ -transform är

$$A(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z - 3)^4}.$$

*Lösning.* Vi börjar med att bryta ut  $z$  ur täljaren och partialbråksuppdelar sedan det resterande bråket:

$$A(z) = z \cdot \frac{z + 4}{(z - 3)^4} = z \cdot \left( \frac{7}{(z - 3)^4} + \frac{1}{(z - 3)^3} \right) = 7 \cdot \frac{z}{(z - 3)^4} + \frac{z}{(z - 3)^3}.$$

Det följer nu av korollarium 8.1.6 att

$$a_n = 7 \binom{n}{3} 3^{n-3} + \binom{n}{2} 3^{n-2},$$

vilket kan förenklas till

$$a_n = \frac{1}{2} (7n^3 - 12n^2 + 5n) 3^{n-4}. \quad \square$$

EXEMPEL 8.1.4. Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess  $z$ -transform är

$$A(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - 2)(z^2 - 2z + 5)}.$$

*Lösning.* Eftersom det inte finns någon faktor  $z$  att bryta ut ur täljaren börjar vi med att förlänga bråket  $A(z)$  med  $z$  och skriver det på formen

$$A(z) = z \cdot \frac{z^2 + 1}{z(z - 2)(z^2 - 2z + 5)}$$



med avsikten att först partialbråksuppdelna den andra faktorn i ovanstående uttryck. Polynomet  $z^2 - 2z + 5$  har komplexa nollställena  $z = 1 \pm 2i$ , så dess faktorisering är  $(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)$ . Detta betyder att vi har en partialbråksuppdelning av följande slag

$$\frac{z^2 + 1}{z(z - 2)(z^2 - 2z + 5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 2} + \frac{C}{z - 1 - 2i} + \frac{D}{z - 1 + 2i},$$

och koefficientbestämning ger

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{10}(2 + i), \quad D = -\frac{1}{10}(2 - i) = \bar{C}.$$

Följaktligen är

$$A(z) = A + B \frac{z}{z - 2} + C \frac{z}{z - 1 - 2i} + D \frac{z}{z - 1 + 2i},$$

och

$$a_n = A \delta_n + B 2^n + C (1 + 2i)^n + D (1 - 2i)^n,$$

där  $\delta = (\delta_n)_0^\infty$  betecknar följden

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{för } n = 0, \\ 0 & \text{för övriga } n. \end{cases}$$

Följden  $(a_n)_0^\infty$  är reell beroende på att  $D(1 - 2i)^n = \bar{C}(1 - 2i)^n = \overline{C(1 + 2i)^n}$ , vilket medför att  $C(1 + 2i)^n + D(1 - 2i)^n = 2 \operatorname{Re}(C(1 + 2i)^n)$ , och att således

$$a_n = -\frac{1}{10} \delta_n + 2^{n-1} - \frac{1}{5} \operatorname{Re}((2 + i)(1 + 2i)^n).$$

Vi kommer fram till en alternativ form för  $a_n$  genom att först skriva de komplexa talen  $1 + 2i$  och  $2 + i$  på polär form:

$$\begin{aligned} 1 + 2i &= \sqrt{5} e^{i\alpha}, & \alpha &= \arg(1 + 2i) = \arctan 2, \\ 2 + i &= \sqrt{5} e^{i\beta}, & \beta &= \arg(2 + i) = \arctan \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Det följer att

$$(2 + i)(1 + 2i)^n = \sqrt{5} e^{i\beta} \cdot \sqrt{5}^n e^{in\alpha} = \sqrt{5}^{n+1} e^{i(n\alpha + \beta)},$$

och att följaktligen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((2 + i)(1 + 2i)^n) &= \sqrt{5}^{n+1} \cos(n\alpha + \beta) \\ &= \sqrt{5}^{n+1} (\cos n\alpha \cos \beta - \sin n\alpha \sin \beta) \\ &= \sqrt{5}^{n+1} \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \cos n\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin n\alpha \right) \\ &= \sqrt{5}^n (2 \cos n\alpha - \sin n\alpha). \end{aligned}$$

Detta betyder att

$$a_n = -\frac{1}{10} \delta_n + 2^{n-1} - \sqrt{5}^{n-2} (2 \cos n\alpha - \sin n\alpha). \quad \square$$

## Övningar

8.1 Bestäm z-transformen till följande följder  $(a_n)_0^\infty$ :

a)  $a_n = 2^{-n}$       b)  $a_n = n \cdot 3^n$       c)  $a_n = n^2 \cdot 2^n$

8.2 Bestäm z-transformen till följden  $(a_n)_0^\infty$  om

a)  $a_{2k} = (-1)^{k-1}$  för  $k \geq 1$  och  $a_n = 0$  för övriga  $n$ ;

b)  $a_{2k} = (k-1)(-1)^k$  för  $k \geq 1$  och  $a_n = 0$  för övriga  $n$ .

8.3 Bestäm z-transformen till följden  $(1/(n+1))_0^\infty$ .

8.4 Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om dess z-transform är

a)  $\frac{z}{3z-2}$       b)  $\frac{1}{z}$       c)  $\frac{3z^3 - 8z^2 + 16z}{(z-2)^2(z+1)}$ .

## 8.2 Translation och differensekvationer

Två viktiga operationer på rummet av alla följder  $(a_n)_0^\infty$  är *vänstertranslation*  $L$  och *högertranslation*  $R$ , som definieras på följande vis:

$$L(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

$$R(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots).$$

Vänstertranslationen förskjuter följden ett steg åt vänster varvid första elementet  $a_0$  faller bort, medan högertranslationen förskjuter följden ett steg åt höger och introducerar en nolla på den första platsen (dvs. platsen med index 0).

