VEKTORGEOMETRI

och

ANDRAGRADSYTOR

Lars-Åke Lindahl

Matematiska institutionen,
Uppsala universitet
2000

Innehåll

Del 1	Vektorgeometri	1
1	Inledning	1
2	Vektorer	2
3	Baser, koordinater och koordinatsystem	9
4	Räta linjens ekvation	13
5	Planets ekvation	16
6	Skalärprodukten	20
7	Linjer och plan i ortonormerade koordinatsystem	25
8	Basbyte	28
9	Kongruensavbildningar	31
10	Determinanter av ordning 2 och 3	35
11	Area, volym och vektorprodukt	42
Del 2	Andragradskurvor och andragradsytor	47
12	Andragradskurvor och andragradsytor	47
13	Reduktion till kanonisk form	52
	Facit	59

Del 1 Vektorgeometri

1 Inledning

För ca 2300 år sedan sammanställde Euklides sin tids geometriska vetande och gav det en axiomatisk framställning i verket Elementa. Euklides ansåg säkert att hans geometri gav den sanna och enda möjliga rumsliga beskrivningen av "världen", men sedan 1800-talet vet man att det finns andra motsägelsefria geometrier, och att dessa kan vara lika användbara som den euklidiska för att beskriva verkligheten.

På 1600-talet revolutionerade Descartes och Fermat geometrin genom att införa koordinatbegreppet. Koordinater gör det möjligt att översätta geometriska frågeställningar till ekvationer, som kan behandlas med verktyg från algebran och analysen. Denna metod att studera geometrin kallas *analytisk geometri*.

I det här kapitlet skall vi studera euklidisk geometri med hjälp av linjär algebra. Utan att för den skull gå in i detalj behöver vi först rekapitulera några viktiga begrepp och resultat från euklidisk geometri.

Euklidisk geometri. Euklides geometri är en geometri för det *tredimensionella euklidiska rummet*, eller *rummet* som vi kort och konsist kommer att kalla det. Som mängd betraktad består rummet av *punkter*. Andra grundläggande punktmängder är rummets *linjer* och *plan*. Punkter, linjer och plan hör i Euklides' och många andra framställningar till teorins s.k. *primitiva begrepp*, dvs. de definieras inte i termer av andra begrepp. Deras betydelse regleras istället av ett antal *axiom*. Axiomen är grundläggande utsagor utifrån vilka man sedan härleder (bevisar) andra utsagor, teorins s.k. satser eller teorem.

Två skilda punkter i rummet bestämmer en unik linje, dvs. det finns en unik linje som går genom (innehåller) de båda punkterna. Analogt bestämmer en linje och en punkt utanför linjen ett unikt plan, dvs. det finns ett unikt plan som innehåller linjen och punkten.

Om två skilda plan skär varandra (dvs. har någon gemensam punkt), så är skärningsmängden en linje. Två plan som inte skär varandra kallas *parallella*. Två linjer kallas *parallella* om de ligger i samma plan och inte har någon gemensam punkt. Det visar sig bekvämt att i fraser av typen "planen π_1 och π_2 är parallella" även tillåta att π_1 och π_2 är samma plan, och analogt för linjer. Vi kommer därför fortsättningsvis att kalla två sammanfallande plan parallella liksom två sammanfallande linjer.

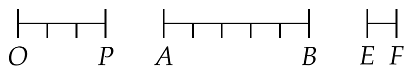
Det berömda parallellaxiomet i euklidisk geometri kan formuleras på följande sätt: Genom varje punkt utanför en linje ℓ går det en unik linje som är parallell med ℓ.

Två linjer som inte ligger i något gemensamt plan kallas *korsande*. Korsande linjer saknar givetvis skärningspunkt.

Två skilda punkter A och B bestämmer som redan sagts en linje; punkterna på denna linje *mellan*[1] A och B bildar *sträckan* AB. A och B är sträckans *ändpunkter*. *Längden* av sträckan AB betecknas $|AB|$. Två sträckor kallas parallella om de ligger utefter parallella linjer.

Ett fundamentalt begrepp är *kongruensbegreppet*. Intuitivt är två objekt X och X' kongruenta om det är möjligt att förflytta X utan deformering så att X efter förflyttningen helt sammanfaller med antingen X' eller spegelbilden till X'. I axiomatiska framställningar är det brukligt att införa kongruens som ett primitivt begrepp för sträckor och vinklar. Därefter kan kongruens definieras för andra typer av geometriska objekt.

Längdbegreppet kan införas via av kongruens. Först fixeras helt godtyckligt en sträcka OP som tilldelas längden 1 och kallas *enhetssträckan*. En sträcka AB kallas *kommensurabel* med enhetssträckan OP och tilldelas längden m/n, om det finns en tredje sträcka EF så att sträckan AB kan delas i m delsträckor som är kongruenta med EF och enhetssträckan kan delas i n delsträckor som är kongruenta med EF.



Figur 1
Sträckan AB är kommensurabel med enhetssträckan OP och $|AB| = \frac{5}{3}$.

Varje sträcka som är kommensurabel med enhetssträckan tilldelas således ett rationellt tal som längd. Genom approximation och gränsövergång kan så sträckor som inte är kommensurabla med enhetssträckan tilldelas längd och dessa längder blir irrationella tal.[2] Slutligen garanterar det så kallade kontinuitetsaxiomet att det för varje positivt reellt tal finns sträckor med den längden. Detta har som konsekvens att det råder en ett-ett-motsvarighet mellan punkterna på en linje och de reella talen. (Tallinjen "saknar hål".)

På ett analogt sätt definieras mätetal för vinklar, men till skillnad från längdbegreppet finns det en absolut enhet för vinkelmått, den räta vinkeln.

2 Vektorer

Riktade sträckor. En sträcka har ingen riktning utan AB och BA är samma sträcka. Vi kan emellertid förse sträckan med riktning genom att utnämna den ena ändpunkten till startpunkt och den andra till slutpunkt. Den *riktade sträcka* som startar i A och slutar i B betecknas $\overrightarrow{AB}$.

Genom att fixera en riktad sträcka utefter en linje har man också givit linjen en riktning.

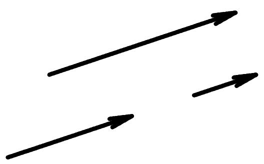
[1] "mellan" är ett primitivt begrepp.

[2] Det var pythagoréerna som upptäckte att det finns inkommensurabla sträckor, t. ex. är sidan och diagonalen i en kvadrat inkommensurabla. Existensen av inkommensurabla sträckor vållade pythagoréerna stora besvär, exempelvis blev deras likformighetslära ofullständig. Problemet löstes av Eudoxos, som med en listig definition av likhet för förhållanden mellan sträckor kom att föregripa den moderna definitionen av reella tal.

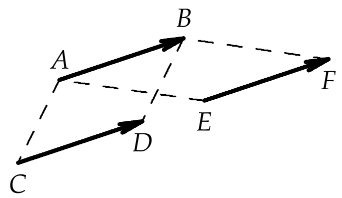
För två riktade sträckor $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ utefter samma linje är det också uppenbart vad som menas med att sträckorna är *lika* resp. *motsatt riktade*. Om de två sträckorna ligger utefter olika parallella linjer säges de vara lika riktade ifall B och D ligger på samma sida om linjen genom A och C (i det plan som innehåller de fyra punkterna), och motsatt riktade om B och D ligger på olika sidor om linjen.

Definition 2.1 Två riktade sträckor $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ kallas *ekvivalenta* om de är parallella, lika riktade och av samma längd.

Det visar sig praktiskt att även räkna med *riktade nollsträckor* $\overrightarrow{AA}$ som bara består av en punkt A. Längden av en sådan sträcka sätts förstås lika med noll. En riktad nollsträcka är per definition parallell med varje riktad sträcka, och de riktade nollsträckorna är inbördes ekvivalenta.



Figur 2
Lika riktade sträckor

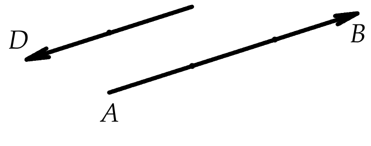


Figur 3
Ekvivalenta riktade sträckor

Om de riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är ekvivalenta, så är även sträckorna $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{BD}$ ekvivalenta, och vi kallar $ABDC$ för en *parallellogram*. I traditionell mening är förstås $ABDC$ bara en parallellogram om de fyra punkterna inte ligger i linje, men det visar sig praktiskt att även tillåta de degenererade parallellogrammer som fås då punkterna ligger i linje eller rent av sammanfaller. Vi noterar att om de riktade sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är ekvivalenta, och de riktade sträckorna $\overrightarrow{CD}$ och $\overrightarrow{EF}$ är ekvivalenta, så är även $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{EF}$ ekvivalenta. Ekvivalens för riktade sträckor är med andra ord en ekvivalensrelation.

Definition 2.2 För parallella riktade sträckor $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ definieras, förutsatt att den sistnämnda inte är en nollsträcka, *förhållandet* $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CD}$ av att

$$\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CD} = \begin{cases} |AB|/|CD|, & \text{om } \overrightarrow{AB} \text{ och } \overrightarrow{CD} \text{ är lika riktade} \\ -|AB|/|CD|, & \text{om } \overrightarrow{AB} \text{ och } \overrightarrow{CD} \text{ är motsatt riktade.} \end{cases}$$



Figur 4
För de riktade sträckorna i figuren är förhållandet $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}$.

Det är lätt att kontrollera att följande två räkneregler gäller för förhållandet mellan parallella riktade sträckor:

$$\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD}/\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{EF}$$

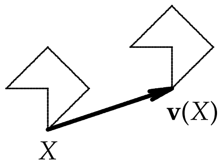
$$\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}/\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{EF}$$

En förflyttning av ett icke-deformerbart föremål (i fysiken kallas detta en stel förflyttning) kan i matematiska termer uppfattas som en funktion ϕ från rummet till sig självt: Om X är läget hos en punkt i kroppen före förflyttningen, så är $\phi(X)$ punktens läge efter förflyttningen.

Funktioner som är definierade på rummet och vars värden också ligger i rummet kallas ofta för *avbildningar*, och funktionsvärdena kallas *bildpunkter*.

Man kan visa att varje stel förflyttning är sammansatt av två grundläggande operationer: parallellförflyttning och vridning kring en axel. Parallellförflyttning innebär att alla punkter i föremålet förflyttas parallellt, lika långt och i samma riktning, dvs. förflyttningen ger upphov till ekvivalenta riktade sträckor. Detta föranleder oss att göra följande matematiska definition.

Definition 2.3 En avbildning $\mathbf{v}$, definierad på hela det euklidiska rummet och med sina värden i samma rum, kallas en *parallellförflyttning* eller *translation* om alla riktade sträckor $\overrightarrow{X\mathbf{v}(X)}$ från X till bildpunkten $\mathbf{v}(X)$ är ekvivalenta, dvs. parallella, lika riktade och lika långa.



Figur 5
En femhörning och dess bild under translationen $\mathbf{v}$.

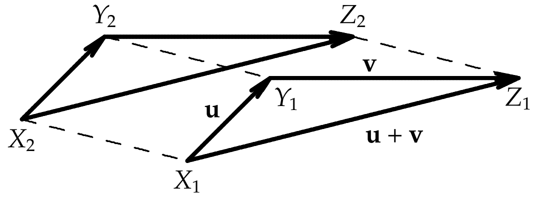
Vi skall nu notera några egenskaper hos parallellförflyttningar och införa några definitioner.

1. För varje riktad sträcka $\overrightarrow{AB}$ finns det en unik parallellförflyttning $\mathbf{v}$ med egenskapen att $\mathbf{v}(A) = B$. Vi uttrycker detta genom att säga att den riktade sträckan $\overrightarrow{AB}$ *bestämmer* parallellförflyttningen $\mathbf{v}$ och kallar $\overrightarrow{AB}$ för en *representant* för parallellförflyttningen $\mathbf{v}$.

Parallellförflyttningen $\mathbf{v}$ definieras förstås entydigt av kravet att $\mathbf{v}(X) = Y$ om och endast om den riktade sträckan $\overrightarrow{XY}$ är ekvivalent med $\overrightarrow{AB}$.

2. Två riktade sträckor representerar samma parallellförflyttning om och endast om sträckorna är ekvivalenta.

3. Sammansättningen $\mathbf{v} \circ \mathbf{u}$ av två parallellförflyttningar $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är en ny parallellförflyttning.



Figur 6

För att verifiera detta påståendet låter vi X_1 och X_2 vara två godtyckliga punkter och sätter $Z_i = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}(X_i)$. (Se figur 6.) Vi skall visa att de riktade sträckorna $\overrightarrow{X_1Z_1}$ och $\overrightarrow{X_2Z_2}$ är ekvivalenta. Sätt $Y_i = \mathbf{u}(X_i)$; då är $Z_i = \mathbf{v}(Y_i)$, och enligt definitionen av parallellförflyttning är den riktade sträckan $\overrightarrow{X_1Y_1}$ ekvivalent med $\overrightarrow{X_2Y_2}$ och den riktade sträckan $\overrightarrow{Y_1Z_1}$ ekvivalent med $\overrightarrow{Y_2Z_2}$, dvs. $X_1Y_1Y_2X_2$ och $Y_1Z_1Z_2Y_2$ är parallellogrammer. Det följer att $X_1Z_1Z_2X_2$ är en parallellogram, så $\overrightarrow{X_1Z_1}$ och $\overrightarrow{X_2Z_2}$ är ekvivalenta.

Sammansättningen $\mathbf{v} \circ \mathbf{u}$ av två parallellförflyttningar betecknas i fortsättningen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och kallas för *summan* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

4. Till nollsträckorna hör den *identiska avbildningen*, som avbildar varje punkt på sig själv. Eftersom denna avbildningen inte "uträttar någonting" är det naturligt att beteckna den $\mathbf{0}$.

Sammansättningen mellan en *godtycklig* avbildning f och den identiska avbildningen ger tillbaka avbildningen f. Speciellt gäller detta förstås för parallellförflyttningar, så med våra nya beteckningar får vi räkneregeln

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

för parallellförflyttningar $\mathbf{v}$.

5. Om $\mathbf{v}$ är en parallellförflyttning med representerande sträcka $\overrightarrow{AB}$, låter vi $-\mathbf{v}$ beteckna den parallellförflyttning som bestäms av den motsatta riktade sträckan $\overrightarrow{BA}$. (Definitionen av $-\mathbf{v}$ blir naturligtvis oberoende av valet av representerande sträcka för $\mathbf{v}$.) För summan $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})$ gäller då att $(\mathbf{v}+(-\mathbf{v}))(A) = -\mathbf{v}(\mathbf{v}(A)) = -\mathbf{v}(B) = A$, dvs. summan $\mathbf{v} + (-\mathbf{v})$ representeras av nollsträckan $\overrightarrow{AA}$ och är därför lika med nollförflyttningen $\mathbf{0}$. Vi har alltså räkneregeln

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Parallellförflyttningen $-\mathbf{v}$ är med andra ord invers till avbildningen $\mathbf{v}$.

6. För godtyckliga parallellförflyttningar $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ gäller den associativa lagen:

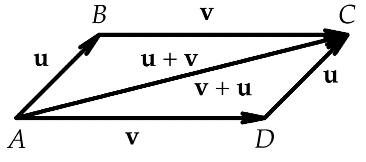
$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

och den kommutativa lagen

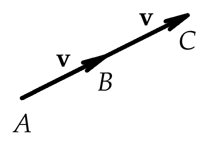
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Den associativa lagen är ett specialfall av den generella associativa regeln $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, som gäller för godtyckliga funktioner.

Den kommutativa lagen gäller däremot naturligtvis inte generellt utan är speciell för parallellförflyttningar. Låt $ABCD$ vara en parallellogram sådan att $\overrightarrow{AB}$ bestämmer $\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{BC}$ bestämmer $\mathbf{v}$; då bestämmer diagonalsträckan $\overrightarrow{AC}$ sammansättningen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (se figur 7). Men $\mathbf{v}$ representeras också av $\overrightarrow{AD}$ och $\mathbf{u}$ av $\overrightarrow{DC}$, så samma diagonalsträcka $\overrightarrow{AC}$ bestämmer också sammansättningen $\mathbf{v} + \mathbf{u}$. Det följer att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.



Figur 7
Kommutativa lagen för vektoraddition.

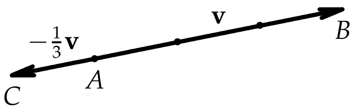


Figur 8
$2\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v}$.

7. Låt $\overrightarrow{AB}$ vara en representant för parallellförflyttningen $\mathbf{v}$, och välj punkten C så att $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AB} = 2$. B ligger med andra ord mitt på sträckan AC. (Se figur 8.) Då är $(\mathbf{v}+\mathbf{v})(A) = \mathbf{v}(B) = C$. Parallellförflyttningen $\mathbf{v}+\mathbf{v}$ representeras således av den "dubbla" riktade sträckan, och det är därför naturligt att beteckna den $2\mathbf{v}$.

Motiverade av detta skall vi nu definiera $\alpha\mathbf{v}$ för godtyckliga reella tal α. Antag först att $\mathbf{v}$ inte är nollförflyttningen, och välj en representant $\overrightarrow{AB}$ för $\mathbf{v}$. Låt C vara den punkt på linjen genom A och B som uppfyller $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AB} = \alpha$, och definiera $\alpha\mathbf{v}$ som den parallellförflyttning som hör till $\overrightarrow{AC}$. Det är lätt att se att definitionen är oberoende av vilken representant vi väljer för $\mathbf{v}$; om $\overrightarrow{A_1B_1}$ är en annan representant och C_1 väljs på motsvarande sätt blir nämligen $\overrightarrow{A_1C_1}$ ekvivalent med $\overrightarrow{AC}$.

För nollförflyttningen definieras $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla reella tal α.



Figur 9

8. Den införda multiplikationen med reella tal uppfyller följande räkneregler:

(a) $$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$
(b) $$\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$$
(c) $$(\alpha+\beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$$
(d) $$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$$

Det första påståendet (a) är trivialt, så betrakta (b). Om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eller om något av talen α och β är lika med 0, så är båda sidorna av (b) lika med $\mathbf{0}$. Antag därför att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och att både α och β är skilda från 0. Låt $\overrightarrow{AB}$ representera $\mathbf{v}$, $\overrightarrow{AC}$ representera $\beta\mathbf{v}$ och $\overrightarrow{AD}$ representera $\alpha(\beta\mathbf{v})$. Då är $\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{AC} = \alpha$ och $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AB} = \beta$, så det följer av räknereglerna för förhållanden av sträckor att $\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{AB} = \alpha\beta$, dvs. sträckan $\overrightarrow{AD}$ representerar också $(\alpha\beta)\mathbf{v}$. Detta bevisar att $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$.

Påstående (c) är också trivialt om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, så antag att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Låt $\mathbf{v}$ representeras av sträckan $\overrightarrow{AB}$, $\alpha\mathbf{v}$ av $\overrightarrow{CD}$ och $\beta\mathbf{v}$ av $\overrightarrow{DE}$. Då representeras $\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$ av $\overrightarrow{CE}$. Vidare gäller att

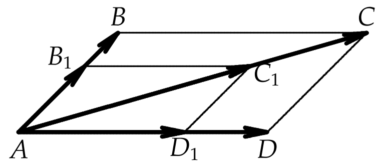
$$\overrightarrow{CE}/\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}/\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}/\overrightarrow{AB} = \alpha+\beta,$$

så $\overrightarrow{CE}$ representerar också parallellförflyttningen $(\alpha+\beta)\mathbf{v}$, som därför är lika med $\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$.

Påstående (d) är trivialt om $\alpha = 0$ eller $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{v} = \beta\mathbf{u}$ följer det med hjälp av egenskaperna (a), (b) och (c) att $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}) = \alpha((1+\beta)\mathbf{u}) = (\alpha(1+\beta))\mathbf{u} = (\alpha+\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + (\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \alpha(\beta\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$.

Antag därför att $\alpha \neq 0$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och att $\mathbf{v}$ ej är någon multipel av $\mathbf{u}$. Välj en parallellogram $ABCD$ så att $\overrightarrow{AB}$ representerar $\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{AD}$ representerar $\mathbf{v}$. Då representeras $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ av diagonalen $\overrightarrow{AC}$, och $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{AC_1}$, där punkten C_1 ligger på linjen genom A och C och $\overrightarrow{AC_1}/\overrightarrow{AC} = \alpha$. (Se figur 10.) Låt B_1

och D_1 vara de punkter på linjerna genom A och B resp. A och D som gör $AB_1C_1D_1$ till en parallellogram. Likformighet ger då att $\overrightarrow{AB_1}/\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD_1}/\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}/\overrightarrow{AC} = \alpha$, varför $\overrightarrow{AB_1}$ är en representant för $\alpha\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{AD_1}$ är en representant för $\alpha\mathbf{v}$. Diagonalen $\overrightarrow{AC_1}$ representerar därför också summan $\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$, så det följer att $\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. □



Figur 10

Vektorer. Ovan har vi tillordnat en parallellförflyttning till varje riktad sträcka och visat att parallellförflyttningarna uppfyller ett antal regler. Det som visar sig vara väsentligt och användbart är inte så mycket att de tillordnade objekten råkar vara parallellförflyttningar utan själva räknereglerna. Exempelvis uppfyller fysikaliska krafter samma regler; de kan adderas och multipliceras med reella tal, och additionen är associativ och kommutativ, etc. Vi skall nu därför frigöra oss från parallellförflyttningarna och koncentrera oss på räknereglerna. Vi kallar de objekt som vi skall räkna med för vektorer.

