Topologi och konvergens

för vissa kurser vid Uppsala universitet

Sammanställt av
Anders Vretblad

1997 års upplaga, översedd 2008

Innehåll

Kapitel 1

Topologiska grundbegrepp

1.1 Öppna och slutna mängder

Här inför vi några begrepp, som i och för sig brukar finnas definierade i läroböcker i elementär analys. För överblickens skull kan det dock vara lämpligt att samla alltihopa på ett ställe, och vi går dessutom lite mer in i detaljer än man brukar göra vid de allra första analysstudierna.

Vi kommer att arbeta i det n-dimensionella euklidiska rummet $\mathbf{R}^n$. Detta är ett rum där elementen, punkterna, kan beskrivas som n-tupler av reella tal:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ibland kan det hända att man identifierar en punkt med den vektor, *ortsvektorn*, som pekar på punkten, utgående från origo, som är punkten $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. (Vi kommer dock inte att ha särskilt mycket att göra med vektoroperationerna i det linjära rummet $\mathbf{R}^n$.) Som ett specialfall för $n = 1$ kommer vi att studera den reella axeln.

Avståndet mellan två punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ definieras som vanligt genom

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Speciellt betyder $|\mathbf{x}|$ avståndet mellan $\mathbf{x}$ och origo. För detta avståndsbegrepp gäller olikheterna

$$\big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big| \le |\mathbf{x} \pm \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

(triangelolikheterna), som bevisas i linjära algebran.

Avståndet är nära förbundet med begreppet skalärprodukt (eller inre produkt). Standard-skalärprodukten $\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle$ av två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ definieras av

$$\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\,.$$

Då gäller $|x| = \sqrt{\langle \mathbf{x},\, \mathbf{x} \rangle}$. Man har också Cauchy-Schwarz' olikhet:

$$|\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|.$$

Det vanliga avståndsbegreppet kan ibland vara räknemässigt besvärligt att arbeta med. Det finns alternativa sätt att mäta avstånd, som i viss mening är ekvivalenta med det vanliga. Antag att $\mathbf{x}$ som vanligt har koordinatbeskrivningen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, och inför *normerna* $\|\mathbf{x}\|_1$ och $\|\mathbf{x}\|_\infty$ genom

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1 \le k \le n} |x_k| = \text{det största av talen } |x_k|. \end{aligned}$$

Då gäller följande resultat, som innebär att om man vill säga att två punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ ligger "nära" varandra, kan man i princip använda vilket som helst av avståndsmåtten $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1$ och $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty$ utan att det gör någon väsentlig skillnad.

Lemma 1.1

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\|\mathbf{x}\|_1 \le |\mathbf{x}| \le \|\mathbf{x}\|_1, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty \le |\mathbf{x}| \le \sqrt{n}\cdot\|\mathbf{x}\|_\infty\,.$$

Bevis. För den första olikheten inför vi vektorn $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\dots,s_n)$, där $s_k = \operatorname{sgn} x_k$, dvs. koordinaten s_k är sådan att $s_k x_k = |x_k|$. Då är $|\mathbf{s}|\le\sqrt{n}$, och Cauchy–Schwarz' olikhet ger

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_k |x_k| = \langle\mathbf{x},\,\mathbf{s}\rangle \le |\mathbf{x}||\mathbf{s}| \le \sqrt{n}\cdot|\mathbf{x}|.$$

Division med $\sqrt{n}$ ger olikheten. Den andra följer så:

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 \le \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{1\le j<k\le n} |x_j x_k| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2.$$

Olikheterna för $\|\mathbf{x}\|_\infty$ är lättare att bevisa och lämnas som övning (1.9). $\square$

Normen $\|\cdot\|_1$ är ett fall av en mer allmän normdefinition, nämligen p-normen

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Med denna beteckning är den vanliga euklidiska normen $|\mathbf{x}| = \|\mathbf{x}\|_2$. Beteckningen $\|\mathbf{x}\|_\infty$ förklaras i övning 1.10. $\square$