Om vi sätter  $a_{-1} = 0$ , så är tydligen

$$R(a_n)_0^\infty = (a_{n-1})_0^\infty,$$

och för att slippa liknande påpekanden i fortsättningen inför vi nu följande konvention:

*Följder  $(a_n)_0^\infty$  som från början bara är definierade för icke-negativa index  $n$ , utvidgas till att vara definierade för alla heltalsindex genom definitionen  $a_n = 0$  för alla negativa index  $n$ .*

Vänster- och högertranslation är uppenbarligen linjära avbildningar på rummet av alla följder. Om  $a$  är en följd som växer högst exponentiellt, så har givetvis också de båda translaterade följderna  $La$  och  $Ra$  samma egenskap. (Om  $(a_n)_0^\infty$  uppfyller tillväxtvillkoret  $|a_n| \leq Kr^n$ , så uppfyller de båda följderna  $(a_{n+1})_0^\infty$  och  $(a_{n-1})_0^\infty$  villkoret med samma  $r$  men med  $K$  ersatt av  $Kr$  resp.  $K/r$ .) Detta innebär att vi kan uppfatta translationerna  $L$  och  $R$  som operatorer på vektorrummet  $\mathcal{E}$ .

Genom att upprepa avbildningarna  $L$  resp.  $R$  flera gånger kan vi translatera flera steg åt vänster resp. höger:

$$L^k(a_n)_0^\infty = (a_{n+k})_0^\infty \quad \text{och} \quad R^k(a_n)_0^\infty = (a_{n-k})_0^\infty.$$

Vår nästa sats beskriver hur  $z$ -transformen förhåller sig till translation.

**Sats 8.2.1.** För alla följder  $a \in \mathcal{E}$  är

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[R^k a](z) &= z^{-k} \mathcal{Z}[a](z) \quad \text{och} \\ \mathcal{Z}[L^k a](z) &= z^k \mathcal{Z}[a](z) - a_0 z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \dots - a_{k-1} z. \end{aligned}$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[R^k a](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{-n} = z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^{-(n-k)} \\ &= z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m} = z^{-k} \mathcal{Z}[a](z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[L^k a](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^{-(n+k)} = z^k \sum_{m=k}^{\infty} a_m z^{-m} \\ &= z^k \left( \mathcal{Z}[a](z) - \sum_{m=0}^{k-1} a_m z^{-m} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Som tillämpning på föregående sats visar vi hur man kan använda  $z$ -transformen för att lösa linjära differensekvationer.

**EXEMPEL 8.2.1.** Lös differensekvationen

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4,$$

med begynnelsevillkoren  $a_0 = 1$  och  $a_1 = 2$ .

*Lösning.* Med hjälp av de givna begynnelsevillkoren kan vi bestämma talen  $a_2, a_3, a_4, \dots$  rekursivt på ett entydigt sätt, så differensekvationen har en entydig lösning  $a = (a_n)_0^\infty$ . Låt  $A(z)$  beteckna lösningsföljdens  $z$ -transform. De båda vänstertranslaterade följderna  $(a_{n+1})_0^\infty$  och  $(a_{n+2})_0^\infty$  har då  $z$ -transformerna  $zA(z) - z$  resp.  $z^2A(z) - z^2 - 2z$ .  $Z$ -transformen till följden i differensekvationens vänsterled är därför på grund av linearitet lika med

$$z^2A(z) - z^2 - 2z - 5(zA(z) - z) + 6A(z) = (z^2 - 5z + 6)A(z) - z^2 + 3z$$

medan  $z$ -transformen till den konstanta följden 4 i högerledet ges av exempel 8.1.1 (med  $\lambda = 1$ ) och är  $4z/(z-1)$ . Följaktligen är

$$(z^2 - 5z + 6)A(z) - z^2 + 3z = \frac{4z}{z-1},$$

vilket leder till att

$$(z^2 - 5z + 6)A(z) = z^2 - 3z + \frac{4z}{z-1} = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{z-1};$$

$$A(z) = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} = \frac{z^3 - 4z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

I exempel 8.1.2 fann vi att  $A(z)$  är z-transform till följden

$$a_n = 2 - 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n,$$

som därför också är differensekvationens lösning.  $\square$

### Övningar

8.5 Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = 0$  och  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = -1$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$

8.6 Bestäm följden  $(a_n)_0^\infty$  om  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$  och  $a_{n+2} + a_n = 2n + 4$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$

8.7 Lös följande system av linjära differensekvationer med begynnelsevärdena  $a_0 = b_0 = 1$ :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n \\ b_{n+1} = -6a_n + b_n. \end{cases}$$

### 8.3 Faltning

När två potensserier

$$A(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots$$

och

$$B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots$$

multipliceras med varandra blir resultatet en ny potensserie

$$C(t) = A(t)B(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots,$$

och koefficienterna i den nya serien ges av att

$$c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \quad c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

och allmänt

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Detta sätt att av två följderna  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $b = (b_n)_0^\infty$  bilda en ny följd  $c = (c_n)_0^\infty$  kallas *faltning* och man skriver

$$c = a * b.$$

Man kan visa att om två potensserier  $A(t)$  och  $B(t)$  är konvergenta i en cirkelskiva  $|t| < R$ , så är säkert också potensserien för deras produkt  $C(t) = A(t)B(t)$  konvergent i samma cirkelskiva. Detta innebär att följden  $c = a * b$  växer högst exponentiellt om de båda följderna  $a$  och  $b$  växer högst exponentiellt. Eftersom vidare  $C(1/z) = A(1/z) \cdot B(1/z)$  och  $A(1/z)$ ,  $B(1/z)$  och  $C(1/z)$  är  $z$ -transformerna till de tre följderna  $a$ ,  $b$  och  $a * b$ , har vi kommit fram till följande sats:

**Sats 8.3.1.** Om  $a = (a_n)_0^\infty$  och  $b = (b_n)_0^\infty$  är två följderna i  $\mathcal{E}$ , så ligger faltningen  $a * b$  också i  $\mathcal{E}$ , och för de tre följdernas  $z$ -transformer gäller sambandet

$$\mathcal{Z}[a * b](z) = \mathcal{Z}[a](z) \cdot \mathcal{Z}[b](z).$$

En faltning  $a * b$  kan också skrivas som en linjärkombination av högertranslat till följden  $b$ . Låt som tidigare  $R$  beteckna högertranslationsoperatoren; då är  $b_{n-k} = (R^k b)_n$  och följaktligen

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k (R^k b)_n$$

för alla index  $n$ . Med vår konvention att  $(R^k b)_n = b_{n-k} = 0$  för  $k > n$  kan vi skriva denna summa som en oändlig summa

$$(a * b)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (R^k b)_n,$$

vilket betyder att

$$a * b = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k b.$$

Observera att det inte finns några problem med konvergensen eftersom summan ovan i realiteten är ändlig för varje fixt koordinatindex  $n$ .

## Övningar

8.8 Bestäm följden  $(x_n)_0^\infty$  om

a)  $\sum_{k=0}^n 3^{-k} x_{n-k} = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b)  $x_n + 2 \sum_{k=0}^n (n-k)x_k = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

## 8.4 Diskreta kausala LTI-system

Diskreta svarta lådor diskuterades redan i inledningskapitlet, men nu kan vi säga lite mer om dem. Vi börjar med att repetera några definitioner.

Ett diskret dynamiskt system är en funktion  $T$  som till varje följd  $x = (x_n)_0^\infty$  associerar en följd  $T(x) = y = (y_n)_0^\infty$ . Systemet kallas

- *linjärt* om

$$T(\alpha x + \alpha' x') = \alpha T(x) + \alpha' T(x').$$

för alla följder  $x$  och  $x'$  och alla komplexa tal  $\alpha$  och  $\alpha'$ ;

- *tidsinvariant* om

$$T(R^k x) = R^k T(x).$$

för alla följder  $x$  och alla naturliga tal  $k$ ;

- *kausalt* om det för alla följder  $x$  och  $x'$  och alla index  $n$  gäller att  $x_x = x'_k$  för  $0 \leq k \leq n$  medför att  $T(x)_n = T(x')_n$ .

Ett tidsinvariant system fungerar med andra ord likadant oavsett när det startas, och i ett kausalt system är utsignalens värde vid varje tidpunkt oberoende av insignalens framtida värden.

Diskreta kausala LTI-system karakteriseras fullständigt av följande sats.

**Sats 8.4.1.** *Låt  $T$  vara ett diskret kausalt LTI-system och sätt  $a = T(\delta)$ , där  $\delta$  är följden  $(1, 0, 0, \dots)$ . Då är*

$$T(x) = a * x$$

för alla  $x$ .

*Omvänt är varje system som ges av en faltning av ovanstående slag ett kausalt LTI-system.*

I signalteorisammanhang kallas  $\delta$  en *impuls* och  $a$  är *impulssvaret*.

*Bevis.* Vi ska visa att  $T(x)_n = (a * x)_n$  för alla index  $n$  och beräknar då först  $T(x')$  för följden

$$x' = (x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots).$$

På grund av kausaliteten är nämligen  $T(x)_n = T(x')_n$ .

Eftersom  $R\delta = (0, 1, 0, 0, \dots)$ ,  $R^2\delta = (0, 0, 1, 0, \dots)$ , osv., kan vi uttrycka följden  $x'$  som en summa på följande vis:

$$x' = x_0\delta + x_1R\delta + x_2R^2\delta + \dots + x_nR^n\delta.$$

Linearitet och tidsinvarians medför nu att

$$\begin{aligned} T(x') &= x_0T(\delta) + x_1T(R\delta) + x_2T(R^2\delta) + \dots + x_nT(R^n\delta) \\ &= x_0T(\delta) + x_1RT(\delta) + x_2R^2T(\delta) + \dots + x_nR^n(T\delta) = \sum_{k=0}^n x_kR^ka, \end{aligned}$$

och för den  $n$ :te koordinaten gäller därför att

$$T(x)_n = T(x')_n = \sum_{k=0}^n x_k (R^k a)_n = \sum_{k=0}^n x_k a_{n-k} = (x * a)_n = (a * x)_n.$$

Därmed är beviset för att  $T(x) = a * x$  klart.

Omvändningen, dvs. att faltning är en linjär, tidsinvariant och kausal operation lämnas som övning åt läsaren.  $\square$

För diskreta kausala LTI-system har vi följande karakterisering av BIBO-stabilitet.

**Sats 8.4.2.** *Systemet  $Tx = a * x$  är stabilt om och endast om  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ .*

*Bevis.* För godtyckliga följder  $z = (z_n)_{n=0}^{\infty}$  inför vi beteckningarna

$$\|z\|_{\infty} = \sup_{n \geq 0} |z_n| \quad \text{och} \quad \|z\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

För  $y = Tx = a * x$  gäller då speciellt olikheten

$$|y_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k x_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |x_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \|x\|_{\infty} \leq \|a\|_1 \|x\|_{\infty}$$

som innebär att

$$\|a * x\|_{\infty} \leq \|a\|_1 \|x\|_{\infty}.$$

Om  $\|a\|_1 < \infty$  och insignalen  $x$  är en begränsad följd (med  $\|x\|_{\infty} = C$ ) så är följaktligen utsignalen  $y$  också en begränsad följd (med  $\|y\|_{\infty} \leq C\|a\|_1$ ). Detta visar att  $\|a\|_1 < \infty$  medför BIBO-stabilitet.