Definition 2.4 Ett *vektorrum* är en mängd av objekt, kallade *vektorer*, med följande egenskaper:

(α) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ finns det en unik vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, kallad *summan* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.
(β) För alla vektorer $\mathbf{v}$ och alla reella tal α finns det en unik vektor $\alpha\mathbf{v}$.
(γ) Det finns en *nollvektor* $\mathbf{0}$.
(δ) För varje vektor $\mathbf{v}$ finns det en vektor $-\mathbf{v}$. Man skriver $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ istället för $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.
(ϵ) Följande räkneregler gäller för vektorerna:

(i)	$\mathbf{u}+\mathbf{v}$	$= \mathbf{v}+\mathbf{u}$
(ii)	$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	$= (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
(iii)	$\mathbf{v}+\mathbf{0}$	$= \mathbf{v}$
(iv)	$\mathbf{v}-\mathbf{v}$	$= \mathbf{0}$
(v)	$1\mathbf{v}$	$= \mathbf{v}$
(vi)	$\alpha(\beta\mathbf{v})$	$= (\alpha\beta)\mathbf{v}$
(vii)	$(\alpha+\beta)\mathbf{v}$	$= \alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$
(viii)	$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})$	$= \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$

Vi skall dock inte släppa den geometriska anknytningen eftersom vi har ett antal geometriska tillämpningar i åtanke. Därför inför vi följande "konkreta" vektorrum $\mathcal{V}$, som vi kan tolka som rummet av alla parallellförflyttningar (eller som ekvivalensklasser av riktade sträckor eller "pilar" om vi så vill).

Definition 2.5 Det konkreta vektorrummet $\mathcal{V}$ är ett vektorrum med följande egenskaper:

(i) Till varje riktad sträcka $\overrightarrow{AB}$ i rummet hör det en unik vektor $\mathbf{v}$, något som vi uttrycker genom att säga att sträckan representerar vektorn, och två riktade sträckor representerar samma vektor om och endast om sträckorna är ekvivalenta, dvs. parallella, lika riktade och lika långa.

(ii) Om $\overrightarrow{AB}$ representerar vektorn $\mathbf{u}$ och $\overrightarrow{BC}$ representerar vektorn $\mathbf{v}$, så representerar $\overrightarrow{AC}$ vektorn $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

(iii) Om $\overrightarrow{AB}$ är en representant för $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $\overrightarrow{CD}$ är en parallell riktad sträcka som uppfyller $\overrightarrow{CD}/\overrightarrow{AB} = \alpha$, så representerar $\overrightarrow{CD}$ vektorn $\alpha\mathbf{v}$. (För nollvektorn gäller $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.)

Eftersom det är språkligt klumpigt med uttryck av typen "Låt $\mathbf{v}$ vara den vektor som representeras av den riktade sträckan $\overrightarrow{AB}$ ", kommer vi fortsättningsvis att tillåta oss att tala om vektorn $\overrightarrow{AB}$ och skriva $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ för att uttrycka att $\overrightarrow{AB}$ är en representant för vektorn $\mathbf{v}$.

Definition 2.6 Två konkreta vektorer kallas *parallella* resp. *lika riktade* om de representeras av parallella resp. lika riktade sträckor. En vektor säges vara *parallell med en linje* resp. med ett plan om vektorns representanter är parallella med linjen resp. med planet. Istället för att säga att vektorn är parallell med ett plan (eller en linje), säger vi också att den ligger i eller utefter planet (eller linjen).

Ibland kommer vi inte att betrakta hela vektorrummet $\mathcal{V}$ utan endast alla vektorer som är parallella med ett givet plan eller med en given linje. Vi inför därför beteckningen $\mathcal{V}_a$ för mängden av alla vektorer som är parallella med a, där a är ett givet plan eller en given linje.

Observera att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer i $\mathcal{V}_a$, dvs. två vektorer som är parallella med planet (linjen) a, så är även summan $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ parallell med a, dvs. summan ligger i $\mathcal{V}_a$. På motsvarande sätt medför $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a$ att $\alpha\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a$ för alla reella tal α. Det följer därför att $\mathcal{V}_a$ också är vektorrum.

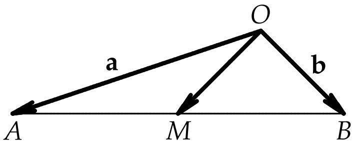
Exempel 1. O, A och B är tre punkter i rummet, och M är mittpunkten på sträckan AB. Uttryck vektorn $\overrightarrow{OM}$ med hjälp av vektorerna $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ och $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

Lösning: Vi har (jmf figur 11)

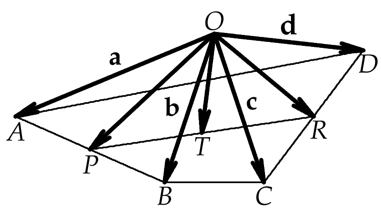
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= -\overrightarrow{OA} = -\mathbf{a},\\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\mathbf{a}+\mathbf{b} \qquad \text{och}\\ \overrightarrow{AM} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}(-\mathbf{a}+\mathbf{b}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b},\end{aligned}$$

varför

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b}. \qquad \square$$



Figur 11



Figur 12

Exempel 2. Visa att de sträckor, som förenar motstående sidors mittpunkter i en godtycklig fyrhörning, halverar varandra.

Lösning: Låt fyrhörningen vara $ABCD$, och låt P, Q, R och S beteckna mittpunkterna på sidorna AB, BC, CD respektive DA. (Se figur 12.) Om vi visar att mittpunkten T på sträckan PR sammanfaller med mittpunkten U på sträckan QS, så har vi visat vårt påstående. Låt därför O vara en godtycklig punkt i rummet, och sätt $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ och $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$. Genom upprepad tillämpning av resultatet i exemplet ovan får vi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b}, \\
\overrightarrow{OR} &= \tfrac{1}{2}\mathbf{c} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d} \qquad \text{och} \\
\overrightarrow{OT} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OR} = \tfrac{1}{4}\mathbf{a} + \tfrac{1}{4}\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}\mathbf{c} + \tfrac{1}{4}\mathbf{d}.
\end{aligned}$$

Av symmetriskäl fås förstås också

$$\overrightarrow{OU} = \tfrac{1}{4}\mathbf{a} + \tfrac{1}{4}\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}\mathbf{c} + \tfrac{1}{4}\mathbf{d},$$

dvs. de riktade sträckorna $\overrightarrow{OT}$ och $\overrightarrow{OU}$ representerar samma vektor och är därför lika eftersom de har en gemensam begynnelsepunkt. Det följer att $T = U$. □

ÖVNINGAR

1. Visa med vektorräkning att de båda diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.
2. Låt i Ex. 2 M_1 och M_2 vara de båda diagonalernas mittpunkter. Visa att punkten T också är mittpunkt på sträckan M_1M_2.
3. I triangeln ABC är P mittpunkt på sidan BC och Q mittpunkt på sidan CA. Uttryck vektorerna $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ och $\overrightarrow{CA}$ med hjälp av vektorerna $\mathbf{a} = \overrightarrow{AP}$ och $\mathbf{b} = \overrightarrow{BQ}$.

3 Baser, koordinater och koordinatsystem

I det här avsnittet skall vi visa hur man genom att införa koordinater kan översätta räkning med vektorer i vektorrummet $\mathcal{V}$ till räkning med reella tal.

Definition 3.1 Vi säger att

(i) en med linjen ℓ parallell vektor $\mathbf{e}_1$ är en *bas* för vektorrummet $\mathcal{V}_\ell$ (bestående av alla vektorer som är parallella med linjen ℓ) om det för varje vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\ell$ finns ett entydigt bestämt tal x så att

(1) $$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1;$$

(ii) två med planet π parallella vektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är en *bas* för vektorrummet $\mathcal{V}_\pi$ (bestående av alla vektorer som är parallella med planet π) om det för varje vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_\pi$ finns ett entydigt bestämt talpar $x = (x_1, x_2)$ så att

(2) $$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2;$$

(iii) tre vektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en *bas* för rummet $\mathcal{V}$ av alla vektorer om det för varje vektor $\mathbf{x}$ finns en entydigt bestämd taltrippel $x = (x_1, x_2, x_3)$ så att

(3) $$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

Det entydigt bestämda talet, paret resp. trippeln x kallas *koordinaterna* för vektorn $\mathbf{x}$ med avseende på basen ifråga. Vi skriver i fortsättningen $\mathbf{x}\colon (x_1, x_2, x_3)$ för att ange att vektorn $\mathbf{x}$ har koordinaterna (x_1, x_2, x_3).

Vi kan karakterisera baser på följande sätt.

Sats 3.2

(a) *En vektor* $\mathbf{e}_1$ *utefter linjen* ℓ *är en bas för* $\mathcal{V}_\ell$ *om och endast om* $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$.

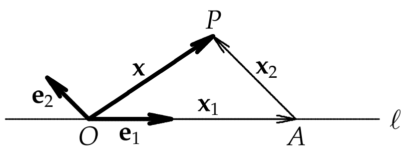
(b) *Två med planet* π *parallella vektorer* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *är en bas för vektorrummet* $\mathcal{V}_\pi$ *om och endast om* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *inte är parallella med varandra.*

(c) *Vektorerna* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *är en bas för rummet* $\mathcal{V}$ *om och endast om de tre vektorerna inte är parallella med ett plan.*

Anm. Satsen innebär att $\mathcal{V}$ har en bas med tre element. En godtycklig vektor i $\mathcal{V}$ kan därför beskrivas med tre koordinater. Av den anledningen säger man att vektorrummet $\mathcal{V}$ är tredimensionellt, och på motsvarande sätt är rummet $\mathcal{V}_\pi$ tvådimensionellt och rummet $\mathcal{V}_\ell$ endimensionellt.

Bevis. (a) Om $\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, så är nollvektorn den enda vektor $\mathbf{x}$ som har framställningen (1), och $\mathbf{e}_1$ kan därför inte vara en bas för de med $\mathcal{V}_\ell$. Antag omvänt att $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$. Då följer det omedelbart ur definitionen av multiplikation med tal att det för varje med ℓ parallell vektor $\mathbf{x}$ finns ett unikt reellt tal x_1 så att (1) gäller, dvs. $\mathbf{e}_1$ är en bas.

(b) Om $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ båda ligger längs en linje, så är också varje vektor $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ parallell med samma linje. Således kan ingen med linjen icke-parallell vektor $\mathbf{x}$ i $\mathcal{V}_\pi$ skrivas på formen (2). Vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är med andra ord inte en bas för $\mathcal{V}_\pi$ i detta fall.



Figur 13

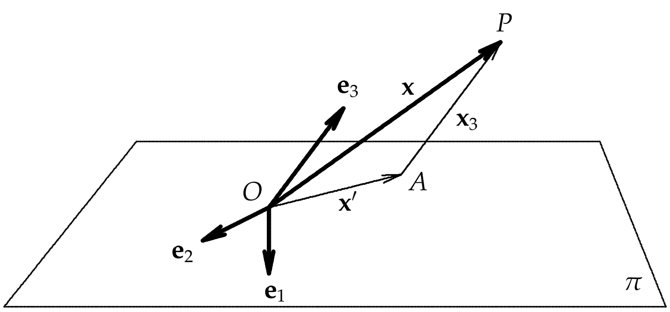
Antag omvänt att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella. Välj en punkt O i planet π och en med $\mathbf{e}_1$ parallell linje ℓ genom O. Låt $\mathbf{x}$ vara en vektor i $\mathcal{V}_\pi$. Då finns det en punkt P i planet π så att $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$. Den med vektorn $\mathbf{e}_2$ parallella linjen genom punkten P skär linjen ℓ i en punkt A. Se figur 13. Sätt $\mathbf{x}_1 = \overrightarrow{OA}$ och $\mathbf{x}_2 = \overrightarrow{AP}$; då är $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ och enligt (a) finns det tal x_1, x_2 så att $\mathbf{x}_1 = x_1\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{x}_2 = x_2\mathbf{e}_2$. Det följer därför att vektorn $\mathbf{x}$ har framställningen (2).

För att visa att framställningen är entydig antar vi att vi också har $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ med exempelvis $x_2 \neq y_2$. Av likheten $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ får vi då

$$\mathbf{e}_2 = \frac{y_1 - x_1}{x_2 - y_2}\,\mathbf{e}_1.$$

Detta innebär att vektorn $\mathbf{e}_2$ är parallell med $\mathbf{e}_1$, vilket är en motsägelse och visar att framställningen (2) är entydig.

(c) Om vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ligger i ett plan, så är varje vektor $\mathbf{x}$ med framställningen (3) också parallell med planet, så $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är i detta fall inte en bas för rummet $\mathcal{V}$ av alla vektorer.



Figur 14

Antag omvänt att vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ inte är parallella med ett plan. Fixera en punkt O i rummet, och låt π vara det med vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ parallella planet genom O. Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig vektor, och låt P vara den punkt i rummet för vilken $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$. Se figur 14. Linjen genom P parallell med vektorn $\mathbf{e}_3$ skär planet π i en punkt A. Låt $\mathbf{x}'$ och $\mathbf{x}_3$ vara de vektorer som svarar mot $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{AP}$; då är $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_3$. Eftersom $\mathbf{x}'$ är parallel med π finns det enligt (b) tal x_1, x_2 så att $\mathbf{x}' = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, och eftersom vektorn $\mathbf{x}_3$ är parallell med vektorn $\mathbf{e}_3$ är $\mathbf{x}_3 = x_3\mathbf{e}_3$. Det följer att $\mathbf{x}$ har framställningen (3).

För att visa att framställningen (3) är entydig antar vi att det finns två olika sådana framställningar

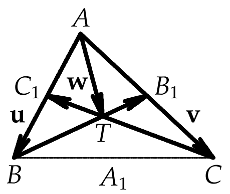
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3,$$

där exempelvis $x_3 \neq y_3$. Ekvationen ovan kan då skrivas

$$\mathbf{e}_3 = \frac{y_1 - x_1}{x_3 - y_3}\,\mathbf{e}_1 + \frac{y_2 - x_2}{x_3 - y_3}\,\mathbf{e}_2,$$

vilket innebär att vektorn $\mathbf{e}_3$ också är parallell med planet π. Detta strider emellertid mot förutsättningarna att de tre givna vektorerna inte är parallella med ett och samma plan. Det följer att framställningen är unik. □

Exempel 1. Låt ABC vara en triangel. Vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ en bas för vektorrummet av alla vektorer i triangelns plan. För vektorn $\mathbf{x} = \overrightarrow{AA_1}$, där A_1 är mittpunkten på sidan BC, gäller enligt Ex. 1 i avsnitt 3.2 att $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$, så $\mathbf{x}$ har koordinaterna $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. □



Figur 15

Exempel 2. Vi fortsätter exemplet ovan och erinrar om att AA_1 kallas medianen från hörnet A till sidan BC. Låt BB_1 och CC_1 vara de båda andra medianerna. Vi skall med vektorräkning visar att de tre medianerna har en gemensam skärningspunkt. Strategin består i att visa att skärningspunkten T till de två medianerna BB_1 och CC_1 också ligger på den tredje medianen AA_1. Se figur 15.

Med $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$, får vi $\overrightarrow{BB_1} = -\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ och $\overrightarrow{CC_1} = -\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}$. Eftersom skärningspunkten T ligger både på sträckan BB_1 och på sträckan CC_1, finns det enligt definitionen av multiplikation ett tal α så att $\overrightarrow{BT} = \alpha\overrightarrow{BB_1} = -\alpha\mathbf{u} + \frac{1}{2}\alpha\mathbf{v}$. Av samma skäl finns det också ett tal β så att $\overrightarrow{CT} = \beta\overrightarrow{CC_1} = -\beta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\beta\mathbf{u}$.

Vi kan nu beräkna vektorn $\mathbf{w} = \overrightarrow{AT}$ på två sätt, dels som $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} + \frac{1}{2}\alpha\mathbf{v} = (1-\alpha)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\alpha\mathbf{v}$, dels som $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT} = \mathbf{v} - \beta\mathbf{v} + \frac{1}{2}\beta\mathbf{u} = \frac{1}{2}\beta\mathbf{u} + (1-\beta)\mathbf{v}$.

Vektorn $\mathbf{w}$ har således både koordinaterna $(1-\alpha, \frac{1}{2}\alpha)$ och $(\frac{1}{2}\beta, 1-\beta)$. Eftersom koordinaterna är entydigt bestämda av vektorn följer det att

$$\begin{cases} 1 - \alpha = \dfrac{1}{2}\beta \\[2ex] \dfrac{1}{2}\alpha = 1 - \beta \end{cases}$$

Detta system har lösningen $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$. Följaktligen är $\mathbf{w} = \frac{1}{3}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. I föregående exempel visade vi att $\mathbf{x} = \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Vektorerna $\mathbf{w}$ och $\mathbf{x}$ är således parallella. Detta betyder att sträckorna $\overrightarrow{AT}$ och $\overrightarrow{AA_1}$ är parallella, och eftersom de har en gemensam startpunkt måste T ligga på AA_1. Detta bevisar att de tre medianerna skär varandra i punkten T. Skärningspunkten kallas triangelns *tyngdpunkt*.

Observera att beviset också ger att $|AT|/|AA_1| = |BT|/|BB_1| = |CT|/|CC_1| = 2/3$, dvs. tyngdpunkten delar medianerna i förhållandet $2:1$. □

Det främsta skälet att använda koordinater är att räkning med vektorer blir räkning med reella tal. För att exempelvis addera två vektorer behöver man bara addera vektorernas koordinater. Vi har nämligen följande resultat.

Sats 3.3 *Antag att vektorerna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *har koordinaterna* (u_1, u_2, u_3) *resp.* (v_1, v_2, v_3) *med avseende på en given bas. Då har vektorn* $\alpha\mathbf{u}$ *koordinaterna* $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$ *och vektorn* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *koordinaterna* $(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$.

Bevis. Av $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ följer genom addition resp. multiplikation med skalär att $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2+v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3+v_3)\mathbf{e}_3$ och att $\alpha\mathbf{u} = \alpha u_1\mathbf{e}_1 + \alpha u_2\mathbf{e}_2 + \alpha u_3\mathbf{e}_3$. □

Definition 3.4 Med hjälp av koordinatbegreppet för *vektorer* kan vi införa koordinater för *punkter* i det euklidiska rummet. Fixera först en punkt O i rummet. Varje punkt X i rummet bestämmer nu en unik vektor $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$. Det är klart att tillordningen $X \to \mathbf{x}$ är en bijektiv avbildning mellan det euklidiska rummet och vektorrummet $\mathcal{V}$. Om vi nu dessutom fixerar en bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ för $\mathcal{V}$ och låter (x_1, x_2, x_3) vara koordinaterna för vektorn $\mathbf{x}$ med avseende på denna bas, så är koordinaterna entydigt bestämda av vektorn $\mathbf{x}$ och därmed också av punkten X. Naturligtvis beror inte koordinaterna enbart av punkten och basen utan också av O, koordinatsystemets *origo*. De med basvektorerna parallella linjerna genom origo kallas *koordinataxlarna*.

Vi använder i fortsättningen beteckningen $X\colon (x_1, x_2, x_3)$ för att ange att X är en punkt med koordinaterna (x_1, x_2, x_3).

EXEMPEL 3. Låt A och B vara punkter med koordinaterna (a_1, a_2, a_3) resp. (b_1, b_2, b_3). Då har vektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ koordinaterna $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, och mittpunkten M på sträckan AB har koordinaterna

$$\Big(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\Big).$$

Vi har nämligen $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, där vektorerna $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ och $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ har koordinaterna (b_1, b_2, b_3) resp. (a_1, a_2, a_3), och för vektorn $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$ gäller enligt Ex. 1 i avsnitt 3.2 att $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$. □

EXEMPEL 4. Beräkna koordinaterna för tyngdpunkten T i triangeln ABC vars hörn har koordinaterna (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) och (c_1, c_2, c_3).

