

Dugga 2017–02–13

Skrivtid: 08.00 – 10.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

1. Delrummet M av $\mathbb{R}[x]_3$ spänns upp av polynom

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2 + 2x - 1x^2 + 1x^3, \\f_2(x) &= 1 - x + 2x^2 + 2x^3, \\f_3(x) &= 3 + x + x^2 + 3x^3, \\f_4(x) &= -1 - 3x + 3x^2 + x^3, \\f_5(x) &= 1 + 3x + 2x^2 + x^3.\end{aligned}$$

(i) Finn en bas i M bland dessa polynom.

(ii) Avgör om polynomet $g(x) = 10 + 6x + 10x^2 + 12x^3$ tillhör M och om så är fallet, bestäm g 's koordinater i den bas som du valt i delen (i) av uppgiften.

(6 poäng)

2.

(i) Definiera det linjära höljet av vektorerna $v_1, \dots, v_k$ i ett linjärt rum.

(ii) Visa att vektorn $v = (1, 2, 3, 4)$ tillhör det linjära höljet av vektorerna $w_1 = (2, 1, 1, 1)$, $w_2 = (3, 3, 4, 5)$ och $w_3 = (5, 4, 5, 6)$.

(iii) Avgör vilka vektorer från $\mathbb{R}^3$ som tillhör det linjära höljet av vektorerna $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ och $e_3 = (0, 0, 1)$.

(4 poäng)

3. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definieras genom

$$\begin{aligned}F(1, 1, 1) &= (1, 1, 1, 1), \\F(0, 1, 1) &= (2, 2, 2, 2), \\F(0, 0, 1) &= (1, 2, 1, 2).\end{aligned}$$

(i) Bestäm $F(1, 2, 3)$.

(ii) Finn någon noll-skild vektor $v \in \mathbb{R}^3$ sådan att $F(v) = (0, 0, 0, 0)$.

(iii) Bestäm F 's matris i standardbasen.

(3 poäng)

4. Låt $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt representerar projektion på planet $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ längs vektorn $(1, 0, 0)$. Bestäm G 's matris i standardbasen.

(7 poäng)

LYCKA TILL!

Lösning till 1. Vi betraktar standardbasen $1, x, x^2, x^3$ i $\mathbb{R}[x]_3$. Vi har

$$[f_1(x)]_{std} = (2, 2, -1, 1), \quad [f_2(x)]_{std} = (1, -1, 2, 2), \quad [f_3(x)]_{std} = (3, 1, 1, 3),$$

$$[f_4(x)]_{std} = (-1, -3, 3, 1), \quad [f_5(x)]_{std} = (1, 3, 2, 1), \quad [g(x)]_{std} = (10, 6, 10, 12).$$

För att lösa problemet ska vi lösa det linjära ekvationssystem som har följande totalmatis:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & | & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 3 & | & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 2 & | & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{4} \\ \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 2 & | & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 3 & | & 6 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{2} + \boxed{1} \\ \boxed{3} - 2\boxed{1} \\ \boxed{4} - 2\boxed{1} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 3 & | & 22 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 1 & | & -18 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1 & | & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{2} + \boxed{4} \\ \boxed{3} + 5\boxed{2} \\ \boxed{4} + 3\boxed{2} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 1 & | & -18 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1 & | & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{1} - 2\boxed{2} \\ \boxed{3} + 5\boxed{2} \\ \boxed{4} + 3\boxed{2} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & | & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & | & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{11} \cdot \boxed{3} \\ \frac{1}{5} \cdot \boxed{4} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & | & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \boxed{1} + 3\boxed{3} \\ \boxed{2} - 2\boxed{3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Det följer att f_1, f_2 och f_5 utgör en bas i M och g 's koordinater i denna bas är $(2, 4, 2)$.

Lösning till 2. Låt V vara ett linjärt rum och $v_1, \dots, v_k \in V$. Det linjära höljet $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ består av alla vektorer som kan skrivas på formen $\lambda v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$, där $\lambda_i \in \mathbb{R}$ för alla i .

Vektorn v tillhör det linjära höljet av w_1, w_2, w_3 eftersom $v = w_2 - w_1$.

Eftersom vektorerna e_1, e_2, e_3 utgör en bas i $\mathbb{R}^3$ (standardbasen) är det linjära höljet av e_1, e_2, e_3 lika med $\mathbb{R}^3$.

Lösning till 3. Eftersom $(1, 2, 3) = (1, 1, 1) + (0, 1, 1) + (0, 0, 1)$, har vi

$$F(1, 2, 3) = F(1, 1, 1) + F(0, 1, 1) + F(0, 0, 1) = (1, 1, 1, 1) + (2, 2, 2, 2) + (1, 2, 1, 2) = (4, 5, 4, 5).$$

Eftersom $(2, 2, 2, 2) = 2 \cdot (1, 1, 1, 1)$, har vi

$$F(2 \cdot (1, 1, 1) - (0, 1, 1)) = 2 \cdot (1, 1, 1, 1) - (2, 2, 2, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Detta innebär att $F(2, 1, 1) = 0$.

Vi har

$$F(1, 0, 0) = F((1, 1, 1) - (0, 1, 1)) = (1, 1, 1, 1) - (2, 2, 2, 2) = (-1, -1, -1, -1);$$

$$F(0, 1, 0) = F((0, 1, 1) - (0, 0, 1)) = (2, 2, 2, 2) - (1, 2, 1, 2) = (1, 0, 1, 0).$$

Detta innebär att F 's matris i standardbasen är

$$[F] = ([F(1, 0, 0)], [F(0, 1, 0)], [F(0, 0, 1)]) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösning till 4. Låt $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$. Vi har $G(v_3) = 0$ per definition. Vektorerna v_1 och v_2 ligger i planet och därför $G(v_1) = v_1$ och $G(v_2) = v_2$. Eftersom v_1 och v_2 inte är proportionella och v_3 inte ligger i planet, utgör $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en bas i $\mathbb{R}^3$. I denna bas har vi:

$$[G]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformationsmatrisen från standardbasen till $\mathbf{v}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu ska vi bestämma inversen till T :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\boxed{3} - \boxed{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\begin{array}{l} \boxed{2} + 2\boxed{2} \\ \boxed{1} - 2\boxed{2} \end{array}} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{-\boxed{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\boxed{1} - \boxed{3}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vi får:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nu kan vi bestämma G 's matris i standardbasen:

$$\begin{aligned} [G]_{std} = T[G]_{\mathbf{v}}T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$