Antag omvänt att  $\|a\|_1 = \infty$ . Vi ska visa att detta medför BIBO-instabilitet genom att konstruera en begränsad insignal  $x$  med obegränsad utsignal  $y$ .

Om  $\|a\|_{\infty} = \infty$ , dvs. om följden  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  är obegränsad, så ger insignalen  $\delta$  en obegränsad utsignal, eftersom  $T\delta = a * \delta = a$ .

Så antag fortsättningsvis att  $\|a\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$  och  $\|a\|_{\infty} < \infty$ . Eftersom serien är divergent kan vi induktivt välja en växande följd  $(n_p)_{p=0}^{\infty}$  av naturliga tal med  $n_0 = 0$  och som uppfyller olikheten

$$\sum_{k=0}^{n_p - n_{p-1} - 1} |a_k| \geq p + n_{p-1} \|a\|_{\infty}$$

för  $p \geq 1$ .

Vi definierar nu vår insignal  $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$  genom att sätta  $x_0 = 0$  och sedan välja övriga tal  $x_k$  så att deras absolutbelopp är lika med 1 och

$$x_k a_{n_p - k} = |a_{n_p - k}| \quad \text{för } n_{p-1} < k \leq n_p.$$

Följden  $x$  är givetvis begränsad, men för utsignalen  $y = a * x$  gäller att

$$\begin{aligned}
 |y_{n_p}| &= \left| \sum_{k=0}^{n_p} a_{n_p-k} x_k \right| = \left| \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{n_p-k} x_k + \sum_{k=0}^{n_{p-1}} a_{n_p-k} x_k \right| \\
 &= \left| \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} |a_{n_p-k}| + \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{n_p-k} x_k \right| \\
 &\geq \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} |a_{n_p-k}| - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} |a_{n_p-k} x_k| \\
 &= \sum_{k=0}^{n_p-n_{p-1}-1} |a_k| - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} |a_{n_p-k}| \geq \sum_{k=0}^{n_p-n_{p-1}-1} |a_k| - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} \|a\|_\infty \\
 &\geq p + n_{p-1} \|a\|_\infty - n_{p-1} \|a\|_\infty = p.
 \end{aligned}$$

Eftersom detta gäller för alla naturliga tal  $p \geq 1$  är följden  $y$  obegränsad, och därmed är beviset klart.  $\square$

EXEMPEL 8.4.1. Ett system med impulssvaret  $((n+1)^{-2})_{n=0}^\infty$  är stabilt, och ett system med impulssvaret  $((n+1)^{-1})_{n=0}^\infty$  är instabilt.  $\square$

Vi förutsätter fortsättningsvis att impulssvar och insignaler i våra diskreta kausala LTI-system är högst exponentiellt växande.

Z-transformen

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

till ett systems impulssvar  $a$  kallas systemets *överföringsfunktion*. Det följer av satserna 8.3.1 och 8.4.1 att sambandet mellan insignalens z-transform  $X(z)$  och utsignalens z-transform  $Y(z)$  ges av ekvationen

$$Y(z) = A(z)X(z).$$

Låt nu  $\rho_a$  beteckna det entydigt bestämda tal för vilket z-transformen  $A(z)$  är konvergent i området  $|z| > \rho_a$  och divergent i området  $|z| < \rho_a$ . Nästa sats beskriver ett systems stabilitetsegenskaper i termer av konvergensraden  $\rho_a$ .

**Sats 8.4.3.** *Ett diskret kausalt LTI-system med överföringsfunktion  $A(z)$  är*

- BIBO-stabilt om  $\rho_a < 1$ ;*
- BIBO-instabilt om  $\rho_a > 1$ , eller om  $\rho_a = 1$  och överföringsfunktionen är diskontinuerlig i någon punkt på randen  $|z| = 1$  av konvergensområdet.*

*Bevis.* (a) Antag att systemet är instabilt. Då är  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$  vilket medför att serien  $A(z)$  är divergent för alla komplexa tal  $z$  med  $|z| < 1$  och att följaktligen  $\rho_a \geq 1$ . Villkoret  $\rho_a < 1$  medför således att systemet är stabilt.



(b) Om systemet är stabilt, dvs. om  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ , så är serien  $A(z)$  absolutkonvergent för  $|z| \geq 1$ , vilket betyder att  $\rho_a \leq 1$ . Dessutom är  $z$ -transformen  $A(z)$  säkert kontinuerlig för  $|z| \geq 1$ . Om  $\rho_a > 1$  eller om  $\rho_a = 1$  och funktionen  $A(z)$  är diskontinuerlig i någon punkt på cirkeln  $|z| = 1$ , måste följaktligen systemet vara instabilt.  $\square$

För diskreta kausala LTI-system med rationella överföringsfunktioner har vi följande korollarium till sats 8.4.3.

**Korollarium 8.4.4.** *Ett diskret kausalt LTI-system med rationell överföringsfunktion  $A(z)$  är BIBO-stabilt om och endast om alla polerna till överföringsfunktionen ligger strikt innanför cirkeln  $|z| = 1$ .*

*Bevis.* Låt  $\rho$  vara beloppet hos den av överföringsfunktionens poler som har störst belopp. Då existerar överföringsfunktionen  $A(z)$  för alla  $z$  med  $|z| > \rho$  men inte för alla  $z$  med  $|z| = \rho$ , vilket betyder att konvergensradien  $\rho_a = \rho$ . I en pol  $z_0$  till  $A(z)$  är vidare  $\lim_{z \rightarrow z_0} |A(z)| = +\infty$ , vilket speciellt innebär att funktionen  $A(z)$  har en diskontinuitetspunkt på cirkeln  $|z| = \rho_a$ .