Lösning: I Ex. 2 visade vi att $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, så vektorn $\overrightarrow{AT}$ har därför koordinaterna $\big(\frac{1}{3}(b_1 - a_1 + c_1 - a_1), \frac{1}{3}(b_2 - a_2 + c_2 - a_2), \frac{1}{3}(b_3 - a_3 + c_3 - a_3)\big)$. Genom att addera koordinaterna (a_1, a_2, a_3) för vektorn $\overrightarrow{OA}$ får vi koordinaterna för $\overrightarrow{OT}$, dvs. koordinaterna för T, och dessa blir $\big(\frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1), \frac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2), \frac{1}{3}(a_3 + b_3 + c_3)\big)$. □

ÖVNINGAR

4. Låt T vara tyngdpunkten i triangeln ABC och sätt $\mathbf{a} = \overrightarrow{TA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{TB}$. Bestäm koordinaterna för vektorerna $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ och $\overrightarrow{CA}$ med avseende på basen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
5. Antag att $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ är bas för vektorerna i ett plan, och sätt $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ och $\mathbf{w} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$. Visa att $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är en ny bas samt beräkna koordinaterna för vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ med avseende på denna nya bas.
6. Med medianen från hörnet A i tetraedern $ABCD$ menas linjen genom A och tyngdpunkten A_1 i motstående sidoyta BCD.

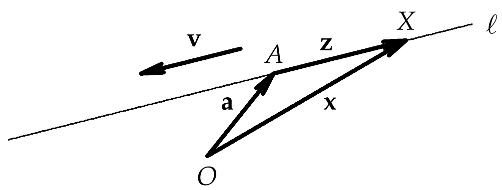
   a) Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{AA_1}$ med avseende på basen $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$.

   b) Visa att de fyra medianerna skär varandra i en gemensam punkt (tetraederns *tyngdpunkt*).
7. I parallellogrammen $ABCD$ har de tre första hörnen koordinaterna $(1,2,3)$, $(4,1,0)$ och $(5,6,4)$. Bestäm koordinaterna för det fjärde hörnet D.
8. En kub har sina hörn i punkterna A, B, $\ldots$, H, där AB är en kant, AC är en diagonal i en sidoyta, och AG är en rymddiagonal. Man väljer $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AG}$ som basvektorer och punkten A som origo för ett koordinatsystem. Bestäm de åtta hörnens koordinater.
9. Bestäm koordinaterna för en tetraeders tyngdpunkt uttryckt i de fyra hörnens koordinater.

4 Räta linjens ekvation

I det här avsnittet anges alla koordinater relativt ett en gång för alla givet koordinatsystem med origo O och basvektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

En linje är entydigt bestämd av två punkter på linjen. Den är också bestämd av en punkt A och en nollskild vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med linjen – varje sådan vektor kallas en *riktningsvektor* för linjen. Givet två punkter A och B på linjen kan vi naturligtvis lätt tillverka en riktningsvektor, nämligen vektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.



Figur 16

Låt nu ℓ vara linjen genom punkten A med riktningsvektorn $\mathbf{v}$, och låt X vara en godtycklig punkt i rummet. Sätt $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ och $\mathbf{z} = \overrightarrow{AX}$; då är $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{z}$. Punkten X ligger på linjen ℓ om och endast om vektorn $\mathbf{z}$ är parallell med riktningsvektorn $\mathbf{v}$, dvs. om och endast om $\mathbf{z} = t\mathbf{v}$ för något tal t. (Se figur 16.)

En punkt X ligger med andra ord på linjen ℓ om och endast om det finns ett reellt tal t så att vektorn $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ uppfyller ekvationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}.$$

Detta är den räta linjens ekvation på *vektorform.*

Låt nu X ha koordinaterna (x_1, x_2, x_3), A ha koordinaterna (a_1, a_2, a_3) och vektorn $\mathbf{v}$ ha koordinaterna (v_1, v_2, v_3). Då får vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ koordinaterna (x_1, x_2, x_3) resp. $(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, a_3 + tv_3)$, så koordinatvis tolkning av linjens ekvation på vektorform ger följande resultat.

Sats 4.1 (Räta linjens ekvation på parameterform) *Låt $A\colon (a_1, a_2, a_3)$ vara en punkt på linjen ℓ och låt $\mathbf{v}\colon (v_1, v_2, v_3)$ vara en riktningsvektor för linjen. Då ligger punkten $X\colon (x_1, x_2, x_3)$ på linjen ℓ om och endast om*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + v_1 t \\ x_2 = a_2 + v_2 t \\ x_3 = a_3 + v_3 t \end{cases}$$

för något reellt tal t.

Genom att för två punkter A och B på en linje välja riktningsvektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ får vi följande korollarium.

Korollarium 4.2 *Linjen genom punkterna (a_1, a_2, a_3) och (b_1, b_2, b_3) har ekvationen*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)t \\ x_2 = a_2 + (b_2 - a_2)t \\ x_3 = a_3 + (b_3 - a_3)t \end{cases}$$

EXEMPEL 1. Ekvationen för linjen genom de två punkterna $(1, 2, 3)$ och $(3, 2, 1)$ är $x = 1 + (3 - 1)t$, $y = 2 + (2 - 2)t$, $z = 3 + (1 - 3)t$ eller efter förenkling $x = 1 + 2t$, $y = 2$, $z = 3 - 2t$. □

EXEMPEL 2. Undersök om punkterna $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 7)$ och $(-1, 6, -5)$ ligger i linje.

Lösning: Linjen genom de två första punkterna har ekvationen $x = 1 + t$, $y = 2 - 2t$, $z = 3 + 4t$. Den tredje punkten ligger på denna linje om och endast om det finns ett t som uppfyller

$$\begin{cases} -1 = 1 + t \\ 6 = 2 - 2t \\ -5 = 3 + 4t. \end{cases}$$

Eftersom $t = -2$ löser samtliga tre ekvationer, ligger de tre punkterna i linje. □

EXEMPEL 3. Undersök om linjerna

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - 2t \\ x_3 = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x_1 = 3 - t \\ x_2 = 1 + 5t \\ x_3 = 8 - 7t \end{cases}$$

skär varandra.

Lösning: Linjerna har en gemensam punkt med koordinaterna (a_1, a_2, a_3) om och endast om det finns parametervärden t och s för resp. linje som satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - s = a_1 \\ 2 - 2t = 1 + 5s = a_2 \\ 3 + 4t = 8 - 7s = a_3. \end{cases}$$

(De två parametervärdena är naturligtvis i allmänhet olika, så vi får inte sätta $s = t$.) De två första ekvationerna ger $t = 3$ och $s = -1$, och eftersom dessa värden även satisfierar den tredje ekvationen har linjerna en gemensam punkt, nämligen punkten $(4, -4, 15)$. □

Exempel 4. Undersök om linjerna

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - 2t \\ x_3 = 4 - t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 - t \\ x_2 = 1 + 5t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}$$

skär varandra i en punkt.

Lösning: Vi skall undersöka huruvida ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - s \\ 2 - 2t = 1 + 5s \\ 4 - t = 1 + s \end{cases}$$

är lösbart eller ej. De två första ekvationerna ger $t = 3$, $s = -1$, och eftersom dessa värden inte satisfierar den tredje ekvationen, saknar systemet lösning. De två linjerna skär således inte varandra. □

I ett plan är icke-skärande linjer per definition parallella. Två linjer i rummet behöver emellertid inte ligga i samma plan, så därför kan vi av resultatet i Ex. 4 inte dra slutsatsen att de två linjerna är parallella. När är då två linjer parallella? Svaret är enkelt; två linjer är parallella om och endast om deras riktningsvektorer är parallella, vilket gäller om och endast om den ena vektorn är en multipel av den andra. Uttryckt med hjälp av riktningsvektorernas koordinater får vi därför följande sats.

Sats 4.3 *Linjerna*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + v_1 t \\ x_2 = a_2 + v_2 t \\ x_3 = a_3 + v_3 t \end{cases} \qquad \textit{och} \qquad \begin{cases} x_1 = b_1 + w_1 t \\ x_2 = b_2 + w_2 t \\ x_3 = b_3 + w_3 t \end{cases}$$

är parallella om och endast om det finns en konstant k så att $w_1 = kv_1$, $w_2 = kv_2$ och $w_3 = kv_3$.

Bevis. Om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är de två linjernas riktningsvektorer, så innebär villkoret att $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, dvs. att riktningsvektorerna är parallella. □

Exempel 5. Linjerna i Ex. 4 är inte parallella, ty riktningsvektorernas koordinater $(1, -2, -1)$ och $(-1, 5, 1)$ är inte proportionella. Slutsatsen blir därför att linjerna inte ligger i något gemensamt plan utan är korsande.

Däremot är linjerna

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - 2t \\ x_3 = 4 - t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 - 2t \\ x_2 = 1 + 4t \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases}$$

parallella, ty $(-2, 4, 2) = -2(1, -2, -1)$. □

Exempel 6. Vi erinrar om att vi som parallella linjer även räknar sammanfallande linjer. Exempelvis är

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 - 2t \\ x_3 = 4 - t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 - 2t \\ x_2 = -2 + 4t \\ x_3 = 2 + 2t \end{cases}$$

två ekvationer för en och samma linje, något som vi upptäcker om vi försöker bestämma linjernas skärningspunkt genom att lösa systemet

$$\begin{cases} 1 + t = 3 - 2s \\ 2 - 2t = -2 + 4s \\ 4 - t = 2 + 2s \end{cases}$$

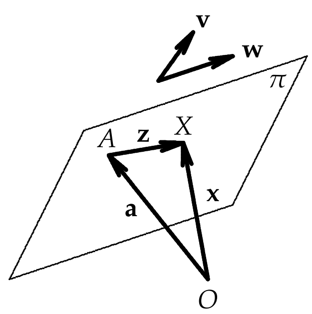
Systemet reduceras efter förenkling till $t + 2s = 2$, dvs. det har en lösning s för varje värde på t. Alla punkter på den förstnämnda linjen ligger således också på den andra linjen, dvs. linjerna sammanfaller. □

ÖVNINGAR

10. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2, 1)$ och $(-1, 1, 3)$.
11. Bestäm ekvationen för den med linjen $x_1 = 2t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = 3 + 4t$ parallella linjen genom punkten $(1, 0, -2)$.
12. Bestäm skärningspunkten mellan de båda linjerna $x_1 = t$, $x_2 = 5 - 2t$, $x_3 = -t$ och $x_1 = -1 + t$, $x_2 = 5 - t$, $x_3 = -3 + t$.
13. Undersök om linjerna $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = 2 + t$ och $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = 2 + t$, $x_3 = 1 - 2t$ skär varandra.
14. För vilka värden på a skär linjerna $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 - t$, $x_3 = 3 + t$ och $x_1 = 2 - at$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = t$ varandra?

5 Planets ekvation

Vi förutsätter också i det här avsnittet att alla koordinater tas med avseende på ett givet koordinatsystem för det euklidiska rummet med origo i punkten O.



Figur 17

Ett plan är bestämt av en punkt A i planet och två icke-parallella vektorer $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ längs med planet. Två sådana vektorer kallas *riktningsvektorer* till planet. Låt X vara en godtycklig punkt i rummet och sätt $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ och $\mathbf{z} = \overrightarrow{AX}$. (Se figur 17.) Vi har då $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{z}$. Punkten X tillhör planet om och endast om vektorn $\mathbf{z}$ är parallell med planet, vilket inträffar om och endast om det finns två reella tal s och t så att $\mathbf{z} = s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$. Punkten X ligger således i planet om och endast om

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}.$$

Genom att skriva ekvationen ovan på koordinatform får vi följande resultat – planets ekvation på parameterform.

Sats 5.1 (Planets ekvation på parameterform) *Låt $A\colon (a_1, a_2, a_3)$ vara en punkt i planet π, och låt (v_1, v_2, v_3) och (w_1, w_2, w_3) vara koordinaterna för två icke-parallella riktningsvektorer till planet. Då tillhör punkten $X\colon (x_1, x_2, x_3)$ planet π om och endast om det finns reella tal s och t så att*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + sv_1 + tw_1 \\ x_2 = a_2 + sv_2 + tw_2 \\ x_3 = a_3 + sv_3 + tw_3. \end{cases}$$

EXEMPEL 1. Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $A\colon (1,3,1)$, $B\colon (3,2,4)$ och $C\colon (4,0,2)$.

Lösning: Av de tre punkterna får vi riktningsvektorerna $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$ med koordinaterna $(2,-1,3)$ resp. $(3,-3,1)$. Planet har därför ekvationen

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2s + 3t \\ x_2 = 3 - s - 3t \\ x_3 = 1 + 3s + t. \end{cases}$$ □

Systemet i 5.1 kan skrivas

$$\begin{cases} v_1 s + w_1 t = x_1 - a_1 \\ v_2 s + w_2 t = x_2 - a_2 \\ v_3 s + w_3 t = x_3 - a_3. \end{cases}$$

Koefficientmatrisen i detta system har rang 2 eftersom matrisens båda kolonnerna inte är proportionella. Om vi löser systemet medelst elimination erhåller vi därför ett ekvivalent trappsystem, där den sista ekvationen har formen

$$0 = C_1(x_1 - a_1) + C_2(x_2 - a_2) + C_3(x_3 - a_3),$$

för lämpliga konstanter C_1, C_2, C_3, och där minst en av dem är nollskild. Ekvationssystemet är naturligtvis lösbart precis för de (x_1, x_2, x_3) som gör högerledet i ekvationen ovan lika med 0. Vi har därigenom visat den första halvan av följande sats.

Sats 5.2 (Planets ekvation på normalform) *Låt π vara ett plan genom en punkt A med koordinaterna (a_1, a_2, a_3). Då finns det tre reella tal C_1, C_2 och C_3, som inte alla är lika med 0, så att planet består av alla punkter vars koordinater satisfierar ekvationen*

$$C_1(x_1 - a_1) + C_2(x_2 - a_2) + C_3(x_3 - a_3) = 0.$$

Omvänt är lösningsmängden till denna ekvation ett plan genom punkten A förutsatt att minst en koefficient C_i är skild från noll.

Bevis. Det återstår bara att bevisa omvändningen. Antag att exempelvis $C_3 \neq 0$, och sätt $c_1 = -C_1/C_3$ och $c_2 = -C_2/C_3$. Med $s = x_1 - a_1$ och $t = x_2 - a_2$ kan ekvationen nu skrivas som

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + s + 0t \\ x_2 = a_2 + 0s + t \\ x_3 = a_3 + c_1 s + c_2 t. \end{cases}$$

Lösningsmängden är därför ett plan som går genom punkten A och som har vektorerna med koordinaterna $(1, 0, c_1)$ och $(0, 1, c_2)$ som riktningsvektorer. □

I avsnitt 7 kommer vi att ge en förklaring till namnet normalform.

Genom att samla konstanttermerna till en enda term får vi följande variant av normalformen.

Korollarium 5.3 *Ett godtyckligt plan har ekvationen*

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = D,$$

där minst en koefficient C_i är nollskild.

EXEMPEL 2. Normalformen för planet i Ex. 1 får vi genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2s + 3t = x_1 - 1 \\ -s - 3t = x_2 - 3 \\ 3s + t = x_3 - 1. \end{cases}$$

Systemet är ekvivalent med följande trappsystem

$$\begin{cases} s + 3t = -x_2 + 3 \\ \quad 3t = -x_1 + 2x_2 + 7 \\ \quad\ 0 = 8x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 26. \end{cases}$$

Planets ekvation på normalform är därför

$$8x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 26.$$ □

EXEMPEL 3. Bestäm skärningspunkten mellan planet $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$ och linjen $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 - 4t$, $x_3 = 1 - 3t$.

Lösning: Vi undersöker om linjepunkten $P\colon (1 + t, 2 - 4t, 1 - 3t)$ för något parametervärde t också ligger i planet, dvs. satisfierar planets ekvation. Insättning av punktens koordinater ger ekvationen

$$(1 + t) + 2(2 - 4t) - 3(1 - 3t) = 4,$$

med lösningen $t = 1$. Det finns därför en skärningspunkt, och den har koordinaterna $(2, -2, -2)$. □

EXEMPEL 4. Undersök om linjen $x_1 = 2 - t$, $x_2 = 2 - 4t$, $x_3 = 1 - 3t$ skär planet $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$.

Lösning: Parametervärdet för en eventuell skärningspunkt satisfierar ekvationen

$$2 - t + 2(2 - 4t) - 3(1 - 3t) = 4.$$

Denna ekvation är ekvivalent med att $-1 = 0$ och saknar därför lösning. Slutsatsen är att det inte finns någon skärningspunkt, utan linjen är parallell med planet. □

Genom att generalisera exemplet ovan får vi:

Sats 5.4 *Vektorn* $\mathbf{v}\colon (v_1, v_2, v_3)$ *är parallell med planet* $C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = D$ *om och endast om* $C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 = 0$.

Bevis. Vektorn $\mathbf{v}$ är parallell med planet om och endast om linjen $x_1 = v_1t$, $x_2 = v_2t$, $x_3 = v_3t$ är parallell med planet (vilket inkluderar möjligheten att linjen ligger i planet), och detta är ekvivalent med att ekvationen

$$C_1v_1t + C_2v_2t + C_3v_3t = D$$

antingen saknar lösning eller har alla t som lösning. Detta inträffar om och endast om $C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 = 0$. □

EXEMPEL 5. Undersök om planen $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$ och $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$ skär varandra och bestäm i så fall skärningslinjen.

Lösning: En punkt tillhör skärningslinjen om och endast om dess koordinater (x_1, x_2, x_3) satisfierar båda planens ekvationer, dvs. om och endast om

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Detta system har lösningen $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = t$, som därför är ekvationen för skärningslinjen. □

Sats 5.5 *Två plan* $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B$ *och* $C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = D$ *är parallella om och endast om det finns en konstant* k *så att* $C_1 = kA_1$, $C_2 = kA_2$ *och* $C_3 = kA_3$. *Om dessutom* $D = kB$ *så sammanfaller planen.*

Bevis. Koordinaterna för en punkt i skärningsmängden satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B \\ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = D. \end{cases}$$

Ekvationssystemet har antingen rang 2 eller rang 1. I det förstnämnda fallet beskrivs lösningsmängden av en parameter och är en linje. Om rangen är 1, så har motsvarande radekvivalenta trappsystem formen

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B \\ 0x_1 + \ 0x_2 + \ 0x_3 = E. \end{cases}$$

Om $E \neq 0$ saknas lösning, vilket geometriskt innebär att planen är parallella och skilda. Om $E = 0$ ligger varje punkt i det förstnämnda planet också i det andra, dvs. planen sammanfaller. Rang 1-fallet inträffar om och endast om $(C_1, C_2, C_3) = k(A_1, A_2, A_3)$ för någon konstant k. □

Vi avslutar med ett resultat som beskriver samtliga plan som innehåller en given linje.

Sats 5.6 (Planknippets ekvation) *Låt* $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B$ *och* $C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = D$ *vara två plan som skär varandra utefter en linje* ℓ. *Då är*

$$\alpha(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 - B) + \beta(C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 - D) = 0 \tag{1}$$

för varje val av konstanterna α, β, *utom* $\alpha = \beta = 0$, *ekvationen för ett plan genom* ℓ. *Omvänt har varje plan genom linjen* ℓ *en sådan ekvation.*

Bevis. Beroende på att de två givna planen inte är parallella och koefficienterna A_i och C_i därför inte är proportionella, är minst en av koefficienterna $\alpha A_i + \beta C_i$ nollskild. Ekvation (1) betyder därför ett plan. Vidare innehåller planet linjen ℓ, ty varje punkt på ℓ satisfierar ju de båda ursprungliga planens ekvationer.

Låt omvänt $E_1x_1 + E_2x_2 + E_3x_3 = F$ vara ekvationen för ett plan genom ℓ. Då har ekvationssystemet

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B \\ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = D \\ E_1x_1 + E_2x_2 + E_3x_3 = F \end{cases}$$

linjen ℓ som sin lösningsmängd, så det följer att systemets koefficient- och totalmatriser är av rang 2. Sista raden i motsvarande radekvivalenta trappsystem är därför identiskt noll, och detta innebär att det finns konstanter α, β, γ, som inte alla är lika med noll, så att

$$\alpha(A_1, A_2, A_3, B) + \beta(C_1, C_2, C_3, D) + \gamma(E_1, E_2, E_3, F) = (0, 0, 0, 0). \tag{2}$$

Om $\gamma = 0$ så är fyrtiplarna (A_1, A_2, A_3, B) och (C_1, C_2, C_3, D) proportionella, vilket emellertid strider mot att de ursprungliga planen är icke-parallella. Följaktligen är $\gamma \neq 0$ och vi kan därför genom att först multiplicera ekvation (2) med $-1/\gamma$ antaga att $\gamma = -1$. Detta innebär att

$$(E_1, E_2, E_3, F) = \alpha(A_1, A_2, A_3, B) + \beta(C_1, C_2, C_3, D),$$

och det följer att planet $E_1x_1 + E_2x_2 + E_3x_3 = F$ har formen (1). □

ÖVNINGAR

15. Bestäm på normalform ekvationen för planet genom punkterna $(1,1,1)$, $(3,2,1)$ och $(2,3,4)$.
16. Bestäm a så att punkten $(2,1,a)$ ligger i samma plan som de tre punkterna i föregående övning.
17. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1,-1,2)$ och är parallellt med planet $x_1+x_2+x_3=0$.
18. Bestäm skärningslinjen mellan planen $x_1+x_2+2x_3+3=0$ och $2x_1-x_2+x_3+6=0$.
19. Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1,-1,-2)$ och innehåller skärningslinjen till planen i föregående övning.
20. Bestäm skärningspunkten mellan linjen $x_1=1-t$, $x_2=2+t$, $x_3=1+3t$ och planet $x_1-x_2+x_3+4=0$.
21. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen $x_1=2+t$, $x_2=1-t$, $x_3=2+t$ och är parallellt med linjen $x_1=3+2t$, $x_2=2+t$, $x_3=1-2t$.

6 Skalärprodukten

Längd och vinkel. Hittills har vi studerat egenskaper hos vektorer, linjer och plan som har med parallellitet och skärning att göra. Sådana egenskaper kallas *affina*. Nu skall vi studera egenskaper som beror av längd- och vinkelbegreppen.

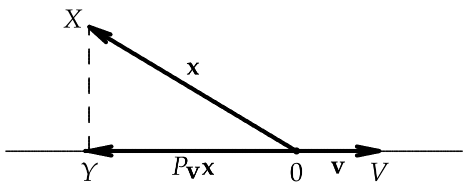
Vi börjar med att fixera en enhetssträcka i det euklidiska rummet. Längden $|\mathbf{v}|$ av en vektor $\mathbf{v}$ definieras som längden av en godtycklig representerant $\overrightarrow{AB}$ för vektorn; alla sådana har ju samma längd. Nollvektorn får förstås längden 0.

Med vinkeln mellan två nollskilda vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menas vinkeln mellan två riktade sträckor $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{OB}$ som representerar vektorerna och har gemensam startpunkt. Denna vinkel är naturligtvis oberoende av valet av representerande sträckor. Vinkeln mellan två vektorer, mätt i grader, blir ett tal i intervallet $[0,180]$. Om vektorerna är parallella och lika riktade blir vinkeln 0°, och om de är motsatt riktade blir den 180°.

Om en eller båda vektorerna är nollvektorn bildar motsvarande riktade sträckor inte någon vinkel i traditionell mening. För att slippa göra undantag för nollvektorn är det emellertid praktiskt att *definiera* vinkeln mellan nollvektorn och en godtycklig vektor som 90°.

Definition 6.1 Om vinkeln mellan två vektorer är 90° säges vektorerna vara *ortogonala* eller *vinkelräta* mot varandra. Observera att nollvektorn med vår definition blir ortogonal mot varje annan vektor.

Definition 6.2 Låt $\mathbf{x}$ vara en godtycklig och $\mathbf{v}$ en nollskild vektor. Välj representerande riktade sträckor $\overrightarrow{OX}$ och $\overrightarrow{OV}$ med gemensam startpunkt för $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{v}$. Normalen från X mot linjen genom sträckan OV skär linjen i en punkt Y. Se figur 18. Den riktade sträckan $\overrightarrow{OY}$ representerar en vektor, som vi kallar den *ortogonala projektionen av* $\mathbf{x}$ *på* $\mathbf{v}$ och betecknar $P_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$.



Figur 18

Projektionen har följande egenskaper:

Sats 6.3 *Vektorn* $\mathbf{x} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$ *är ortogonal mot vektorn* $\mathbf{v}$.

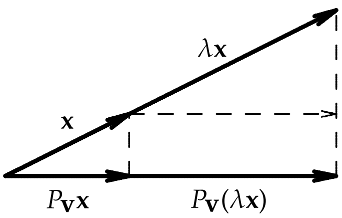
Bevis. Sträckan $\overrightarrow{YX}$, som representerar vektorn $\mathbf{x} - P_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$, är vinkelrät mot sträckan $\overrightarrow{OV}$. □

Sats 6.4 *För* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *godtyckliga vektorer* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *samt godtyckliga reella tal* λ *gäller*

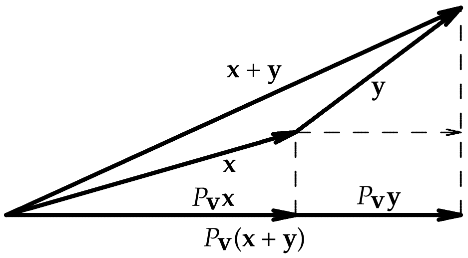
(i) $$P_{\mathbf{v}}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$$

(ii) $$P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + P_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}).$$

Bevis. Egenskap (i) följer av likformighet (se figur 19) och för (ii) hänvisas till figur 20. □



Figur 19



Figur 20

Definition 6.5 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer som bildar vinkeln θ med varandra. Vi sätter

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

och kallar kvantiteten $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ för *skalärprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Notera att skalärprodukten $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ är ett reellt tal t i intervallet $-|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \leq t \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, och att skalärprodukten är 0 precis då vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta mot varandra. Skalärprodukten är positiv om $\theta < 90^\circ$ och negativ om $\theta > 90^\circ$.

Om vinkeln mellan de båda vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är 0, så är $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Speciellt är

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2.$$

Vi kan alltså uttrycka längden av en vektor i termer av skalärprodukten:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}.$$

Exempel 1. Om $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 1$ och $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -1$, så gäller för vinkeln θ mellan de två vektorerna att

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = -\frac{1}{2}.$$

Det följer att $\theta = 120^\circ$. □

Med hjälp av skalärprodukten får vi följande formel för projektionen av en vektor på en annan vektor.

Sats 6.6 *Antag att* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. *Då är*

$$P_{\mathbf{v}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}.$$

Bevis. Vi använder samma beteckningar som då projektionen infördes, dvs. $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ och $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \overrightarrow{OY}$, och låter θ vara vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{v}$. Se figur 18.

För $\theta = 90^\circ$ gäller påståendet, eftersom $Y = O$, $P_{\mathbf{v}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = 0$. Om $\theta \neq 90^\circ$ är OYX en rätvinklig triangel, och det följer att

$$\frac{|P_{\mathbf{v}}\mathbf{x}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|OY|}{|\mathbf{v}|} = \pm\frac{|OX|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \pm\frac{|\mathbf{x}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \pm\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2},$$

där plustecknet skall väljas om $\theta < 90^\circ$ och minustecknet om $\theta > 90^\circ$. Vektorerna $P_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$ och $\mathbf{v}$ är vidare lika riktade om $\theta < 90^\circ$ och motsatt riktade om $\theta > 90^\circ$. I båda fallen gäller därför att

$$P_{\mathbf{v}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v}. \qquad \square$$

Sats 6.7 *Skalärprodukten har följande egenskaper:*

(i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

(ii) $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}$

(ii′) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2$

(iii) $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

(iii′) $\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

(iv) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$ *och likhet råder om och endast om* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Bevis. Egenskap (i) följer omedelbart av definitionen av skalärprodukt, ty vinkeln mellan två vektorer är oberoende av i vilken ordning vektorerna tas.

Om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, så är förstås båda sidorna av (ii) lika med 0. Om $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så får vi med hjälp av satserna 6.4 och 6.6 att

$$\frac{(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v} = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}_1 + P_{\mathbf{v}}\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v},$$

vilket implicerar (ii). Egenskap (ii′) följer förstås av (ii) och (i).

Påståendena (iii) och (iii′) visas analogt, och (iv) är en konsekvens av att $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$. $\square$

Exempel 2. Visa att

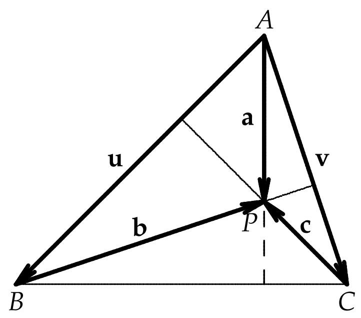
$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \qquad \text{och}$$
$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2.$$

Bevis.

$$\begin{aligned}|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2.\end{aligned}$$

Den andra formeln visas analogt. $\square$

EXEMPEL 3. Visa att de tre höjderna i en triangel i en triangel ABC skär varandra i en punkt.



Figur 21

Lösning: Låt P vara skärningspunkten mellan höjderna från B och C, och sätt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{AP}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BP}$ och $\mathbf{c} = \overrightarrow{CP}$. Enligt antagande är $\mathbf{b}$ vinkelrät mot $\mathbf{v}$ och $\mathbf{c}$ vinkelrät mot $\mathbf{u}$, dvs. $\mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{u} = 0$. Nu är $\overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ och $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{v} + \mathbf{c}$ så

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{u}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{v} - (\mathbf{v}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + 0 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - 0 = 0,\end{aligned}$$

vilket innebär att vektorn $\mathbf{a}$ är vinkelrät mot vektorn $\mathbf{v} - \mathbf{u}$. Linjen genom A och P är med andra ord vinkelrät mot sidan BC och är därför lika med höjden från hörnet A. Punkten P ligger således på alla tre höjderna. □

Definition 6.8 En bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ för vektorrummet $\mathcal{V}$ kallas *ortonormerad* eller en *ON-bas* om basvektorerna är parvis ortogonala och har längd 1, dvs. om

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{för } i \neq j, \\ 1 & \text{för } i = j. \end{cases}$$

Ett koordinatsystem för det euklidiska rummet kallas ortonormerat om basvektorerna är ortonormerade.

Låt nu $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en godtycklig bas och låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer med koordinaterna (u_1, u_2, u_3) och (v_1, v_2, v_3). Genom upprepad användning av skalärproduktsegenskaperna (i), (ii) och (iii) i sats 6.7 får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)\cdot(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= u_1v_1(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1) + u_1v_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) + u_1v_3(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3) + u_2v_1(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1) + u_2v_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2) \\ &\quad + u_2v_3(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3) + u_3v_1(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1) + u_3v_2(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2) + u_3v_3(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Denna formel visar att vi kan beräkna skalärprodukten av två godtyckliga vektorer om vi känner deras koordinater och basvektorernas skalärprodukter. Den stora fördelen med ON-baser är att basvektorernas skalärprodukter är 0 eller 1; för en ON-bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ kollapsar formeln ovan till $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Detta bevisar följande sats.

Sats 6.9 *Antag att* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *är en ON-bas, och låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer med koordinaterna* (u_1, u_2, u_3) *och* (v_1, v_2, v_3). *Då är*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Vidare ges en vektors längd av formeln

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Avståndet mellan två punkter X och Y i det euklidiska rummet är per definition lika med längden av sträckan XY, vilket ju är lika med längden av vektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{XY}$. Vi får därför följande korollarium till satsen ovan.

Korollarium 6.10 *Antag att koordinatsystemet är ortonormerat. Då är avståndet mellan punkterna* $X\colon (x_1, x_2, x_3)$ *och* $Y\colon (y_1, y_2, y_3)$ *lika med*

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Koordinaterna för en vektor kan uttryckas med hjälp av skalärprodukten på följande vis.

Sats 6.11 *Koordinaterna* (v_1, v_2, v_3) *för vektorn* $\mathbf{v}$ *med avseende på en ON-bas* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *ges av formeln*

$$v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i.$$

Bevis. Eftersom $\mathbf{e}_1$ har koordinaterna $(1, 0, 0)$, ger sats 6.9 att $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1 = v_1$, och de båda övriga koordinaterna fås analogt. □

EXEMPEL 4. Med avseende på en ON-bas har ett plan π ekvationen $x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$. Ange två inbördes vinkelräta vektorer utefter planet.

Lösning: En vektor $\mathbf{x}\colon (x_1, x_2, x_3)$ ligger enligt sats 5.4 utefter planet om och endast $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Denna ekvation har lösningen

$$(x_1, x_2, x_3) = (-s + 2t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(2, 0, 1).$$

För $(s, t) = (1, 0)$ resp. $(0, 1)$ får vi speciellt vektorerna $\mathbf{u}\colon (-1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}\colon (2, 0, 1)$, som utgör en bas för vektorrummet $\mathcal{V}_\pi$ eftersom varje annan vektor $\mathbf{x}$ utefter planet har den entydiga framställningen $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är emellertid inte ortogonala, ty $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2$. Vi utnyttjar därför sats 6.3 och ersätter vektorn $\mathbf{v}$ med vektorn $\mathbf{w} = \mathbf{v} - P_\mathbf{u}\mathbf{v}$, som ligger i $\mathcal{V}_\pi$ och är ortogonal mot $\mathbf{u}$. Med hjälp av sats 6.6 får vi att $\mathbf{w}$ har koordinaterna $(2, 0, 1) + \frac{2}{2}(-1, 1, 0) = (1, 1, 1)$. Två vinkelräta vektorer utefter planet är således $\mathbf{u}\colon (-1, 1, 0)$ och $\mathbf{w}\colon (1, 1, 1)$.

Som alternativ till att använda sats 6.3 kan vi utgå från vektorn $\mathbf{u}$ och bestämma vektorn $\mathbf{x}$ så att den dels ligger utefter planet, dels är vinkelrät mot $\mathbf{u}$, dvs. uppfyller $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = 0$. Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

med lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = t$. De mot $\mathbf{u}$ ortogonala vektorerna utefter planet har således koordinaterna (t, t, t), och för $t = 1$ får vi speciellt vektorn $\mathbf{w}$ ovan. □

ÖVNINGAR

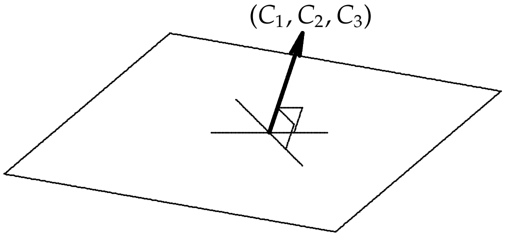
22. Beräkna längden av vektorn $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ och $\mathbf{v}$, om $|\mathbf{u}|=2$, $|\mathbf{v}|=1$ och $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-1$.
23. Bestäm vinkeln mellan rymddiagonalen och en kantlinje i en kub.
24. Om a, b och c är sidolängderna i en triangel och om γ är storleken av den mot sidan c stående vinkeln, så säger *cosinussatsen* att $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Visa att cosinussatsen följer av den andra identiteten i Ex. 2.
25. Bevisa *parallellogramlagen*: Om de två icke-parallella sidorna i en parallellogram har längd a och b och de båda diagonalerna har längd d_1 och d_2, så är $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.
26. Antag att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en ON-bas, och låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer med koordinaterna $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ och $(1,-2,1)$.
    a) Visa att $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är en ON-bas.
    b) Bestäm koordinaterna för $\mathbf{v}$ i den nya basen.
27. Bestäm två vinkelräta vektorer utefter planet $x_1-x_2+x_3=0$. (ON-system förutsätts.)
28. Bestäm en ON-bas för rummet av alla vektorer som är vinkelräta mot vektorn $\mathbf{n}\colon(1,2,3)$. (ON-bas förutsätts.)

7 Linjer och plan i ortonormerade koordinatsystem

I det här avsnittet förutsätts alla koordinater vara givna med avseende på ett fixt *ON-system* med origo O och basvektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Normaler. Vi börjar med en geometrisk tolkning av koefficienterna C_i i planets ekvation på normalform.

Sats 7.1 *Vektorn* $\mathbf{n}$ *med koordinaterna* (C_1,C_2,C_3) *är en normalvektor till planet* $C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3=D$, *dvs. vektorn* $\mathbf{n}$ *är vinkelrät mot alla med planet parallella vektorer.*



Figur 22
Planet $C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3=D$.

Bevis. Enligt sats 5.4 är vektorn $\mathbf{v}\colon(v_1,v_2,v_3)$ parallell med planet om och endast om $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=C_1v_1+C_2v_2+C_3v_3=0$, dvs. om och endast om $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$. □

EXEMPEL 1. Normalen till planet $2x_1-x_2-3x_3=4$ genom punkten $(1,2,4)$ har enligt sats 7.1 ekvationen $x_1=1+2t$, $x_2=2-t$, $x_3=4-3t$. □

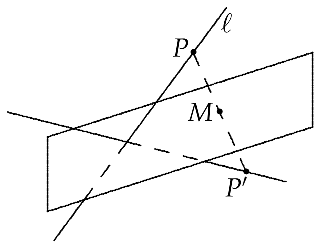
EXEMPEL 2. Det mot linjen $x_1=2-2t$, $x_2=3+4t$, $x_3=1+2t$ vinkelräta planet genom punkten $(3,1,5)$ har ekvationen $-2(x_1-3)+4(x_2-1)+2(x_3-5)=0$, eller efter förenkling, $-2x_1+4x_2+2x_3=8$. □

EXEMPEL 3. Bestäm ekvationen för spegelbilden av linjen ℓ: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + 3t$, $x_3 = 3 - t$ i planet $x_1 - x_2 + x_3 + 4 = 0$.

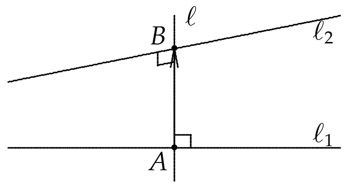
Lösning: Spegelbilden P' av en godtycklig punkt P: $(1+t, 2+3t, 3-t)$ på linjen ligger på normalen till planet genom punkten P, och eftersom $\mathbf{n}$: $(1, -1, 1)$ är en riktningsvektor för normalen får P' koordinaterna $(1+t+s, 2+3t-s, 3-t+s)$. Se figur 23. Spegelbilden har vidare samma avstånd till planet som P, och detta medför att mittpunkten M på sträckan PP' ligger i planet. Mittpunktens koordinater $(1+t+\frac{1}{2}s, 2+3t-\frac{1}{2}s, 3-t+\frac{1}{2}s)$ satisfierar med andra ord planets ekvation. Vi får

$$(1+t+\tfrac{1}{2}s) - (2+3t-\tfrac{1}{2}s) + (3-t+\tfrac{1}{2}s) + 4 = 0,$$

vilket ger $s = 2t-4$. Punkten P' har således koordinaterna $(-3+3t, 6+t, -1+t)$, och detta betyder att spegelbilden till linjen ℓ är en linje med ekvationen $x_1 = -3+3t$, $x_2 = 6+t$, $x_3 = -1+t$. □



Figur 23



Figur 24

EXEMPEL 4. Bestäm den gemensamma normalen till linjerna

$$\ell_1 : \begin{cases} x_1 = 6 + t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = -1 - t \end{cases} \quad \text{och} \quad \ell_2 : \begin{cases} x_1 = 7 - 2t \\ x_2 = -6 + 2t \\ x_3 = -13 + 4t \end{cases}.$$

Lösning: Låt ℓ vara en linje som skär den första linjen i punkten A: $(6+t, 1+t, -1-t)$ och den andra linjen i punkten B: $(7-2s, -6+2s, -13+4s)$. Se figur 24. Riktningsvektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ för linjen ℓ har koordinaterna $\big(7-2s-(6+t), -6+2s-(1+t), -13+4s-(-1-t)\big) = (-2s-t+1, 2s-t-7, 4s+t-12)$. För att ℓ skall vara en gemensam normal till de båda linjerna ℓ_1 och ℓ_2 måste riktningsvektorn $\mathbf{v}$ vara vinkelrät mot de båda sistnämnda linjernas riktningsvektorer, dvs. motsvarande skalärprodukter skall vara noll. Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2s - t + 1 + 2s - t - 7 - (4s + t - 12) = 0 \\ -2(-2s - t + 1) + 2(2s - t - 7) + 4(4s + t - 12) = 0, \end{cases}$$

som efter förenkling reduceras till

$$\begin{cases} -4s - 3t = -6 \\ 24s + 4t = 64 \end{cases}$$

med lösningen $s = 3$, $t = -2$. Den gemensamma normalen går således genom punkterna A: $(4, -1, 1)$ och B: $(1, 0, -1)$, och dess ekvationen är $x_1 = 4 - 3t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 1 - 2t$. □

Vinklar. Då två linjer skär varandra bildas två vinklar vid skärningspunkten. Den icke-trubbiga vinkeln θ av dessa båda vinklar kallar vi *vinkeln* (i bestämd form) mellan de båda linjerna. Om linjernas riktningsvektorer är $\mathbf{v}_1$ resp. $\mathbf{v}_2$, så blir vinkeln θ bestämd av att

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}.$$

Vinkeln mellan två skärande plan är lika med vinkeln mellan två normaler till planen från en punkt på skärningslinjen.