Om alla polerna ligger innanför enhetscirkeln är följaktligen  $\rho_a < 1$ . Om det däremot finns en pol på eller utanför enhetscirkeln så är  $\rho_a \geq 1$ , och i fallet  $\rho_a = 1$  har överföringsfunktionen en diskontinuitetspunkt på enhetscirkeln. Påståendet i korollariet följer därför av sats 8.4.3.  $\square$

EXEMPEL 8.4.2. Ett system med  $A(z) = (z^2 + 1)^{-1}$  som överföringsfunktion är instabilt eftersom polerna  $\pm i$  ligger på enhetscirkeln. Systemets impuls-svar  $a = (a_n)_0^\infty$  fås genom inverstransformering och ges av att  $a_{2k} = (-1)^{k-1}$  för  $k \geq 1$  och  $a_n = 0$  för alla övriga  $n$ . Observera att följderna  $a$  är begränsad.

Med  $x = a$  som begränsad insignal fås en utsignal  $y$  som har  $z$ -transformen

$$Y(z) = A(z)X(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Denna utsignalen är obegränsad, ty genom inverstransformering erhålls

$$y_{2k} = (k-1)(-1)^k \quad \text{för } k \geq 1$$

medan  $y_n = 0$  för alla övriga  $n$ . (Jämför övning 8.2.)  $\square$

## Övningar

8.9 Visa att faltning är en tidsinvariant operation genom att visa att

$$R_k(a * x) = a * R_k x$$

för alla naturliga tal  $k$ .

8.10 I ett diskret kausalt LTI-system ges impulsvaret av följderna  $(\sin \frac{\pi}{2}n)_0^\infty$ . Bestäm utsignalen  $y$  till insignalen  $x = (\cos \frac{\pi}{2}n)_0^\infty$ . Är systemet stabilt?

- 8.11 Är ett diskret LTI-system med impulssvar  $\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)_0^\infty$  stabilt?  
Bestäm också överföringsfunktionen.

# Formler

## Fourierserier

Funktioner med period  $2\pi$ :

$f(t)$	$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt$
<b>Allmänna regler</b>	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$
$e^{imt} f(t)$	$\hat{f}(n - m)$
$f(t - t_0)$	$e^{-it_0 n} \hat{f}(n)$
$f(-t)$	$\hat{f}(-n)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-n)}$
$f'(t)$	$in \hat{f}(n)$
$f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t - u) du$	$\hat{f}(n)\hat{g}(n)$

## Trigonometrisk form

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)).$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Funktioner med period  $P$ :

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$\Omega = 2\pi/P,$$

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) e^{-in\Omega t} dt,$$

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \cos n\Omega t dt,$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t) \sin n\Omega t dt.$$

Parsevals formel:

$$\frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

## Fouriertransformen

$f(t)$	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
<b>Allmänna regler</b>	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)$
$e^{i\alpha t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \alpha)$
$f(t - t_0)$	$e^{-it_0\omega} \hat{f}(\omega)$
$f(-t)$	$\hat{f}(-\omega)$
$f(at) \quad (a \neq 0)$	$ a ^{-1} \hat{f}(\omega/a)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{\hat{f}(-\omega)}$
$tf(t)$	$i \hat{f}'(\omega)$
$f'(t)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u) du$	$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$
<b>Speciella funktioner</b>	
$\chi_{[-a,a]}(t) \quad (a > 0)$	$\frac{2 \sin a\omega}{\omega}$
$(a -  t )\chi_{[-a,a]}(t) \quad (a > 0)$	$\frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}a\omega}{\omega^2}$
$e^{- t }$	$\frac{2}{1 + \omega^2}$
$e^{-t}H(t)$	$\frac{1}{1 + i\omega}$
$e^t(1 - H(t))$	$\frac{1}{1 - i\omega}$
$e^{- t } \operatorname{sgn}(t)$	$\frac{-2i\omega}{1 + \omega^2}$
$\frac{1}{1 + t^2}$	$\pi e^{- \omega }$
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$
$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\pi \chi_{[-a,a]}(\omega)$

Plancherels formler:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega.$$

## Laplacetransformen

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
<b>Allmänna regler</b>	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
$f(at), a > 0$	$a^{-1} F(s/a)$
$f(t - a)H(t - a), a > 0$	$e^{-as} F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-1-k}$
$\int_0^t f(u) du$	$s^{-1} F(s)$
$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t - u) du$	$F(s)G(s)$
<b>Speciella funktioner</b>	
1	$\frac{1}{s}$
$t^n, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$t^n e^{at}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$t^\alpha e^{at}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(s - a)^{\alpha+1}}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$

---

$\frac{\sin t}{t}$	$\arctan \frac{1}{s}$
$\log t$	$-\frac{\log s + \gamma}{s}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\log\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$

---

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\gamma = \text{Eulers konstant} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \approx 0.5772156.$$



## Z-transformen

$a_n$	$A(z) = \mathcal{Z}[a](z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$
<b>Allmänna regler</b>	
$\alpha a_n + \beta b_n$	$\alpha A(z) + \beta B(z)$
$\lambda^n a_n$	$A(z/\lambda)$
$a_{n-k}$ , där $k \geq 1$ och $a_{-1} = \dots = a_{-k} = 0$	$z^{-k} A(z)$
$a_{n+k}$ , där $k \geq 1$	$z^k A(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^{k-j}$
$n a_n$	$-z A'(z)$
$(a * b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$	$A(z)B(z)$
<b>Speciella följder</b>	
$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0, \\ 0 & \text{om } n \geq 1 \end{cases}$	1
1	$\frac{z}{z-1}$
$n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$n^2$	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$
$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
$\lambda^n$	$\frac{z}{z-\lambda}$
$n\lambda^n$	$\frac{\lambda z}{(z-\lambda)^2}$
$\binom{n}{k} \lambda^{n-k}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}$
$\cos \alpha n$	$\frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$
$\sin \alpha n$	$\frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$



# Svar till övningsuppgifter

2.1 Båda serierna är abelsummerbara för  $|\alpha| \leq 1, \alpha \neq 1$ , a) med summan  $(1 - \alpha)^{-1}$  och b) med summan  $\alpha(1 - \alpha)^{-2}$ .