EXEMPEL 5. Bestäm vinkeln mellan planet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4 = 0$ och planet $2x_1 - 2x_2 - x_3 - 3 = 0$.

Lösning: Vektorerna $\mathbf{n}_1 : (1, 2, 2)$ och $\mathbf{n}_2 : (2, -2, -1)$ är normalvektorer till de två planen, varför vinkeln θ mellan planen bestäms av sambandet

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{|-4|}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

Vinkeln blir därför $\arccos \frac{4}{9} \approx 63,6^\circ$. □

Avståndet från en punkt till ett plan. Med avståndet från en punkt A till ett plan menas det kortaste avståndet från A till någon punkt P i planet. Med hjälp av Pythagoras sats får man lätt att det kortaste avståndet erhålles då P är fotpunkten för normalen från A till planet.

Sats 7.2 *Avståndet från punkten $A : (a_1, a_2, a_3)$ till planet $C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + D = 0$ är*

$$\frac{|C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D|}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}.$$

Bevis. Normalen genom A till planet har ekvationen $x_1 = a_1 + C_1t$, $x_2 = a_2 + C_2t$, $x_3 = a_3 + C_3t$. Parametervärdet t_0 för normalens skärningspunkt P med planet satisfierar ekvationen

$$C_1(a_1 + C_1t_0) + C_2(a_2 + C_2t_0) + C_3(a_3 + C_3t_0) + D = 0.$$

Härav fås

$$t_0 = -\frac{C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D}{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}.$$

Avståndet $|AP|$ från A till planet är därför enligt avståndsformeln lika med

$$\sqrt{(C_1t_0)^2 + (C_2t_0)^2 + (C_3t_0)^2} = |t_0|\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = \frac{|C_1a_1 + C_2a_2 + C_3a_3 + D|}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}. \quad \square$$

ÖVNINGAR

29. Beräkna avståndet mellan planen $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0$ och $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 7 = 0$.
30. Beräkna avståndet mellan de korsande linjerna $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 3 - 2t$, $x_3 = 1 - 2t$ och $x_1 = 4t$, $x_2 = 4 - 2t$, $x_3 = -2 - 5t$.
31. Bestäm vinkelräta projektionen av linjen $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 - t$, $x_3 = t$ på planet $2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 = 0$.
32. Bestäm i rummet $\mathcal{V}$ en ON-bas som har två av sina vektorer utefter planet $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

8 Basbyte

En vektors koordinater beror förutom av vektorn också av basen; om man byter bas så ändras koordinaterna. Vi skall utreda sambandet och börjar med ett exempel.

EXEMPEL 1. Antag att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är en bas för vektorerna i ett plan, och låt $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ vara vektorerna med koordinaterna $(2,-1)$ och $(-3,2)$. Eftersom vektorerna $\mathbf{e}_1'$ och $\mathbf{e}_2'$ inte är parallella bildar de en ny bas. Vi skall bestämma sambandet mellan koordinaterna (x_1,x_2) i basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och koordinaterna (x_1',x_2') i den nya basen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ för en godtycklig vektor $\mathbf{x}$.

Genom att substituera

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

i ekvationen

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2'$$

får vi

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 &= x_1'(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + x_2'(-3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \\ &= (2x_1' - 3x_2')\mathbf{e}_1 + (-x_1' + 2x_2')\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Eftersom koordinaterna i en given bas är entydigt bestämda, följer det att

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - 3x_2' \\ x_2 = -x_1' + 2x_2'. \end{cases}$$

Detta samband uttrycker de gamla koordinaterna i termer av de nya. Genom att lösa systemet ovan med avseende på variablerna x_1', x_2' erhåller vi också systemet

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2, \end{cases}$$

som explicit uttrycker de nya koordinaterna i termer av de gamla. □

Exemplet ovan kan generaliseras och vi får då följande allmänna resultat, som vi formulerar i det tredimensionella fallet.

Sats 8.1 *Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en bas för vektorrummet $\mathcal{V}$, och låt $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ vara tre vektorer med koordinaterna (a_{11},a_{21},a_{31}), (a_{12},a_{22},a_{32}) resp. (a_{13},a_{23},a_{33}). (Observera numreringen!) Sätt*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Då bildar vektorerna $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ en bas för $\mathcal{V}$ om och endast om matrisen A är inverterbar, i vilket fall sambandet mellan koordinaterna $x = [\,x_1\ \ x_2\ \ x_3\,]^t$ i basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ och koordinaterna $x' = [\,x_1'\ \ x_2'\ \ x_3'\,]^t$ i basen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ för en vektor $\mathbf{x}$ är

$$x = Ax'.$$

Anm. Här och i fortsättningen uppfattar vi alltså koordinaterna som en kolonnmatris där så är lämpligt. Matrisen A kallas *transformationsmatrisen* vid byte från koordinaterna (x_1', x_2', x_3') till koordinaterna (x_1, x_2, x_3) eller från basen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ till basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Bevis. Vektorerna $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ bildar en bas om och endast om det för varje vektor $\mathbf{x}$ finns entydigt bestämda tal (x_1', x_2', x_3') så att

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' + x_3'\mathbf{e}_3' \\ &= x_1'(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3) + x_2'(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3) + x_3'(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \\ &= (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3')\mathbf{e}_1 + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')\mathbf{e}_2 + (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3')\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Eftersom koordinaterna med avseende på basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är unika, är detta krav ekvivalent med att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' \\ x_3 = a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' \end{cases}$$

skall ha entydig lösning för varje vänsterled (x_1, x_2, x_3). Nödvändigt och tillräckligt för detta är att matrisen A är inverterbar. Samtidigt ger systemet ovan sambandet $x = Ax'$ mellan de olika koordinaterna. □

Byte mellan ON-baser; ortogonala matriser. Antag nu speciellt att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en ON-bas, och låt som ovan A vara transformationsmatrisen vid övergången mellan baserna. Under vilka villkor på matrisen A är också den nya basen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ en ON-bas? Eftersom

$$\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j},$$

blir tydligen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ en ON-bas om och endast om

(1) $$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} = \begin{cases} 1, & \text{för } i = j \\ 0, & \text{för } i \neq j, \end{cases}$$

där i, $j = 1, 2, 3$.

Definition 8.2 En matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

som uppfyller villkoret (1) kallas en *ortogonalmatris*. Ortogonalmatriser av ordning 2 definieras på motsvarande sätt.

Sammanfattningsvis gäller alltså.

Sats 8.3 *Antag att* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *är en ON-bas för vektorrummmet* $\mathcal{V}$, *och låt* $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ *vara en annan bas. Då är* $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ *en ON-bas om och endast om transformationsmatrisen* A *i sats 8.1 är en ortogonal matris.*

Eftersom elementet c_{ij} på plats i, j i matrisen A^tA är

$$c_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j},$$

blir villkoret (1) ekvivalent med att

$$A^tA = E.$$

Detta ger oss följande viktiga resultat om ortogonala matriser, som naturligtvis också gäller för matriser av ordning 2.

Sats 8.4 *En ortogonal matris A är inverterbar och $A^{-1} = A^t$. Den inversa matrisen är också ortogonal.*

Bevis. Av $A^tA = E$ följer att $A^{-1} = A^t$. Vidare blir $(A^{-1})^tA^{-1} = A^{tt}A^{-1} = AA^{-1} = E$, så inversen A^{-1} är också ortogonal. □

EXEMPEL 2. Matriserna

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

är ortogonala för varje värde på vinkeln θ, ty

$$\begin{aligned} (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 &= 1, \\ (-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 &= 1 \qquad \text{och} \\ -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta &= 0. \end{aligned}$$

Det följer att

$$R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R_{-\theta}.$$ □

EXEMPEL 3. Matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

är ortogonal, som läsaren lätt kan verifiera. Det följer att

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1' + \frac{2}{3}x_2' + \frac{2}{3}x_3' \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1' + \frac{1}{3}x_2' - \frac{2}{3}x_3' \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1' - \frac{2}{3}x_2' + \frac{1}{3}x_3' \end{cases}$$

beskriver ett koordinatbyte mellan två ON-baser. □

Byte av koordinatsystem i det euklidiska rummet. En punkts koordinater beror förutom av basvektorerna också av valet av origo. Sambandet mellan en punkts koordinater i olika koordinatsystem beskrivs i nästa sats, som är ett enkelt korollarium till sats 8.1

Sats 8.5 *Antag att punkten O' har koordinaterna $b = [\,b_1 \;\; b_2 \;\; b_3\,]^t$ med avseende på koordinatsystemet O, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, samt att A är transformationsmatrisen vid övergång från basen $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ till basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Sambandet mellan en punkts X koordinater $x = [\,x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\,]^t$ i koordinatsystemet O, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och koordinater $x' = [\,x_1' \;\; x_2' \;\; x_3'\,]^t$ i koordinatsystemet O', $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ är då*

$$x = Ax' + b.$$

Bevis. Vi har $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$, och motsvarande vektorer har koordinaterna x, b resp. Ax' i basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, varför $x = b + Ax'$. □

ÖVNINGAR

33. Ett plan har ekvationen $x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ med avseende på ett koordinatsystem. Man inför nya basvektorer $\mathbf{e}_1'$: $(3,1,1)$, $\mathbf{e}_2'$: $(1,2,4)$, $\mathbf{e}_3'$: $(2,1,3)$ och ett nytt origo O': $(4,2,1)$. Bestäm planets ekvation i det nya koordinatsystemet.
34. Visa att produkten av två ortogonala matriser är ortogonal.

9 Kongruensavbildningar

Med en *kongruensavbildning* menas en avbildning som är definierad på det euklidiska rummet och avbildar varje område M på ett kongruent område M'. Man kan visa att alla kongruensavbildningar är sammansatta av translationer, rotationer och speglingar. Det finns därför anledning att beskriva dessa tre enkla klasser analytiskt.

Om vi fixerar ett origo O i rummet, svarar varje punkt X en-entydigt mot en vektor $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$. En avbildning definierad på det euklidiska rummet av punkter kan därför lika gärna uppfattas såsom en avbildning definierad på vektorrummet $\mathcal{V}$. Vi kommer att använda oss av båda tolkningarna.

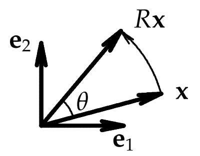
Translation. Translationerna, eller parallellförflyttningarna, definierades i avsnitt 2, där vi till och med identifierade translationer med vektorer. Den mot vektorn $\mathbf{a}$ svarande translationen $T_{\mathbf{a}}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definieras av att

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Sambandet mellan koordinaterna för vektorn $\mathbf{x}$ och koordinaterna för den translaterade vektorn $\mathbf{y} = T_{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ är

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + a_1 \\ y_2 = x_2 + a_2 \\ y_3 = x_3 + a_3. \end{cases}$$

Rotation. Vi börjar med att betrakta *rotationer* kring origo O i ett plan. Låt vridningsvinkeln vara θ. Om $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$, så är den roterade vektorn $R\mathbf{x} = \overrightarrow{OY}$, där punkten Y är bestämd av att $|OY| = |OX|$ och av att vinkeln mellan OX och OY är θ mätt i positiv led. Två vinklar θ och θ' ger uppenbarligen upphov till samma rotation om och endast om $\theta' - \theta$ är en multipel av 360°.



Figur 25
Rotation vinkeln θ.

Man kan beskriva rotationerna i planet analytiskt med hjälp av matriserna

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Sats 9.1 *Låt R vara plan rotation vinkeln θ. Om vektorn $\mathbf{x}$ har koordinaterna $x = [\,x_1 \;\; x_2\,]^t$ med avseende på given ON-bas, så har den roterade vektorn $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ koordinaterna $y = [\,y_1 \;\; y_2\,]^t$, där*

$$y = R_\theta x.$$

Bevis. På grund av definitionen av sinus och cosinus kan vi skriva

$$(x_1, x_2) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha),$$

där r är längden av vektorn $\mathbf{x}$ och α är den vinkel som vektorn bildar med den första basvektorn. Koordinaterna för den roterade vektorn är

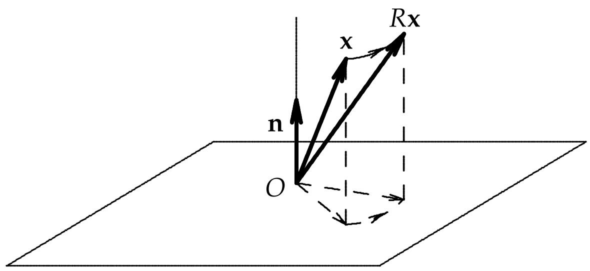
$$\begin{aligned}(y_1, y_2) &= \big(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha)\big)\\ &= \big(r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha), r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\big)\\ &= \big(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta\big).\end{aligned}$$

På matrisform blir detta $y = R_\theta x$. □

EXEMPEL 1. Vid rotation 60° kring origo i ett ON-system avbildas en punkt med koordinaterna (x_1, x_2) på punkten (y_1, y_2), där

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$ □

Vi övergår nu till rotationer i rummet. En rotation i rummet har en *rotationsaxel*, och det är naturligtvis ingen inskränkning att anta att origo ligger på rotationsaxeln. Vi kan då specificera rotationsaxeln genom att ange en nollskild vektor $\mathbf{n}$ som är parallell med axeln. En rotation R kring $\mathbf{n}$ roterar vektorer som är vinkelräta mot $\mathbf{n}$ en given vinkel θ enligt beskrivningen ovan för plana rotationer, medan vektorer som är parallella med rotationsaxeln lämnas orörda, och godtyckliga vektorer $\mathbf{x}$ avbildas enligt superpositionsprincipen, dvs. om $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, där $\mathbf{x}_1$ är vinkelrät mot och $\mathbf{x}_2$ är parallell med rotationsaxeln, så är $R\mathbf{x} = R\mathbf{x}_1 + R\mathbf{x}_2 = R\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$.



Figur 26
Rotation kring en axel.

Rotationer i rummet kan beskrivas analytiskt med hjälp av matriserna

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Vi använder samma beteckning som i det plana fallet eftersom det framgår av sammanhanget vilken matris som avses.) Av beskrivningen av plana rotationer följer omedelbart följande resultat.

Sats 9.2 *Låt R vara en rotationen i rummet vinkeln θ kring $\mathbf{e}_3$, där $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en ON-bas, och låt $\mathbf{x}$ vara en vektor med koordinaterna $x = [\,x_1 \;\; x_2 \;\; x_3\,]^t$. Då har den roterade vektorn $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ koordinaterna*

$$y = R_\theta x.$$

□

Matrisen R_θ, som beskriver sambandet mellan en vektors och den roterade vektorns koordinater, kallas rotationens *matris* med avseende på den givna ON-basen.

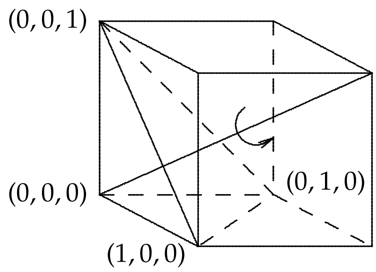
Resultatet i sats 9.2 är speciellt såtillvida att rotationsaxeln sammanfaller med en av basvektorerna. Detta kan man emellertid alltid åstadkomma genom ett basbyte. Genom att ta hänsyn till hur koordinaterna transformeras under basbyte får man då följande uttryck för matrisen till en rotation kring en godtycklig axelriktning (och med avseende på en godtycklig bas).

Sats 9.3 *Låt R vara en rotation vinkeln θ kring en godtycklig vektor, och låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vara en godtycklig bas för $\mathcal{V}$. Då finns det en inverterbar matris A så att sambandet mellan koordinaterna x för en vektor $\mathbf{x}$ och koordinaterna y för den roterade vektorn $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ ges av*

$$y = AR_\theta A^{-1}x.$$

Bevis. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en ON-bas vald så att $\mathbf{e}_3$ ligger utmed rotationsaxeln. Om x' och y' betecknar koordinaterna för $\mathbf{x}$ resp. $\mathbf{y}$ med avseende på basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, så finns det enligt sats 8.1 en inverterbar matris A så att $x = Ax'$ och $y = Ay'$, och sats 9.2 ger $y' = R_\theta x'$. Det följer att $y = Ay' = AR_\theta x' = AR_\theta A^{-1}x$, vilket bevisar satsen. □

EXEMPEL 2. En kub med ett hörn i origo och de tre grannhörnen i punkterna $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ vrids 180° kring rymddiagonalen $x_1 = x_2 = x_3 = t$. (ON-system förutsätts.) Var hamnar hörnet $(1,0,0)$ efter rotationen.



Figur 27

Lösning: Vi väljer en ny ON-bas $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ med den tredje basvektorn utefter rymddiagonalen. De båda andra basvektorerna måste då vara parallella med planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Man verifierar enkelt att $\mathbf{e}_1'\colon (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{e}_2'\colon (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ och $\mathbf{e}_3'\colon (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ duger. Transformationsmatrisen är

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \qquad \text{med} \qquad A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Rotationens matris är i den nya basen

$$R_{180^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och i den ursprungliga basen

$$AR_{180^\circ}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En punkt med koordinaterna (x_1, x_2, x_3) avbildas således på punkten (y_1, y_2, y_3), där

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ y_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3. \end{cases}$$

Speciellt avbildas alltså hörnet $(1, 0, 0)$ på punkten med koordinaterna $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. □

Spegling. Med spegelbilden $Y = SX$ av en punkt $X\colon (x_1, x_2, x_3)$ i ett plan menas den punkt $Y\colon (y_1, y_2, y_3)$ på normalen från X till planet som ligger på motsatt sida och på samma avstånd från planet som X. För spegling i x_1x_2-planet med avseende på ett ON-system gäller således

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = -x_3 \end{cases}$$

vilket på matrisform kan skrivas $y = \widetilde{S}x$, där x och y är punkternas koordinater som kolonnvektorer och

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En spegling i ett godtyckligt plan kan lätt reduceras till fallet ovan. Antag att S är en spegling i planet π, att origo ligger i planet samt att koordinaterna x och y för X och $Y = SX$ ges med avseende på en godtycklig bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Välj en ny ON-bas $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ så att de två första basvektorerna är parallella med planet och $\mathbf{e}_3'$ är vinkelrät mot planet. Låt A vara transformationsmatrisen vid basbyte från $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ till $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Om x' och y' betecknar koordinaterna i det nya koordinatsystemet, så har vi följande samband:

$$x = Ax', \quad y = Ay' \quad \text{och} \quad y' = \widetilde{S}x',$$

varav följer att $y = A\widetilde{S}A^{-1}x$. Sambandet mellan punktens och den speglade punktens koordinater förmedlas således av matrisen $A\widetilde{S}A^{-1}$, som kallas speglingens matris med avseende på basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

EXEMPEL 3. Bestäm koordinatsambandet vid spegling i planet $x_1 - x_2 - 2x_3 = 3$. Koordinatsystemet förutsätts ortonormerat.

Lösning: Det enklaste lösningen får man genom att utgå från definitionen av en spegling och resonera som i Ex. 3 i avsnitt 7, där vi bestämde spegelbilden av en linje. Det är emellertid instruktivt att följa gången i resonemanget ovan, så därför väljer vi en alternativ lösningsmetod. Vi börjar med att välja en punkt i planet, t.ex. punkten A

med koordinaterna $a = [3\ \ 0\ \ 0]$ som nytt origo, samt en ny ON-bas $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ med $\mathbf{e}_1'$ och $\mathbf{e}_2'$ parallella med planet och $\mathbf{e}_3'$ vinkelrät mot planet. Läsaren kan lätt kontrollera att vektorerna $\mathbf{e}_1' : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{e}_2' : (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ och $\mathbf{e}_3' : (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ duger. Detta innebär att transformationsmatrisen vid övergång från den nya basen till den gamla blir

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Om punkten X och spegelpunkten $Y = SX$ har koordinaterna x och y i den ursprungliga basen och koordinaterna x' och y' i den nya basen, så råder därför följande samband:

$$x = a + Ax', \quad y = a + Ay' \quad \text{och} \quad y' = \widetilde{S}x',$$

vilket ger

$$y = a + A\widetilde{S}x' = a + A\widetilde{S}A^{-1}(x - a) = a - A\widetilde{S}A^{-1}a + A\widetilde{S}A^{-1}x.$$

Eftersom matrisen A är ortogonal får vi

$$A^{-1} = A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

En enkel uträkning ger att

$$A\widetilde{S}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Det sökta koordinatsambandet blir därför

$$\begin{cases} y_1 = 1 + \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + 2x_3) \\ y_2 = -1 + \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2 - 2x_3) \\ y_3 = -2 + \frac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 - x_3) \end{cases} \qquad \square$$

ÖVNINGAR

I samtliga övningar förutsätts koordinatsystemet vara ortonormerat.

35. Bestäm matrisen för spegling i planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
36. Punkten $(1, 3, 5)$ avbildas vid spegling i ett plan genom origo på punkten $(3, 5, 1)$. Bestäm det speglande planets ekvation, speglingens matris samt spegelbilden av punkten $(3, 2, 1)$.
37. I planet betecknar S_1 spegling i linjen $x_2 = \sqrt{3}x_1$ och S_2 spegling i linjen $x_2 = x_1$. Visa att den sammansatta avbildningen S_2S_1 är en rotation och bestäm rotationsvinkeln.
38. Bestäm matrisen för rotation 60° kring linjen $x_1 = x_2 = x_3$.

10 Determinanter av ordning 2 och 3

I det här avsnittet skall vi definiera determinanter av ordning 2 och 3 samt utveckla så mycket determinantteori som behövs för begreppen area, volym och orientering.

Definition 10.1 För reella 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

definieras *determinanten* $\det A$ eller

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

som det reella talet

$$x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

EXEMPEL 1. I föregående avsnitt visade vi att matriserna

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

svarar mot plana vridningar. Determinanterna av dessa matriser är

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$ □

Sats 10.2 *Determinanten av 2×2-matriser har följande egenskaper:*

(a) *Determinanten byter tecken när de två matriskolonnerna byter plats:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}.$$

(b) *Determinanten är lika med noll om de två kolonnerna är lika:*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(c) *Determinanten är linjär med avseende på matriskolonnerna. Exempelvis är*

$$\begin{vmatrix} \alpha x_1 + \beta z_1 & y_1 \\ \alpha x_2 + \beta z_2 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(d) *Determinantens värde ändras inte om en godtycklig multipel av den ena kolonnen adderas till den andra. Exempelvis är*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + \alpha y_1 & y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(e) *Determinantens värde ändras inte om matrisen transponeras:*

$$\det A^t = \det A.$$

Anm. Av (e) följer att alla determinantegenskaper som gäller för kolonner också gäller för rader. Exempelvis är determinanten lika med noll om de två raderna är identiska.

Bevis. Man verifierar lätt de fem identiteterna genom att räkna ut förekommande determinanter med hjälp av determinantdefinitionen och jämföra vänster- och högerleden. Detta lämnas som enkel övning åt läsaren. Man bör emellertid observera att (b) är en konsekvens av (a). Om vi sätter $y = x$ i (a) så uppfyller nämligen den resulterande determinanten D ekvationen $D = -D$, dvs. $D = 0$.

Vidare följer egenskap (d) av (b) och linearitetsegenskapen (c), ty

$$\begin{vmatrix} x_1+\alpha y_1 & y_1 \\ x_2+\alpha y_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + 0. \qquad \square$$

Definition 10.3 För reella 3×3-matriser

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

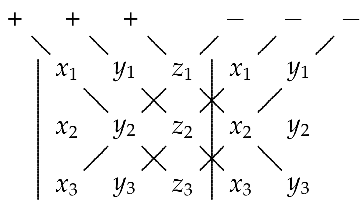
definieras *determinanten* $\det A$ eller

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

som det reella talet

$$x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1.$$

Varje produkt $x_iy_jz_k$ i ovanstående summa innehåller ett element från varje kolonn och samtidigt ett element från varje rad; eftersom det finns 6 permutationer av radindex 1, 2, 3 blir det 6 termer i summan. Dessutom skall varje produkt förses med ett tecken enligt ett viss mönster: permutationerna $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ och $(3,1,2)$ ger plustecken medan övriga tre ger minustecken. För att få en bekväm minnesregel kan man använda *Sarrus regel*: upprepa första och andra kolonnerna efter den tredje och dra de sex "diagonalerna" enligt figur 28. Diagonalerna som lutar snett nedåt höger svarar mot produkter med plustecken, och diagonaler som lutar snett uppåt höger svarar mot produkter med minustecken.



Figur 28
Sarrus regel.

En 3×3-determinanten kan uttryckas som en summa av determinanter av ordning 2 på följande vis:

Sats 10.4 (Utveckling efter tredje kolonnen)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Bevis. Genom att i determinantdefinitionen para ihop de två termer som innehåller z_1, de två termer som innehåller z_2 och de två termer som innehåller z_3 får vi följande uttryck för determinanten i vänsterledet:

$$z_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_2(x_1y_3 - x_3y_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$

Termerna inom parentes svarar nu mot determinanter av ordning 2 precis som i högerledet av satsen. □

Genom att istället para ihop de sex termerna två och två med avseende på x_i får man en formel för utveckling efter den första kolonnen, och hopparning med avseende på y_j ger en formel för utveckling efter andra kolonnen. Läsaren uppmanas att själv upptäcka dessa formler som övning.

Följande egenskaper för determinanter av ordning 3 är direkta generaliseringar av motsvarande egenskaper i sats 10.2 för determinanter av ordning 2.

Sats 10.5

(a) *Determinanten byter tecken när två godtyckliga kolonner byter plats. Exempelvis är*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ z_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

(b) *Om två kolonner är identiska så är determinanten lika med noll.*

(c) *Determinanten är linjär med avseende på varje kolonn. Exempelvis är*

$$\begin{vmatrix} \alpha u_1+\beta x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha u_2+\beta x_2 & y_2 & z_2 \\ \alpha u_3+\beta x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} u_1 & y_1 & z_1 \\ u_2 & y_2 & z_2 \\ u_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(d) *Determinanten ändras inte om en godtycklig multipel av en kolonn adderas till en annan kolonn.*

(e) *Determinanten av en triangulär matris är lika med produkten av diagonalelementen; exempelvis är*

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3.$$

Speciellt är alltså $\det E = 1$.

(f) *Determinantens värde ändras inte om matrisen transponeras:*

$$\det A^t = \det A.$$

Bevis. (a), (c) och (f) följer genom direkt uträkning av förekommande determinanter, och precis som för determinanter av ordning 2 följer egenskap (b) av (a) och egenskap (d) av (b) och (c). Slutligen följer (e) genom direkt uträkning; alla produkter utom $x_1y_2z_3$ är 0. □

Räkneregel (f) innebär att alla determinantegenskaper som gäller för kolonner också gäller för rader. Räknereglerna (a), (c) och (d) innebär att vi har fullständig kontroll över hur en determinant förändras när vi utför elementära radoperationer eller elementära kolonnoperationer, och med sådana operationer kan en godtycklig matris överföras i en triangulär matris. Vi illustrerar med ett exempel.

EXEMPEL 2. Det är naturligtvis ingen konst att beräkna determinanten

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

direkt med hjälp av Sarrus regel, men vi kan också använda sats 10.5 för att förenkla determinanten. Addera först den första kolonnen multiplicerad med -2 till den andra kolonnen och multiplicerad med -1 till den tredje kolonnen; detta förändrar inte determinantens värde, dvs.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Byt nu plats på andra och tredje kolonnen; detta resulterar i

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12. \qquad \square$$

Det finns inget naturligt samband mellan determinanten för en summa av matriser och de ingående matrisernas determinanter. För produkter har vi däremot följande enkla samband.

Sats 10.6 *Om A och B är kvadratiska matriser av samma ordning så är*

$$\det AB = \det A \cdot \det B\,.$$

Bevis. Att verifiera formeln genom att bara utnyttja definitionen av matrisprodukt och determinant är inte någon rekommendabel metod, ty vänsterledet kommer för matriser av ordning 3 i så fall före förenkling att vara en summa av 162 termer, och varje term är en produkt av 6 element. Determinanten i vänsterledet bör därför först förenklas med hjälp av satserna 10.2 resp. 10.5. Vi nöjer oss här att utföra detta för matriser av ordning 2.

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 & a_1y_1 + b_1y_2 \\ a_2x_1 + b_2x_2 & a_2y_1 + b_2y_2 \end{vmatrix} \\
&= x_1y_1\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} + x_1y_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + x_2y_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} + x_2y_2\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + x_1y_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - x_2y_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad \square
\end{aligned}$$

Sats 10.7 *En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$, i vilket fall*

$$\det A^{-1} = 1/\det A.$$

Bevis. Antag att inversen A^{-1} existerar. Då är på grund av produktregeln för determinanter $\det A \cdot \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det E = 1$, vilket medför att $\det A \neq 0$ och att $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Antag omvänt att A inte är inverterbar. Genom att permutera rader i matrisen och addera en multipel av en rad till andra rader kan vi överföra matrisen A till en radekvivalent trappmatris T, vars sista rad är en nollrad. Det följer direkt av determinantdefinitionen att $\det T = 0$. Varje gång rader permuteras byter determinanten tecken och då en multipel av en rad adderas till en annan ändras inte determinanterns värde. Följaktligen är $\det A = \pm \det T = 0$. □

EXEMPEL 3. Enligt sats 9.3 beskrivs en rotation kring en godtycklig axel av en matris av typen $B_\theta = AR_\theta A^{-1}$, där

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utveckling utefter tredje kolonnen ger omedelbart att $\det R_\theta = 1$, så det följer att

$$\det B_\theta = \det A \cdot \det R_\theta \cdot \det A^{-1} = \det A \cdot 1 \cdot (\det A)^{-1} = 1.$$

Oavsett vilken bas som används är således determinanten för matrisen svarande mot en rotation lika med 1. □

EXEMPEL 4. Analogt beskrivs speglingar i plan av matriser av typen $S = ABA^{-1}$, där

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Det följer att $\det S = -1$, oavsett vilken bas som används för att beräkna speglingens matris S. □

Det är ett välkänt vardagligt faktum att det är skillnad på spegling och rotation. En högersko är alltid en högersko hur vi än vrider och vänder på den, medan spegelbilden av en högersko ser ut som en vänstersko. Exemplen ovan visar att determinanten förmår skilja på höger och vänster. I nästa avsnitt skall vi utveckla detta vidare och införa begreppet orientering.

Determinantvillkor för att vektorer skall bilda en bas. Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en given bas för vektorrummet $\mathcal{V}$. Om $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ är tre vektorer i rummet med koordinaterna (a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}) och (a_{13}, a_{23}, a_{33}) (observera numreringen av koordinaterna), så definierar vi

$$\det(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanten beror naturligtvis inte enbart av vektorerna $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ utan också av den underliggande basen, men vi förutsätter att den är fixerad en gång för alla.

Enligt sats 8.1 är $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ en bas om och endast om matrisen A är inverterbar, och enligt sats 10.7 gäller detta om och endast om $\det A \neq 0$. Vi får därför följande enkla karakterisering av baser.

Sats 10.8 *Vektorerna $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ är en bas för vektorrummet $\mathcal{V}$ om och endast om*

$$\det(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \neq 0.$$

På motsvarande sätt sätter vi, om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är en fix bas för rummet $\mathcal{V}_\pi$ av alla vektorer som är parallella med planet π och $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ är två vektorer i $\mathcal{V}_\pi$ med koordinaterna (a_{11}, a_{21}) resp. (a_{12}, a_{22}),

$$\det(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Analogt med sats 10.8 får vi då följande resultat:
Vektorerna $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ är en bas för vektorrummet $\mathcal{V}_\pi$ om och endast om

$$\det(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') \neq 0.$$

EXEMPEL 5. Antag att vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ har koordinaterna $(1,2,1)$, $(1,-1,1)$ och $(2,1,3)$. Då är

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ bildar således en bas för vektorrummet $\mathcal{V}$. □

Sats 10.9 (Planets ekvation på determinantform) *Planet som är parallellt med vektorerna* $\mathbf{v}: (v_1, v_2, v_3)$ *och* $\mathbf{w}: (w_1, w_2, w_3)$ *och går genom punkten* $A: (a_1, a_2, a_3)$ *har ekvationen*

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - a_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bevis. Låt $X: (x_1, x_2, x_3)$ vara en godtycklig punkt och sätt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AX}$, som alltså har koordinaterna $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3)$. Punkten X ligger i planet om och endast om vektorn $\mathbf{u}$ är parallell med planet, dvs. om och endast om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ inte är en bas för vektorrummet $\mathcal{V}$, och enligt föregående sats är detta ekvivalent med villkoret $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, som är ekvationen i satsen. □

EXEMPEL 6. Planet genom punkterna $(1,5,9)$, $(3,4,2)$ och $(6,5,3)$ har ekvationen

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & 3-1 & 6-1 \\ x_2 - 5 & 4-5 & 5-5 \\ x_3 - 9 & 2-9 & 3-9 \end{vmatrix} = 0,$$

vilket efter förenkling blir $6x_1 - 23x_2 + 5x_3 + 64 = 0$. □

ÖVNINGAR

39. Beräkna följande determinanter

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

40. Lös ekvationerna

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

41. Härled en formel för utveckling av en determinant efter första raden.
42. Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $(0,1,2)$, $(2,1,0)$ och $(1,2,3)$.
43. För vilka värden på a är vektorerna med koordinaterna $(a,1,1)$, $(2,1,-1)$ och $(1,2,a)$ en bas.
44. Visa att om R vara en rotation i rummet så är $\det(R\mathbf{v}_1, R\mathbf{v}_2, R\mathbf{v}_3) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.
45. Visa att om S är en spegling så är $\det(S\mathbf{v}_1, S\mathbf{v}_2, S\mathbf{v}_3) = -\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

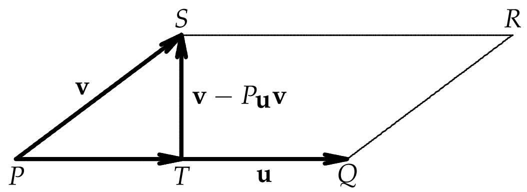
11 Area, volym, vektorprodukt

Arean av en parallellogram. Vi säger att två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp parallellogrammen $PQRS$ om $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$. Parallellogrammen är naturligtvis inte entydigt bestämd av vektorerna, men alla uppspända parallellogrammer har förstås samma area. För parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ blir den uppspända parallellogrammen degenererad och arean är noll.

Sats 11.1 *Arean av en parallellogram som spänns upp av två vektorer* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är lika med*

$$\sqrt{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}.$$

Bevis. Formeln stämmer om parallellogrammen är degenererad, ty för parallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \pm|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Så antag därför att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ bildar en riktig parallellogram $PQRS$, och låt T vara fotpunkten på sidan PQ för höjden från hörnet S. Se figur 31.



Figur 31

För att beräkna höjden $|TS|$ noterar vi $\mathbf{v} - P_\mathbf{u}\mathbf{v} = \overrightarrow{TS}$, där $P_\mathbf{u}\mathbf{v}$ är den ortogonala projektionen av av vektorn $\mathbf{v}$ på vektorn $\mathbf{u}$. Höjden är därför lika med $|\mathbf{v} - P_\mathbf{u}\mathbf{v}|$, och parallellogrammens area A är följaktligen lika med $|\mathbf{u}||\mathbf{v} - P_\mathbf{u}\mathbf{v}|$. Eftersom $P_\mathbf{u}\mathbf{v} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})|\mathbf{u}|^{-2}\,\mathbf{u}$ blir

$$\begin{aligned} A^2 &= |\mathbf{u}|^2\left|\mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}\right|^2 = |\mathbf{u}|^2\left(|\mathbf{v}|^2 - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\right)^2|\mathbf{u}|^2\right) \\ &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2. \end{aligned}$$ □

Korollarium 11.2 *Arean av en parallellogram som spänns upp av två vektorer* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *som är parallella med ett plan* π *är lika med* $|\det(\mathbf{u},\mathbf{v})|$*, där determinanten beräknas med avseende på en godtycklig ON-bas för rummet* $\mathcal{V}_\pi$ *(av alla vektorer parallella med* π*.)*

Bevis. Låt (u_1, u_2) och (v_1, v_2) beteckna vektorernas koordinater. Föregående sats ger nu

$$\begin{aligned} A^2 &= (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2) - (u_1v_1+u_2v_2)^2 = u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = (\det(\mathbf{u},\mathbf{v}))^2. \end{aligned}$$ □

Orientering. Man kan inte ge en matematisk definition av begreppen höger och vänster, men med hjälp av determinanten kan man *skilja* på höger och vänster.

Definition 11.3 Två baser i rummet (eller planet) säges ha *samma orientering* om transformationsmatrisen vid byte från den ena basen till den andra har en positiv determinant, och *olika orientering* om determinanten är negativ.

Anm. Det spelar naturligtvis ingen roll vilken av de båda transformationsmatriserna som vi betraktar eftersom den ena är inversen till den andra och determinanten för inversen till en matris har samma tecken som determinanten för matrisen. Däremot är förstås ordningen mellan basvektorerna i de båda baserna väsentlig. Om vi kastar om ordningen mellan två vektorer i en bas, så får vi en ny bas som inte har samma orientering som den ursprungliga.

Om två baser har samma orientering så är det möjligt att kontinuerligt förändra den ena basen så att den $-$ utan att upphöra att vara en bas $-$ övergår i den andra basen. Vi går inte in på beviset för detta här utan nöjer oss med att betrakta ett enkelt exempel.

EXEMPEL 1. Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ vara en ON-bas för vektorer i planet och låt $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ vara den bas som fås genom att definiera

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\\ \mathbf{f}_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Dessa baser har samma orientering, ty determinanten för transformationsmatrisen är

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1.$$

Observera att man får basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ genom att vrida basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 45°, och vridning är naturligtvis en kontinuerlig förändring. □

Lika lite som man kan definiera höger och vänster matematiskt kan man ge en absolut matematisk innebörd åt begreppet positiv orientering, men precis som man kan välja en sträcka till enhetssträcka och sedan mäta längden av andra sträckor relativt den, kan man välja en bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ som *referensbas* och sedan ange orienteringen hos varje annan bas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ *relativt* referensbasen. Man säger då att basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är *positivt orienterad* om den har samma orientering som referensbasen, och att basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är *negativt orienterad* om baserna har olika orientering.

I praktiska och fysikaliska tillämpningar väljer man som referensbas den bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ som fås genom att hålla högra handens tumme, pekfinger och långfinger utsträckta med långfingret pekande upp från handflatan; vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är då respektive tummen, pekfingret och långfingret (och pekar i fingrarnas riktning). En bas som är positivt orienterad relativt denna bas kallas ett *högersystem*.

Definition 11.3 kan nu ges följande formulering.

Definition 11.4 Basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ är positivt orienterad relativt referensbasen om och endast om

$$\det(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) > 0,$$

där determinanten beräknas med avseende på referensbasen.

Bevis. Determinanten $\det(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ är nämligen lika med determinanten för transformationsmatrisen vid övergång från basen $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ till referensbasen. □

Analogt är förstås en bas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ för vektorer i ett plan positivt orienterad relativt en referensbas om och endast om $\det(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) > 0$.

EXEMPEL 2. Basen $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$ är negativt orienterad relativt referensbasen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, ty motsvarande determinant är

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -1. \qquad \square$$

Vektorprodukt. I det här delavsnittet behöver vi begreppet orientering. Vi antar därför att någon bas för vektorrummet $\mathcal{V}$ valts som referensbas och att andra basers orientering är relativt denna.

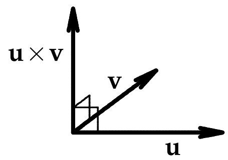
Definition 11.5 Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer i rummet. Med *vektorprodukten* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ menas den vektor som är entydigt bestämd av följande tre villkor:

(i) Längden $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ är lika med arean av en parallellogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(ii) Vektorn $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är vinkelrät mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$;

(iii) Ifall vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är icke-parallella så är vektortrippeln $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ en positivt orienterad bas.

Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella, så är den degenererade parallellogrammens area noll, varför villkor (i) ger att $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$. I övriga fall innebär (ii) att vektorn $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ är en normalvektor till det plan som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp. Eftersom vektorns längd är bestämd av (i), bestämmer de båda villkoren (i) och (ii) vektorn $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ entydigt så när som till riktningen, och denna bestäms av villkoret (iii).



Figur 32

Koordinaterna för vektorprodukten ges av följande sats.

Sats 11.6 *Antag att* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *har koordinaterna* (u_1, u_2, u_3) *resp.* (v_1, v_2, v_3) *med avseende på en positivt orienterad ON-bas* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. *Då är*

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3.$$

Formeln ovan är analog med formeln för utveckling av en determinant efter den tredje kolonnen. Vi använder därför som minnesregel följande skrivsätt för vektorprodukten:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \mathbf{e}_1 \\ u_2 & v_2 & \mathbf{e}_2 \\ u_3 & v_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}.$$

Bevis. Om vi visar att vektorn

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3$$

uppfyller villkoren (i), (ii) och (iii) i definitionen av vektorprodukt, så följer det på grund av entydigheten att $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, vilket visar satsen.

Låt A vara arean av den parallellogram som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp. Enligt sats 11.1 är

$$\begin{aligned} A^2 &= |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - 2u_1v_1u_3v_3 - 2u_2v_2u_3v_3 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 = |\mathbf{x}|^2. \end{aligned}$$

Detta visar att $\mathbf{x}$ har rätt längd.