2.a a) Absolutintegrabel med  $\|f\|_1 = \pi$       b) Ej absolutintegrabel  
c) Absolutintegrabel med  $\|f\|_1 = 2$ .

2.3 Utnyttja att  $\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$  och  $\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ .

2.4  $\pi$

3.1  $1/3$

3.2 Varje rationellt tal är en period.

3.3 Låt  $P$  vara en godtycklig period och skriv den på formen  $P = nP_0 + r$  där  $n$  är ett heltal och  $0 \leq r < P_0$ . Då är också  $r$  en period, så det följer att  $r = 0$  eftersom  $P_0$  är den minsta positiva perioden

3.4  $8/3$

3.5  $\frac{3\sqrt{2}}{4}(1 - i)e^{2it} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(1 + i)e^{-2it}$

3.6  $\frac{1}{4} \sin(3t + \frac{\pi}{2}) + \frac{3}{4} \sin(t + \frac{\pi}{2})$

3.7  $\frac{1}{16}e^{4it} - \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{1}{16}e^{-4it}$  resp.  $\frac{1}{8} \cos 4t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{8}$

3.10  $1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nt$

3.11  $2N$  stycken

3.12 a)  $\pi/2$       b)  $\pi^2/3$

3.15  $2i$  resp.  $1$ .

3.16  $-2$

$$3.17 \text{ a) } 2 \sin t + 3 \cos 2t + 4 \sin 3t \quad \text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6t$$

$$\text{c) } \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \neq 0} \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2} e^{int} \quad \text{d) } \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{1 - in} e^{int}$$

$$\text{e) } \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$$

$$3.18 \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nt}{4n^2 - 1}$$

$$3.19 \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$$

$$3.20 \text{ a) } \hat{g}(n) = e^{-inc} \hat{f}(n) \quad \text{b) } \hat{g}(n) = \hat{f}(n - m)$$

$$\text{c) } \hat{g}(n) = (-1)^{n-1} n^2 \hat{f}(n)$$

$$3.21 \hat{g}(n) = e^{-3(n-2)i} \hat{f}(n - 2)$$

3.23 a) och b) Fouriersserien konvergerar med summa  $f(t)$  för alla  $t$ .

$$3.24 \text{ a) } -\pi^2/12 \quad (\text{Välj } t = 0 \text{ i serien i 3.23 a)}$$

$$\text{b) } \pi^2/6 \quad (\text{Välj } t = \pi \text{ i serien i 3.23 a)}$$

$$\text{c) } 1/2 \quad (\text{Välj } t = 0 \text{ i serien i 3.23 b)}$$

$$3.25 f(t) = Ce^{2it}$$

$$3.26 \text{ a) } \frac{\pi^4}{90} \quad \text{b) } \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

$$3.27 \text{ a) } f(t) \sim \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1 - in} e^{int}.$$

Fouriersserien är konvergent för alla  $t$ , med summa  $f(t)$  för  $t \neq 2\pi n$  och summa  $(e^{2\pi} + 1)/2$  då  $t$  är en multipel av  $2\pi$ .

$$\text{b) } \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}$$

$$3.28 f(t) \sim \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{\alpha - n} e^{int}$$

$$3.29 \frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha \pi}$$

$$4.1 u(x, t) = \frac{1}{2} \sin 2t \sin 2x + \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} (\cos(2n+1)t \sin(2n+1)x)$$

$$4.2 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \sin nt \sin nx$$

$$4.3 \quad u(x, t) = e^{-t} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$4.4 \quad u(x, t) = 1 + 3e^{-16t} \cos 4x$$

$$4.5 \quad u(x, t) = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x$$

$$4.6 \quad \text{a) } u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{8e^{-2t}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$$

$$4.7 \quad u(x, t) = \frac{x}{\pi} + \sin x - e^{-t} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin nx$$

$$5.1 \quad \text{a) } \frac{(e^{-i\omega} - 1)i}{\omega} \quad \text{b) } \frac{(1 + i\omega)e^{-i\omega} - 1}{\omega^2} \quad \text{c) } \frac{-4i\omega}{(1 + \omega^2)^2} \quad \text{d) } \frac{1 + e^{-i\pi\omega}}{1 - \omega^2}$$

$$\text{e) } 2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}$$

$$5.2 \quad \text{a) } \frac{(e^{-i\omega} - 1)i}{\omega} \quad \text{b) } \frac{2i \sin \pi\omega}{\omega^2 - 1} \quad \text{c) } 2 \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}$$

$$5.3 \quad \text{a) } \hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$$

$$5.4 \quad \text{a) } 2i \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2} \quad \text{b) } -\frac{4i\omega}{(1 + \omega^2)^2}$$

$$5.6 \quad \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}; \quad f * g(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}.$$

$$5.7 \quad f(t) = \frac{4}{3}((1 - H(t))e^t + H(t)e^{-t/2}) = \begin{cases} \frac{4}{3}e^t & \text{om } t < 0, \\ \frac{4}{3}e^{-t/2} & \text{om } t > 0. \end{cases}$$