Låt nu $\mathbf{w}$ vara en godtycklig vektor med koordinaterna (w_1, w_2, w_3). Med hjälp av formeln för utveckling av en determinant utefter den tredje kolonnen får vi

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Om nu speciellt $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, så är två kolonner ovanstående 3×3-determinant lika, varför

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$$

Detta visar att vektorn $\mathbf{x}$ är vinkelrät mot vektorn $\mathbf{u}$, och analogt fås att den är vinkelrät mot $\mathbf{v}$. Villkoret (ii) är således också uppfyllt.

Antag slutligen att vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är icke-parallella. Då är $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så genom att i (1) speciellt sätta $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ får vi

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 > 0.$$

Trippeln $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$ är således positivt orienterad relativt basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ och därmed också relativt den givna referensbasen, så vektorn $\mathbf{x}$ uppfyller även det sista villkoret (iii). □

Korollarium 11.7 *Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara tre godtyckliga vektorer. Då är*

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

där determinanten förutsätts beräknad med avseende på någon positivt orienterad ON-bas.

Bevis. Detta är bara en omskrivning av formeln (1) eftersom vi nu vet att $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. □

Genom att utnyttja koordinatframställningen av i sats 11.6 visar man lätt att följande räkneregler gäller för vektorprodukten. Bevisen lämnas som enkel övning.

Sats 11.8 *För godtyckliga vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ och tal α, β gäller*

(i) $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

(ii) $$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

Observera speciellt att vektorprodukten inte är kommutativ.

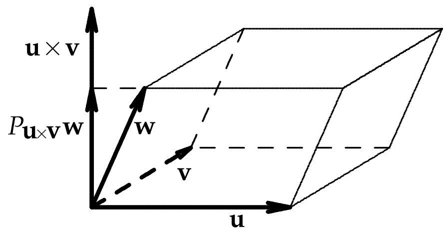
Volym. Tre vektorer som inte ligger i ett plan spänner upp en parallellepiped. Volymen av denna kan uttryckas med hjälp av determinanten på följande sätt.

Sats 11.9 *Volymen av en parallellepiped som spänns upp av vektorerna* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *är lika med* $|\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|$, *där determinanten förutsätts beräknad med avseende på en godtycklig ON-bas.*

Bevis. Låt A vara arean av den parallellogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och låt h vara parallellepipedens höjd. Då är h lika med längden av projektionen av vektorn $\mathbf{w}$ på en normalvektor till basplanet, och en sådan normalvektor är $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Se figur 33. Den projicerade vektorn $P_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\mathbf{w}$ ges av sats 6.6, och vi får därför med hjälp av korollarium 11.7 följande uttryck för volymen V:

$$V = Ah = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|\,\frac{|\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2}\,|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}| = |\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|.$$

(Basens orientering spelar inte någon roll eftersom vi tar absolutbeloppet av $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$.) □



Figur 33
Volymen av en parallellepiped.

ÖVNINGAR

46. En triangel i planet har sina hörn i punkterna $(2,3)$, $(5,1)$ och $(4,-4)$. Bestäm triangelns area.
47. Bestäm orienteringen hos basen $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ relativt basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.
48. Bestäm orienteringen för varje permutation av de tre basvektorerna i referensbasen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.
49. ON-basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ förutsätts vara positivt orienterad. Beräkna $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1$.
50. Med avseende på en positivt orienterad ON-bas har vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ koordinaterna $(2,1,3)$ och $(1,4,2)$. Bestäm koordinaterna för vektorerna $\mathbf{u}\times\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.
51. Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ och $(3,1,2)$.
52. Bestäm volymen av tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,2,1)$, $(2,1,2)$ och $(3,4,6)$
53. Beräkna avståndet från punkten $(2,1,3)$ till linjen $x_1 = 1+t$, $x_2 = 3-t$, $x_3 = 3+2t$.
54. Härled en formel för avståndet från punkten (b_1,b_2,b_3) till linjen $x_1 = a_1+v_1t$, $x_2 = a_2+v_2t$, $x_3 = a_3+v_3t$.

Del 2 Andragradskurvor och andragradsytor

Lösningsmängden till andragradsekvationen

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = c$$

i $\mathbf{R}^n$, där vi förutsätter att den ingående kvadratiska formen inte är identiskt lika med noll, kallas en *andragradsyta* om $n \geq 3$ och en *andragradskurva* om $n = 2$.

I kapitel 12 studerar vi ett antal specialfall av ekvationen i två och tre dimensioner, och i kapitel 13 visar vi sedan att dessa specialfall beskriver samtliga andragradskurvor och samtliga andragradsytor i det tredimensionella rummet. Specialfallen karakteriseras av att de saknar blandade andragradstermer $a_{ij}x_i x_j$, $i \neq j$, och innehåller högst en linjär term x_j.

Kapitel 12 är helt elementärt, men för att förstå kapitel 13 krävs det att man behärskar diagonalisering av kvadratiska former, något som behandlas i grundläggande kurser i linjär algebra.

12 Andragradskurvor och andragradsytor

12.1 Andragradskurvor

Ellipser. Andragradskurvan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1,$$

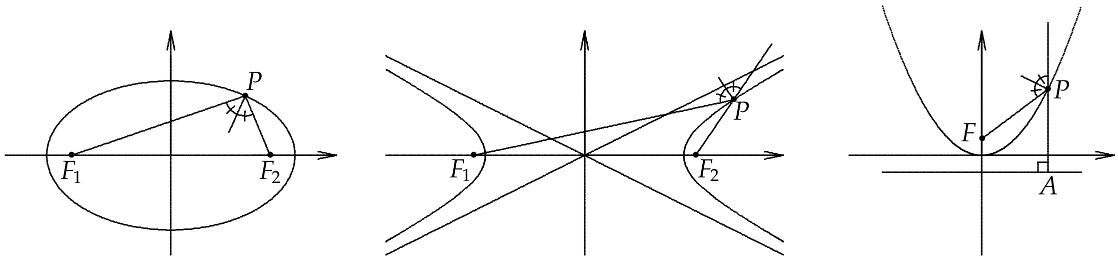
där a_1, $a_2 > 0$, kallas en *ellips*. Kurvan är symmetrisk med avseende på båda koordinataxlarna, som kallas ellipsens *axlar*, och med avseende på origo, som kallas ellipsens *centrum*. Ellipsen skär axlarna i punkterna $(\pm a_1, 0)$ och $(0, \pm a_2)$ och ligger inom rektangeln $|x_1| \leq a_1$, $|x_2| \leq a_2$.

Den längsta av de båda sträckorna mellan $(-a_1, 0)$ och $(a_1, 0)$ på x_1-axeln och mellan $(0, -a_2)$ och $(0, a_2)$ på x_2-axeln kallas ellipsens *storaxel* och den kortaste kallas dess *lillaxel*. Om $a_1 = a_2$ är förstås ellipsen en cirkel med centrum i origo och radie a_1.

I fortsättningen antar vi att $a_2 \leq a_1$ så att ellipsens storaxel alltså ligger utefter x_1-axeln. Sätt $c = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$. Punkterna $F_1 = (-c, 0)$ och $F_2 = (c, 0)$ kallas ellipsens *brännpunkter* eller *foci*. För en godtycklig punkt P på ellipsen är $|PF_1| + |PF_2| = 2a_1$, en egenskap som karakteriserar ellipsen och brukar användas för att definiera den geometriskt. Ellipsen har vidare en viktig optisk egenskap; en ljusstråle som skickas från den ena brännpunkten reflekteras i ellipsen så att att den går genom den andra brännpunkten.

Om P är en godtycklig punkt på ellipsen så är med andra ord normalen till ellipsen i punkten P en bisektris till vinkeln F_1PF_2.

Kvoten a_2/a_1 är ett mått på ellipsens "platthet". Om kvoten är lika med 1 är ellipsen en cirkel och ju mindre kvoten är desto plattare är ellipsen. Storheten $e = c/a_1 = \sqrt{1-(a_2/a_1)^2}$ kallas ellipsens *excentricitet*; den mäter avståndet mellan brännpunkterna relativt storaxelns längd. För excentriciteten gäller $0 \le e < 1$. Cirkeln har förstås excentricitet 0, och ju större excentricitet desto plattare ellips.



Figur 34
Ellipsen, hyperbeln och parabeln karakteriseras geometriskt av respektive villkoren $|PF_1|+|PF_2| = 2a_1$, $|PF_1|-|PF_2| = \pm 2a_1$ *och* $|PF| = |PA|$.

Hyperbler. Andragradskurvan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$$

kallas en *hyperbel*. Hyperbeln är symmetrisk kring de båda koordinataxlarna, som kallas hyperbelns axlar, och kring origo, hyperbelns centrum. x_1-axeln kallas hyperbelns huvudaxel. Hyperbeln skär huvudaxeln i i punkterna $(\pm a_1, 0)$. Genom att skriva ekvationen på formen $x_2^2 = a_2^2(x_1^2/a_1^2 - 1)$, ser vi att hyperbeln består av två sammanhängande delar eller grenar. Den ena grenen ligger i halvplanet $x_1 \ge a_1$ och mellan de båda räta linjerna $x_2 = \pm a_2 x_1/a_1$, som också är asymptoter till hyperbeln. Den andra grenen fås genom spegling av den första i x_2-axeln.

Hyperbeln har geometriska och optiska egenskaper som motsvarar ellipsens. Punkterna $F_1 = (-c, 0)$ och $F_2 = (c, 0)$, där $c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, kallas hyperbelns *brännpunkter* eller *foci*. För en godtycklig punkt P på hyperbeln är $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a_1$, vilket också kan användas för att definiera hyperbeln geometriskt. En ljusstråle som skickas från hyperbelns ena brännpunkt reflekteras av en godtycklig gren så att strålen förefaller komma från den andra brännpunkten. Om P är en godtycklig punkt på hyperbeln så är alltså normalen till hyperbeln i punkten P en yttre bisektris till vinkeln F_1PF_2.

Den synvinkel som en hyperbelgren upptar för en betraktare vars öga befinner sig i origo är lika med vinkeln mellan asymptoterna, och om denna betecknas med ϕ, så är $\tan\phi/2 = a_2/a_1$. Kvoten a_2/a_1 mäter således hyperbelns "platthet", ju mindre kvot desto plattare kurva. Kvoten $e = c/a_1 = \sqrt{1+(a_2/a_1)^2}$ kallas hyperbelns excentricitet.

Parabler. Andragradskurvan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} = x_2$$

kallas en parabel. Den är symmetrisk kring x_2-axeln, parabelns axel, ligger i halvplanet $x_2 \ge 0$ och har sin topp i origo.

Punkten $F = (0, a_1^2/4)$ kallas parabelns brännpunkt och linjen $x_2 = -a_1^2/4$ kallas parabelns *styrlinje*. En godtycklig punkt på parabeln har samma avstånd till brännpunkten som till styrlinjen, en egenskap som definierar parabeln. Även parabeln har en välkänd optisk egenskap: en ljusstråle från brännpunkten reflekteras av parabeln så att den reflekterade strålen blir parallell med parabelns axel.

Degenererade andragradskurvor. De likformiga ellipserna

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = k^2$$

krymper då parametern k går mot 0 ihop till en punkt, och vi får i gränsläget den degenererade andragradskurvan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$$

som representerar punkten $(0, 0)$. För att slippa undantagsfall kommer vi ibland att räkna punkter som degenererade ellipser.

På motsvarande sätt degenererar hyperbler till andragradskurvan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$$

som är de två skärande linjerna ($a_1 x_2 = \pm a_2 x_1$), och som vi ibland kommer att kalla en degenererad hyperbel.

Förutom ovanstående två fall kallar vi även följande andragradskurvor, vars ekvationer bara innehåller en variabel, för degenererade, nämligen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1 \qquad \text{och} \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} = 0.$$

Geometriskt betyder de förstås två parallella linjer ($x_1 = \pm a_1$) resp. två sammanfallande linjer ($x_1 = 0$).

12.2 Andragradsytor

Ellipsoider. Andragradsytan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

kallas en *ellipsoid*. Ellipsoiden är symmetrisk med avseende på de tre koordinatplanen och ligger inom parallellepipeden $-a_i \le x_i \le a_i$. Om ett plan skär ellipsoiden, så är skärningsmängden en ellips; exempelvis skär planen $x_3 = b$ för $|b| < a_3$ ellipsoiden längs de likformiga ellipserna

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 - \frac{b^2}{a_3^2}.$$

Enmantlade hyperboloider. Andragradsytan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

kallas en *enmantlad hyperboloid*. Ytan är uppenbarligen symmetrisk med avseende på de tre koordinatplanen. Ytan kallas enmantlad på grund av att den består av en sammanhängande del. x_3-axeln kallas hyperboloidens *axel*.

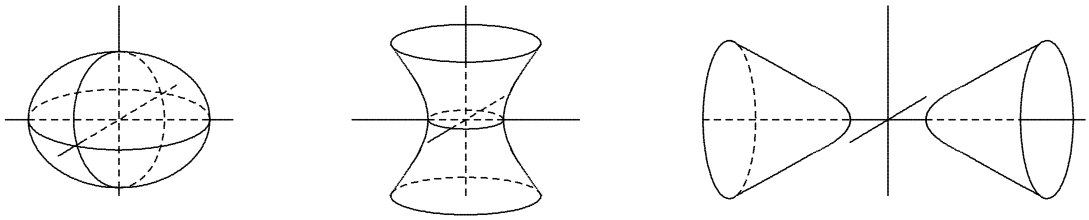
Genom att skriva ekvationen på formen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1+\frac{x_3^2}{a_3^2}$$

ser vi att den enmantlade hyperboloiden är obegränsad och att planen $x_3 = b$ skär ytan utefter likformiga ellipser, som är minst då $b = 0$ och ökar i utsträckning när $|b|$ växer. Plan parallella med x_3-axeln skär hyperboloiden längs hyperbler (som ibland är degenererade). Exempelvis skär planet $x_2 = b$ ytan längs kurvan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1-\frac{b^2}{a_2^2},$$

som är en äkta hyperbel för $b \neq \pm a_2$ och två skärande linjer för $b = \pm a_2$.



Figur 35
Ellipsoid, enmantlad hyperboloid och tvåmantlad hyperboloid.

Tvåmantlade hyperboloider. Andragradsytan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

kallas en *tvåmantlad hyperboloid*. Ytan är symmetrisk med avseende på koordinatplanen och består av två sammanhängande delar, vilket förklarar ordet tvåmantlad. x_1-axeln är hyperboloidens *axel*.

Genom att skriva om ytans ekvation som

$$\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=\frac{x_1^2}{a_1^2}-1$$

ser vi att ingen del av ytan ligger inom bandet $|x_1| < a_1$, och att planen $x_1 = b$ för $|b| > a_1$ skär hyperboloiden utefter likformiga ellipser, som växer då $|b|$ växer. Plan parallella med x_1-axeln skär ytan utefter hyperbler; exempelvis skär koordinatplanet $x_2 = 0$ ytan utefter hyperbeln

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1.$$

Elliptiska paraboloider. Andragradsytan

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=x_3$$

kallas en *elliptisk paraboloid*. Ytan ligger i halvrummet $x_3 \geq 0$ och är symmetrisk med avseende på x_1x_3- och x_2x_3-planen, och därigenom följaktligen också med avseende på x_3-axeln, som kallas paraboloidens axel. Plan som är vinkelräta mot paraboloidaxeln och ligger i halvrummet $x_3 > 0$ skär paraboloiden utefter likformiga ellipser, och plan som är parallella med axeln skär den utefter parabler.

Hyperboliska paraboloider. Andragradsytan

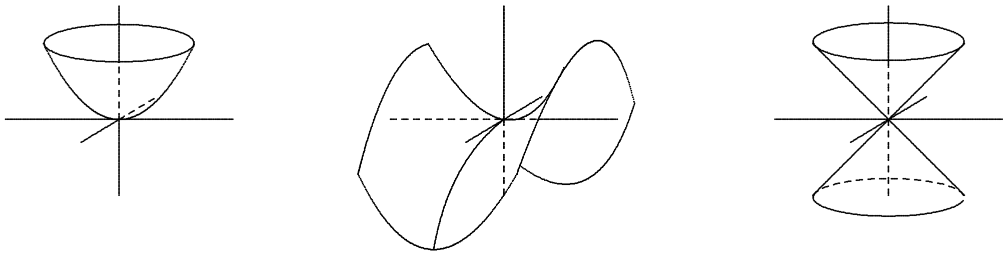
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$$

kallas en *hyperbolisk paraboloid*. Ytan är symmetrisk kring x_1x_3- och x_2x_3-planen och kring x_3-axeln, som kallas paraboloidens axel, men den har till skillnad från den elliptiska paraboloiden oändlig utsträckning i axelns båda riktningar. De mot axeln vinkelräta planen $x_3 = b$ skär paraboloiden utefter hyperbler, som byter huvudaxel då b passerar 0; för $b = 0$ är skärningskurvan två skärande linjer. Plan som är parallella med axeln skär paraboloiden utefter parabler (utom planen $a_2x_1 \pm a_1x_2 = c$, som skär paraboloiden utefter räta linjer).

Punkter. Om vi i ellipsoidens ekvation ersätter a_i med ka_i och låter k gå mot 0 erhåller vi följande homogena andragradsekvation

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0,$$

som förstås bara satisfieras av en punkt, origo, och som vi kan uppfatta som en degenererad ellipsoid.



Figur 36
Elliptisk paraboloid, hyperbolisk paraboloid och elliptisk kon.

Elliptiska koner. Den homogena motsvarigheten till den enmantlade hyperboloidens ekvation är

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

Om denna ekvation satisfieras av punkten $P = (x_1, x_2, x_3)$, så satisfieras den också av punkterna (x_1t, x_2t, x_3t) för varje t. Geometriskt innebär detta att hela linjen genom origo och en utanför origo liggande punkt P på ytan ligger i ytan. En yta med denna egenskap kallas en *kon* med origo som spets, och de i ytan liggande räta linjerna genom origo kallas *generatriser* till konen.

Andragradsytan ovan kallas en *elliptisk kon* eftersom plan vinkelräta mot x_3-axeln, konens axel, skär ytan utefter likformiga ellipser. Vi genererar hela ytan genom att dra alla räta linjer mellan origo och punkterna på ellipsen $a_1^{-2}x_1^2 + a_2^{-2}x_2^2 = 1$ i planet $x_3 = a_3$.

Plan som är parallella med axeln skär ytan utefter hyperbler (två skärande linjer om planet går genom origo). Den elliptiska konen är förstås symmetrisk med avseende på alla koordinatplanen.

Observera att den tvåmantlade hyperboloiden inte ger upphov till någon ny typ av degenererad yta, eftersom

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$$

efter multiplikation med -1 blir en ekvation med två positiva och en negativ term och således svarar mot en elliptisk kon med x_1-axeln som axel.

Cylinderytor. En andragradsekvation i variablerna x_1 och x_2 kan uppfattas dels som en andragradskurva i planet ($\mathbf{R}^2$), dels som en andragradsyta i rummet ($\mathbf{R}^3$). Om punkten (x_1, x_2) satisfierar ekvationen (betraktad som ekvation i två variabler), så satisfierar punkten (x_1, x_2, t) ekvationen (som ekvation i tre variabler) för varje värde på t. Andragradsytan består således av alla mot x_1x_2-planet vinkelräta translationer av motsvarande andragradskurva. Sådana ytor kallas *cylinderytor*.

De tidigare studerade andragradskurvorna ger upphov till följande cylinderytor. Ytorna

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \qquad \text{och} \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} = x_2$$

är cylindrar med en ellips, en hyperbel resp. en parabel som bas. Ytorna

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0, \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0, \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} = 1 \qquad \text{och} \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$$

är en linje (x_3-axeln), två skärande plan ($a_2x_1 \pm a_1x_2 = 0$), två parallella plan ($x_1 = \pm a_1$) resp. ett plan ($x_1 = 0$).

13 Reduktion till kanonisk ekvation

För varje andragradsyta[3] finns det ett ON-koordinatsystem i vilket ytans ekvation saknar blandade andragradstermer av typen x_ix_j $(i \neq j)$ och innehåller högst en linjär term x_j. Vi illustrerar först i ett exempel hur man konstruerar ett sådant koordinatsystem.

Exempel 1. Betrakta andragradsytan

$$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 36x_1 - 12x_2 + 12x_3 = 6$$

i $\mathbf{R}^3$. Till den kvadratiska formen hör den symmetriska matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena 3, 6 och 0, och en motsvarande ON-bas av egenvektorer bestående av vektorerna $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ och $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Det ortonormala koordinatbytet

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

överför den kvadratiska formen på diagonalform

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 0y_3^2.$$

Samtidigt transformeras det linjära uttrycket $36x_1 - 12x_2 + 12x_3$ till

$$36(\tfrac{1}{3}y_1 + \tfrac{2}{3}y_2 + \tfrac{2}{3}y_3) - 12(\tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}y_2 + \tfrac{1}{3}y_3) + 12(\tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{1}{3}y_2 - \tfrac{2}{3}y_3) = 12y_1 + 36y_2 + 12y_3,$$

[3] I det här avsnittet kommer vi att med andragradsyta även att mena en andragradskurva i $\mathbf{R}^2$.

så i det nya koordinatsystemet blir ytans ekvation

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1 + 36y_2 + 12y_3 = 6,$$

eller efter förenkling

$$y_1^2 + 4y_1 + 2y_2^2 + 12y_2 + 4y_3 = 2.$$

Kvadratkomplettering ger

$$(y_1 + 2)^2 + 2(y_2 + 3)^2 = 4(6 - y_3),$$

så koordinatbytet

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 2 \\ z_2 = y_2 + 3 \\ z_3 = -y_3 + 6, \end{cases}$$

som innebär byte av origo och omkastning av den tredje koordinataxeln, leder till ekvationen

$$\frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{2} = z_3,$$

som har den eftersökta formen och som vi känner igen som ekvationen för en elliptisk paraboloid. □

Låt oss säga att en andragradsekvation är *kanonisk* om den har någon av följande tre former

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 1 \qquad \text{(elliptisk/hyperbolisk typ)},$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 0 \qquad \text{(konisk typ)},$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = x_{r+1} \qquad \text{(parabolisk typ)}.$$

I det allmänna fallet har vi följande resultat.

Sats 13.1 *För varje andragradsyta i* $\mathbf{R}^n$ *finns det ett ortonormerat koordinatsystem i vilket ytans ekvation är kanonisk.*

Bevis. Låt ytans ekvation vara

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i = c. \tag{1}$$

Vi skall visa att det finns en koordinattransformation $x = A\xi + b$ med ortogonal matris A, som överför ekvationen till kanonisk form.

Vi startar med ett ortonormalt koordinatbyte $x = By$ som överför den ingående kvadratiska formen

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

till diagonalform

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2,$$

där $\lambda_i \neq 0$ för $1 \leq i \leq r$ och talet r förstås är den kvadratiska formens rang. Den linjära formen $\sum_i b_i x_i$ transformeras därvid till ett nytt linjärt uttryck, $\sum_i \beta_i y_i$ säg. I det nya ortonormerade koordinatsystemet får ekvation (1) därför utseendet

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = c.$$

Eftersom

$$\lambda_i y_i^2 + \beta_i y_i = \lambda_i \left(y_i + \frac{\beta_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \frac{\beta_i^2}{4\lambda_i},$$

kan vi göra oss av med de linjära termerna $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_r y_r$ genom koordinatbytet

$$z_i = \begin{cases} y_i + \dfrac{\beta_i}{2\lambda_i} & \text{för } 1 \leq i \leq r \\ y_i & \text{för övriga } i, \end{cases}$$

som innebär byte av origo medelst en translation. I det nya koordinatsystemet är ytans ekvation

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i z_i = c'. \tag{2}$$

Om $r = n$ eller om $r < n$ och $\beta_{r+1} = \ldots = \beta_n = 0$, innehåller ekvation (2) inte några linjära termer, utan den är

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i^2 = c'.$$

Detta är en kanonisk ekvation av elliptisk/hyperbolisk typ om $c' \neq 0$ eftersom vi kan dividera båda led med c' och sedan döpa om de erhållna koefficienterna λ_i / c' till λ_i, och av konisk typ om $c' = 0$. Sambandet mellan koordinaterna z och x har vidare formen $x = Bx + b$, där matrisen B är ortogonal.

Om $r < n$ och $\beta_i \neq 0$ för något $i > r$, kan ekvation (2) förenklas ytterligare med hjälp av ännu ett ortonormerat koordinatbyte. Vi sätter

$$\begin{aligned} w_i &= z_i \quad \text{för } 1 \leq i \leq r, \\ w_{r+1} &= -\frac{1}{K}(\beta_{r+1} z_{r+1} + \cdots + \beta_n z_n), \end{aligned}$$

där $K = (\beta_{r+1}^2 + \cdots + \beta_n^2)^{1/2}$, och definierar $w_{r+2}, \ldots, w_n$ så att koordinatbytet blir ett byte mellan ON-system. Detta går bra eftersom de $r+1$ första raderna $(1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ och $(0, 0, \ldots, 0, -\beta_{r+1}/K, \ldots, -\beta_n/K)$ i basbytesmatrisen är normerade och parvis ortogonala.

I de nya koordinaterna får (2) formen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i^2 - K w_{r+1} = c'.$$

Translationen

$$\xi_i = \begin{cases} w_i & \text{för } i \neq r+1 \\ w_{r+1} + c'/K & \text{för } i = r+1. \end{cases}$$

eliminerar konstanttermen och leder till ekvationen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_i^2 = K \xi_{r+1}, \tag{3}$$

som efter division med K är kanonisk av parabolisk typ. Sambandet mellan koordinaterna ξ och x har uppenbarligen formen $x = A\xi + b$, där matrisen A är ortogonal. Detta bevisar satsen. □

Om alla koefficienterna λ_i i den kanoniska ekvationen är negativa saknar uppenbarligen den elliptisk/hyperboliska ekvationen lösningar, så motsvarande andragradsyta är tom. I alla övriga fall är ytorna icke-tomma.

Sats 13.1 visar att katalogiseringen i det förra avsnittet av andragradskurvor och andragradsytor i $\mathbf{R}^3$ är fullständig, dvs. att det inte finns några andra typer av kurvor och ytor. Ytor med elliptisk/hyperbolisk, konisk och parabolisk typ är vidare fundamentalt olika. Vidare ger olika värden på r olika ytor, och ytans typ beror slutligen också på antalet positiva koefficienter λ_i i den kanoniska ekvationen.

Vi skall nu allmänt visa att om en ytas ekvation är elliptisk/hyperbolisk i ett (ej nödvändigtvis ortonormerat) koordinatsystem, så är den det i varje koordinatsystem, och att motsvarande gäller för de övriga typerna. Begreppen elliptisk/hyperbolisk, konisk och parabolisk är således koordinatoberoende egenskaper och kan därför tillskrivas själva andragradsytorna.

För den skull definierar vi först två allmänna koordinatoberoende begrepp.

En punkt med koordinaterna $\overline{x}$ kallas ett *centrum* till en icke-tom mängd M i $\mathbf{R}^n$ om $\overline{x} - x$ tillhör M så snart $\overline{x} + x$ tillhör M.

En icke-tom mängd M är *konisk* med avseende på punkten $\overline{x}$ i M om hela linjen $tx + (1-t)\overline{x}$ $(t \in R)$ ligger i M så snart x är en punkt på M.

Sats 13.2

(a) *En (icke-tom) andragradsyta, vars kanoniska ekvation i något koordinatsystem är av elliptisk/hyperbolisk eller konisk typ, har ett centrum.*

(b) *En andragradsyta, vars kanoniska ekvation i något koordinatsystem är av parabolisk typ, saknar centrum.*

Bevis. (a) För en icke-tom andragradsyta med ekvationen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = c$$

är uppenbarligen origo ett centrum. (I själva verket är förstås varje punkt $\overline{x}$ med $\overline{x}_i = 0$ för $1 \leq i \leq r$ ett centrum, och man kan visa att det inte finns några andra centra.)

(b) Antag att $\overline{x}$ är ett centrum till ytan

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = x_{r+1}.$$

Antag vidare att $\overline{x} + x$ är en punkt på ytan, dvs. att

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\overline{x}_i + x_i)^2 = \overline{x}_{r+1} + x_{r+1}. \tag{4}$$

Enligt definitionen på centrum ligger då också punkten $\overline{x} - x$ på ytan, varför

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\overline{x}_i - x_i)^2 = \overline{x}_{r+1} - x_{r+1}. \tag{5}$$

Addition av (4) och (5) ger

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{x}_i^2 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = \overline{x}_{r+1}.$$

Men detta innebär att $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$ är konstant för alla x sådana att $\overline{x} + x$ ligger på ytan. Detta är uppenbarligen orimligt eftersom vi kan tilldela variablerna $x_1, x_2, \ldots, x_r$ vilka värden som helst (och sedan bestämma x_{r+1} så att punkten satisfierar ekvationen). Ytan kan således inte ha något centrum. □

Sats 13.3

(a) *En andragradsyta, vars kanoniska ekvation i något koordinatsytem är av konisk typ, är en konisk mängd.*

(b) *En andragradsyta, vars kanoniska ekvation i något koordinatsystem är av elliptisk/hyperbolisk eller parabolisk typ, är ej en konisk mängd.*

Bevis. (a) Ytan

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 0$$

är uppenbarligen konisk med avseende på origo.

(b) Antag att ytan

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 1$$

är konisk med avseende på punkten $\overline{x}$ på ytan och låt x vara en godtycklig punkt på ytan. Då ligger speciellt punkten $\frac{1}{2}\overline{x} + \frac{1}{2}x$ på ytan, vilket innebär att

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\frac{\overline{x}_i + x_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{x}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{x}_i x_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{x}_i x_i + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

varav följer att

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{x}_i x_i = 1$$

för alla punkter x på ytan. Detta är uppenbarligen orimligt, ty punkten $-x$ ligger också på ytan och summan ovan byter tecken då x byts mot $-x$. Ytan kan således inte vara konisk.

Helt analogt leder antagandet att ytan

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = x_{r+1}$$

är konisk med avseende på punkten $\overline{x}$ till slutsatsen att

$$2 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{x}_i x_i = \overline{x}_{r+1} + x_{r+1}$$

för alla punkter x på ytan. Genom att välja $x = 0$ får vi först $\overline{x}_{r+1} = 0$ och genom att sedan välja två punkter x och x' på ytan med $x'_i = -x_i$ för $1 \leq i \leq r$ och $x'_{r+1} = x_{r+1} \neq 0$ får vi motsägelsen $x'_{r+1} = -x_{r+1}$. Därmed är satsen bevisad. □

Vi får nu följande sats som korollarium.

Sats 13.4 *Huruvida en andragradsytas kanoniska ekvation är elliptisk/hyperbolisk, konisk eller parabolisk beror enbart på ytan och inte av valet av koordinatsystem.*

Bevis. Om ytan har ett centrum och inte är konisk, så är den kanoniska ekvationen på grund av satserna 13.2 och 13.3 elliptisk/hyprbolisk i varje koordinatsystem, om ytan har ett centrum och är konisk, så är den kanoniska ekvationen konisk, och om slutligen ytan saknar centrum så är den kanoniska ekvationen alltid parabolisk. □

Vi har slutligen följande entydighetssats.

Sats 13.5

(a) *I en kanonisk ekvation för en elliptisk/hyperbolisk andragradsyta är antalet positiva koefficienter och antalet negativa koefficienter λ_i entydigt bestämda av ytan.*

(b) *I två kanoniska ekvationer för en konisk eller parabolisk andragradsyta är antingen antalet positiva koefficienter lika liksom antalet negativa koefficienter, eller också är antalet positiva koefficienter i den ena ekvationen lika med antalet negativa i den andra och vice versa.*

Bevis. Antalet nollskilda koefficienter är lika med den kvadratiska formens rang, vilken är invariant under koordinatbyten. Enligt tröghetssatsen är vidare antalet positiva koefficienter i en diagonalframställnng av en kvadratisk form invariant, men eftersom andragradsytans ekvation kan behöva multipliceras med -1 för att få kanonisk form visar detta bara att i två kanoniska ekvationer är antingen antalet positiva koefficienter lika, eller också är antalet positiva koefficienter i den ena ekvationen lika med antalet negativa i den andra. Detta är också allt som kan sägas i det koniska fallet, eftersom multiplikation med -1 överför en kanonisk ekvation i en ny kanonisk ekvation, och i det paraboliska fallet, eftersom en kanonisk ekvation efter multiplikation med -1 och byte av riktning på x_{r+1}-axeln blir en ny kanonisk ekvation.

För elliptisk/hyperboliska ytor är dock antalet positiva koefficienter entydigt bestämt. Detta följer av följande lemma, som karakteriserar antalet positiva koefficienter med hjälp av dimensionen hos det största delrum som inte skär ytan.

Lemma 13.6 *Låt Y vara en elliptisk/hyperbolisk andragradsyta i $\mathbf{R}^n$ med centrum i origo och vars kanoniska ekvation i något koordinatsystem är*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_i^2 = 1,$$

där koefficienterna λ_i är positiva för $1 \le i \le m$ och negativa för $m+1 \le i \le r$. Talet m är då entydigt bestämt av följande två villkor:

(i) *Det finns ett $(n-m)$-dimensionellt delrum W_0 av $\mathbf{R}^n$ som inte skär ytan Y.*

(ii) *Varje $(n-m+1)$-dimensionellt delrum W skär ytan Y.*

Bevis. Låt W_0 vara det $(n-m)$-dimensionella delrummet $\xi_1 = \dots = \xi_m = 0$. För varje punkt i W_0 är $\sum_{i=1}^r \lambda_i \xi_i^2 = \sum_{i=m+1}^r \lambda_i \xi_i^2 \le 0$, så W_0 har ingen punkt gemensam med andragradsytan Y.

För att visa (ii) låter vi W_1 vara det m-dimensionella delrummet av alla punkter med $\xi_{m+1} = \xi_{m+2} = \dots = \xi_n = 0$. Om W är ett godtyckligt $(n-m+1)$-dimensionellt delrum, så är $W \cap W_1 \ne \{0\}$, ty i motsatt fall vore summan $W_1 + W$ direkt och vi skulle ha $\dim(W_1 + W) = n+1$, vilket är omöjligt för ett delrum av $\mathbf{R}^n$. Delrummet W innehåller alltså en punkt vars koordinater uppfyller $\xi_i \ne 0$ för något $1 \le i \le m$ och $\xi_i = 0$ för alla $i \ge m+1$. Sätt $s = \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi_i^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i^2$; då är $s > 0$ och punkten med koordinaterna $(s^{-1/2}\xi_1, s^{-1/2}\xi_2, \dots, s^{-1/2}\xi_n)$ ligger både i W och på ytan Y. □

Exempel 2. Som en illustration till lemmat betraktar vi de elliptisk/hyperboliska andragradsytorna i $\mathbf{R}^3$. Varje linje genom origo skär ellipsoiden medan centrum $\{0\}$ inte skär ellipsoiden, så därför är $m = 3$ för ellipsoiden. Den enmantlade hyperboloiden skärs inte av exempelvis hyperboloidens axel, medan däremot varje plan genom origo skär hyperboloiden. Detta innebär att $m = 2$. För den tvåmantlade hyperboloiden kan vi hitta plan genom origo som inte skär den, exempelvis planet som är vinkelrätt mot hyperboloidens axel, så därför är $m = 1$ för den tvåmantlade hyperboloiden. Läsaren kan också lätt kontrollera att lemmat stämmer för de elliptisk/hyperboliska cylinderytorna i $\mathbf{R}^3$. □

EXEMPEL 3. Vi skall bestämma typen av ytan

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2^2 - x_3^2 + 4x_2 + 8x_3 = c$$

för olika värden på parametern c.

För att transformera den kvadratiska formen till diagonal form gör vi först en kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2^2 - x_3^2 &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2. \end{aligned}$$

Koordinattransformationen

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y_2 = \phantom{x_1 + {}} 2x_2 + x_3 \\ y_3 = \phantom{x_1 + 2x_2 + {}} x_3 \end{cases}$$

som förstås resulterar i ett icke ortonormerat koordinatsystem, överför den kvadratiska formen till $y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2$, och eftersom $4x_2 + 8x_3 = 2(2x_2 + x_3) + 6x_3 = 2y_2 + 6y_3$ transformeras ytans ekvation till

$$y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2 + 2y_2 + 6y_3 = c,$$

vilket efter kvadratkomplettering kan skrivas

$$y_1^2 + (y_2 + 1)^2 - 3(y_3 - 1)^2 = c - 2.$$

Transformationen

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \phantom{{}+1} = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ z_2 = y_2 + 1 = \phantom{x_1 + {}} 2x_2 + x_3 + 1 \\ z_3 = y_3 - 1 = \phantom{x_1 + 2x_2 + {}} x_3 - 1 \end{cases}$$

ger oss således den kanoniska ekvationen

$$z_1^2 + z_2^2 - 3z_3^2 = c - 2.$$

Ytan är en enmantlad hyperboloid för $c > 2$, en elliptisk kon för $c = 2$ och en tvåmantlad hyperboloid för $c < 2$. Ytans centrum ligger i punkten med z-koordinaterna $(0, 0, 0)$, dvs. i punkten med x-koordinaterna $(3, -1, 1)$. □

ÖVNINGAR

55. Bestäm typen av följande ytor i $\mathbf{R}^3$, deras axlar och eventuella centrum:
    a) $8x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0$
    b) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 = 0$
    c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$
    d) $x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$
    e) $x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 = 3$
    f) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1 - 6x_2 - 8x_3 = -21$
    g) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 1$
    h) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3 = 0$
56. Bestäm ekvationen för den andragradsyta i $\mathbf{R}^3$ som utgörs av
    a) planen $x_1 + x_2 = 0$ och $x_1 - x_3 = 0$;
    b) linjen $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$.

Facit

3. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = -\frac{4}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$
4. $\overrightarrow{AB}\colon (-1,1)$, $\overrightarrow{BC}\colon (-1,-2)$, $\overrightarrow{CA}\colon (2,-1)$
5. $\mathbf{a}\colon \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $\mathbf{b}\colon \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\colon \left(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right)$
6. a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
7. $(2,7,7)$
8. $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,-1,1)$, $(1,-1,1)$, $(0,0,1)$, $(-1,0,1)$
9. Om hörnen har koordinaterna (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3) och (d_1,d_2,d_3), så har tyngdpunkten koordinaterna $\left(\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{4}, \frac{a_2+b_2+c_2+d_2}{4}, \frac{a_3+b_3+c_3+d_3}{4}\right)$.
10. T. ex. $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = 2 - t$, $x_3 = 1 + 2t$
11. T. ex. $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = -t$, $x_3 = -2 + 4t$
12. $(1,3,-1)$
13. Linjerna skär ej varandra.
14. För $a = 1$ skär linjerna varandra i punkten $(0,3,2)$.
15. $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
16. $a = 0$
17. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
18. Linjen $x_1 = -3 - t$, $x_2 = -t$, $x_3 = t$.
19. $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9 = 0$
20. $(5,-2,-11)$
21. $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$
22. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{3}$. Vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{v}$ är 90°.
23. Vinkeln är $\arccos 1/\sqrt{3} \approx 54.7^\circ$.
26. b) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
27. T. ex. vektorerna (med koordinaterna) $(1,1,0)$ och $(-1,1,2)$.
28. T. ex. vektorerna $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$ och $\frac{1}{\sqrt{70}}(3,6,-5)$.
29. 2
30. 3
31. $x_1 = \frac{1}{7} + 9t$, $x_2 = \frac{11}{7} - 6t$, $x_3 = \frac{9}{7} + 4t$
32. T. ex. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$, $\frac{1}{\sqrt{45}}(-4,2,5)$, $\frac{1}{3}(2,-1,2)$
33. $2x_1' - 9x_2' - 7x_3' + 4 = 0$

35. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

36. Plan: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, matris: $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, spegelpunkt: $(2, 1, 3)$

37. $-30°$

38. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

39. a) 5 b) 0 c) -18 d) $(b-a)(c-a)(c-b)$

40. a) $x = 1/5$ b) $x = 2$ eller $x = 3$

41. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

42. $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

43. För alla $a \in \mathbf{R}$

46. $17/2$

47. Negativt orienterad

49. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

50. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-10, -1, 7)$

51. $3\sqrt{3}/2$

52. 3

53. $\sqrt{14}/2$

54. $\dfrac{|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$

55. a) Linjen $x_1 = t$, $x_2 = x_3 = 2t$.
 b) Ellipsoid med centrum i $(-2, -1, 1)$ och axelriktningar $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 1 + \sqrt{3})$ och $(1, 1, 1 - \sqrt{3})$.
 c) Elliptisk (cirkulär) kon med centrum i $(0, 0, 0)$ och axelriktning $(1, 1, 1)$
 d) Hyperbolisk paraboloid med vertex i $\left(-\frac{11}{18}, \frac{11}{9}, \frac{2}{9}\right)$ och axelriktning $(1, -2, -2)$.
 e) Hyperbolisk cylinder med axeln $x_1 = t$, $x_2 = x_3 = -2t$.
 f) Punkten $(-2, 3, 2)$.
 g) Elliptisk cylinder med axeln $x_1 = x_2 = t$, $x_3 = -t$.
 h) Elliptisk paraboloid med vertex i $\left(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$ och axelriktning $(1, 1, -1)$.

56. a) $x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0$ b) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = 0$