[Ledning: Integralekvationen kan skrivas  $f(t) = e^{-|t|} + \frac{1}{2}k * f(t)$ , där  $k(t) = H(t)e^{-t}$ . Fouriertransformera!]

$$5.8 \quad \text{a) } f * f(t) = (1 + |t|)e^{-|t|} \quad \text{b) } y(t) = -\frac{1}{2}(1 + |t|)e^{-|t|}$$

$$5.9 \quad \hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{b}e^{-b|\omega|}. \quad \text{Integralens värde är } \frac{\pi}{b}e^{-ab} \quad (= \hat{f}(a)).$$

$$5.10 \quad \pi$$

$$5.11 \quad \hat{f}(\omega) = 2\pi \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-|\omega|}$$

$$5.14 \quad \text{b) } \hat{f}(\omega) = \pi(e^{e^{-|\omega|}} - 1) \quad \text{c) } \pi(e - 1)$$

$$5.15 \text{ a) } \hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \quad \text{b) } \frac{2\pi}{3}$$

$$5.16 \pi$$

$$5.17 \text{ a) } \hat{f}(\omega) = 4 \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \quad \text{b) } \frac{2\pi}{15}$$

$$5.20 \hat{g}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$5.21 \text{ a) } \hat{f}(\omega) = 2 \frac{\cos \omega - \cos 2\omega}{\omega^2} \quad \left( = 4 \frac{\sin^2 \omega - \sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \right)$$

$$\text{b) } \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{c) } 4 \arctan 2 - \frac{\pi}{2} - \log \frac{5}{2} \quad (\text{Använd Plancherels formel på polär form.})$$

$$5.22 \text{ a) } \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } \hat{g}(\omega) = \frac{e^{1+i\omega} - e^{-(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2} \quad \text{c) } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} \quad \text{d) } \frac{1}{2}$$

$$5.23 \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{\pi/\sqrt{a}} + e^{-\pi/\sqrt{a}}}{e^{\pi/\sqrt{a}} - e^{-\pi/\sqrt{a}}} - \frac{1}{2}$$

$$6.2 \text{ a) } \hat{\phi}_{\mu,\sigma}(\omega) = e^{-i\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2}$$

b)  $\hat{\phi}_{\mu_1,\sigma_1} * \hat{\phi}_{\mu_2,\sigma_2} = \hat{\phi}_{\mu_1+\mu_2,\sigma}$ , där  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . I sannolikhetssteoretiska termer betyder detta att summan av oberoende normalfördelade stokastiska variabler är normalfördelad och att summans medelvärde resp. varians är lika med summan av medelvärdena resp. varianserna hos de i summan ingående stokastiska variablerna.

$$7.1 \text{ a) } \frac{2}{s^3} \quad \text{b) } \frac{1}{(s-2)^2} \quad \text{c) } \frac{1}{s^2 - 2s + 2} \quad \text{d) } \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$\text{e) } \frac{1 - (s+1)e^{-s}}{s^2} \quad \text{f) } \frac{e^s - 1 - s}{s^2(e^s - 1)}$$

$$7.2 \text{ a) } \frac{1}{2}t^2 \quad \text{b) } \frac{1}{6}t^3 \quad \text{c) } \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \quad \text{d) } t\chi_{[0,1[}(t) + H(t-1)$$

$$\text{e) } \frac{1}{2}t^2\chi_{[0,1[}(t) + (t - \frac{1}{2})H(t-1)$$

$$7.6 \text{ a) } \frac{3}{s^2 + 9} \quad \text{b) } \frac{s}{s^2 + 9} \quad \text{c) } \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} \quad \text{d) } \frac{e^{-s}}{s-2}$$

$$\text{e) } \frac{2}{(s-3)(s^2+4)}$$

$$7.7 \text{ a) } 1 - e^{-t} \quad \text{b) } \frac{1}{5}e^{-2t} \sin 5t \quad \text{c) } (3t+1)e^{2t} - e^{-t} \cos t$$

$$\text{d) } \frac{1}{2}(t-1) \sin(t-1) \cdot H(t-1) \quad \text{e) } (e^{2(t-1)} - e^{t-1})H(t-1)$$

$$7.8 \tilde{f}(s) = \arctan \frac{1}{s}$$

$$7.9 \quad f(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}$$

$$7.10 \quad f(t) = 2 \cos t - t \sin t$$

$$7.11 \quad x(t) = -t + e^t - e^{-t}, \quad y(t) = -1 + e^t + e^{-t}$$

$$7.12 \quad f(t) = 4 - 3 \cos t$$

$$7.13 \quad y(t) = t + 2 + (2t - 2)e^t$$

$$7.15 \quad \tilde{f}(s) = -\frac{\log s + C}{s}, \quad \text{där } C = -\int_0^\infty e^{-t} \log t \, dt.$$

Man kan visa att konstanten  $C$  är lika med Eulers konstant  $\gamma$ .

$$7.16 \quad x(t) = 2e^t + \sin t, \quad y(t) = \cos t$$

$$7.17 \quad y(t) = z(t) = e^{2t}$$

$$7.18 \quad \tilde{f}(s) = \frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

$$7.20 \quad K(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)^2(s + 2)}, \quad k(t) = (3 - t)e^{-t} - 3e^{-2t}. \quad \text{Stabilt.}$$

$$7.21 \quad K(s) = \frac{1}{s^2 + 4}, \quad k(t) = \frac{1}{2} \sin 2t. \quad \text{Instabilt.}$$

$$7.22 \quad \text{a) Instabil} \quad \text{b) Stabil} \quad \text{c) Stabil} \quad \text{d) Stabil}$$

$$7.23 \quad \text{a) } y(2n\pi) = -2n\pi \rightarrow -\infty \quad \text{b) } y(2n\pi) = -\int_0^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \rightarrow -\infty$$

$$7.24 \quad \frac{2e^s}{2e^s - 1}$$

$$7.26 \quad \delta + 2\delta_1 \quad \text{resp.} \quad 1 + 2e^{-s}$$

$$8.1 \quad \text{a) } \frac{z}{z + 2} \quad \text{b) } \frac{3z}{(z - 3)^2} \quad \text{c) } \frac{2z^2 + 4z}{(z - 2)^3}$$

$$8.2 \quad \text{a) } \frac{1}{z^2 + 1} \quad \text{b) } \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

$$8.3 \quad -z \log\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$8.4 \quad \text{a) } \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{b) } a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq 1, \\ 1 & \text{om } n = 1 \end{cases} \quad \text{c) } a_n = n \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot (-1)^n.$$

$$8.5 \quad a_n = n + 5 - 3 \cdot 2^n$$

$$8.6 \quad a_n = n + 1 + \frac{i^n - (-i)^n}{2i} = n + 1 + \sin \frac{\pi}{2}n$$

$$8.7 \quad a_n = \frac{2}{5} \cdot 4^n + \frac{3}{5} \cdot (-1)^n, \quad b_n = -\frac{4}{5} \cdot 4^n + \frac{9}{5} \cdot (-1)^n$$

$$8.8 \quad \text{a) } x_0 = 1, \quad x_n = \frac{5}{6} \cdot 2^n \text{ för } n \geq 1$$

$$\text{b) } x_n = \frac{1}{5} (2^n + 4 \cos \frac{\pi}{2}n - 2 \sin \frac{\pi}{2}n)$$

$$8.10 \quad \text{Systemet är instabilt. } y_{2k} = 0 \text{ och } y_{2k+1} = (-1)^k(k+1).$$

$$8.11 \quad \text{Systemet är stabilt. Överföringsfunktion: } (z^2 - z) \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) + z.$$



# Sakregister

- abelsumma, 26
- abelsummation, 26, 66
- absolutintegrabel, 27
- absolutkonvergensabskissa, 150
- absolutkonvergent, 22
- amplitud, 49
- analog signal, 5
- autokorrelationsfunktion, 126
  
- bandbegränsad, 6, 135
- bandbredd, 6, 135
- begynnelsevärdesregeln, 164
- Bessels olikhet, 73
- betingat konvergent, 22
- BIBO-stabilitet, 140, 185
- Bromwichintegralen, 159
  
- Cauchys konvergensprincip, 21
- centrala gränsvärdesatsen, 147
  
- delsumma, 21
- delton, 2
- diffusion, 9
- Diracmått, 38
- Dirichlets polynom, 51
- Dirichlets problem, 100
- diskret signal, 5
- divergent serie, 21
- dominerad konvergens, 34
  
- $\mathcal{E}$ , 150, 173
- entydighetssatsen, 70, 118, 158, 174
  
- $\mathcal{F}$ , 63, 105
- faltning, 8, 112, 131, 153, 183
- fasvinkel, 49
- Ficks lag, 10
  
- fourierkoefficient, 4, 56
- fourierserie, 4, 45, 56
- fouriertransform, 6, 63, 104, 105, 129, 130
- frekvens, 49
- frekvenssvar, 139
- fördelningsfunktion, 145
  
- Gausskärnan, 115
- generaliserad derivata, 79
- Gibbs fenomen, 85
- grundton, 2
- grundvinkelfrekvens, 87
  
- harmonisk analys, 2
- harmonisk funktion, 100
- Heavisidefunktionen, 40
- Heisenbergs olikhet, 142
  
- impuls, 7, 184
- impulssvar, 7, 140, 166, 184
- inversionsformeln, 104, 159
- inversionssatsen, 117
  
- karaktéristisk funktion, 29, 37, 146
- kausal, 7, 141, 184
- kontinuerlig, 14
- konvergens i kvadratisk medel, 78
- konvergent serie, 21
  
- $\mathcal{L}$ , 151
- $L^1(\mathbf{R})$ , 27
- $L^2(\mathbf{R})$ , 120
- $L^1(\mathbf{T})$ , 53
- $L^2(\mathbf{T})$ , 71
- $L^1$ -norm, 28, 53
- $L^2$ -norm, 71, 120

- $L^2$ -konvergens, 78  
Lévy sats, 147  
laplacetransform, 151, 170  
likformigt kontinuerlig, 15  
linjär funktional, 37  
linjärt system, 137  
LTI-system, 138, 166, 184  
mått, 37  
oktav, 90  
Parsevals formel, 73, 77  
partialsumma, 21  
period, 16, 45  
periodisk funktion, 16, 45  
Plancherels formel, 105, 124, 130  
Poissonkärnan, 67  
Poissons summationsformel, 128  
pol, 168  
Riemann-Lebesgues lemma, 31  
Riemanns lokaliseringsprincip, 83  
 $S_N f$ , 56  
sampling, 5  
samplingssatsen, 135  
serie, 21  
signal i kontinuerlig tid, 5  
sinusoid, 48  
slutvärdesregeln, 164  
spektrum, 3  
styckvis kontinuerlig, 28  
summationskärna, 41  
svart låda, 7  
tidsinvariant, 7, 138, 184  
tillståndsfunktion, 167  
translat, 16  
translation, 16, 180  
trappstegsfunktion, 29  
triangelolikheten, 18  
trigonometrisk form, 49, 59  
trigonometriskt polynom, 50  
täthetsfunktion, 37  
vinkelfrekvens, 49  
väntevärde, 37, 145  
värmeledningskärnan, 115  
 $\mathcal{Z}$ , 173  
z-transform, 173  
överföringsfunktion, 9, 166, 186  
övertton, 2