En *omgivning* av en punkt $\mathbf{a}$ består av alla punkter som ligger inom ett visst avstånd från $\mathbf{a}$. Mer precist, om δ är ett positivt tal, så är mängden

$$N(\mathbf{a},\delta) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta\}$$

en omgivning till $\mathbf{a}$; närmare bestämt är $N(\mathbf{a},\delta)$ en δ-omgivning till $\mathbf{a}$. Beroende på rummets dimension n får detta olika innebörd:

$n=1$: Här är $N(a,\delta)$ det öppna intervallet $]a-\delta, a+\delta[$, symmetriskt beläget kring a.

$n=2$: $N(\mathbf{a},\delta)$ är nu en cirkelskiva med centrum i $\mathbf{a}$ och radie δ, exklusive periferin.

$n=3$: Här får vi ett klot med medelpunkt i $\mathbf{a}$ och radie δ, exklusive den sfäriska ytan.

Ibland har man användning för begreppet *punkterad omgivning:* den punkterade omgivningen $N^\bullet(\mathbf{a},\delta)$ är detsamma som $N(\mathbf{a},\delta)\setminus\{\mathbf{a}\}$, dvs. man avlägsnar medelpunkten från omgivningen.

Låt nu M vara en punktmängd i $\mathbf{R}^n$ och $\mathbf{a}$ en punkt (som kan tillhöra M eller ej). Vi inför terminologi för att beskriva hur $\mathbf{a}$ ligger i förhållande till M:

a sägs vara en *inre punkt* till M, om det finns en omgivning till **a** som helt ligger i M;

a är en *yttre punkt* till M, om det finns en omgivning till **a** som ligger helt utanför M;

a är en *randpunkt* till M, om **a** är varken inre eller yttre punkt; detta betyder att *varje omgivning till* **a** *innehåller såväl punkter som tillhör M som punkter som inte tillhör M.*

Mängden av inre punkter kallas *det inre* av M och betecknas ibland med M°. Det är klart att en inre punkt i M måste tillhöra M, så man har säkert $M^\circ \subseteq M$. Mängden av randpunkter till M kallas *randen* till M och tecknas ∂M. En randpunkt kan tillhöra mängden själv men behöver inte göra det. (En yttre punkt tillhör aldrig mängden.)

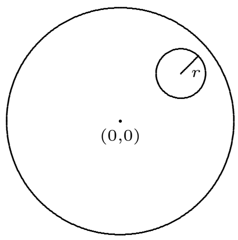
Definition 1.2 *Mängden M kallas* öppen, *om $M^\circ = M$, dvs. om M endast består av inre punkter. M sägs vara* sluten, *om dess komplement är en öppen mängd.*

Ekvivalent kan man säga att M är öppen om inga randpunkter tillhör M, sluten om alla randpunkter tillhör M. (Detta stämmer överens med språkbruket för intervall på $\mathbf{R}$.)

Exempel. Hela rummet $\mathbf{R}^n$ är ju en öppen mängd, eftersom alla punkter uppenbart är inre punkter. Denna mängd saknar alltså randpunkter, dvs. $\partial\mathbf{R}^n = \emptyset =$ den tomma mängden. Alltså gäller $\partial\mathbf{R}^n \subseteq \mathbf{R}^n$, så att $\mathbf{R}^n$ även är sluten. Den tomma mängden är komplementet till hela $\mathbf{R}^n$, och därför är även den både öppen och sluten. (Dessa båda delmängder av $\mathbf{R}^n$ är de enda som är både öppna och slutna.)

Exempel. Låt M vara delmängden $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$ av $\mathbf{R}^2$. Antag att $(a,b) \in M$. Det betyder att $a^2+b^2 < 1$, så att talet $r = 1 - \sqrt{a^2+b^2}$ är positivt. Låt $N = N\big((a,b), r\big)$ vara r-omgivningen av (a,b). Att $(x,y) \in N$ betyder alltså att $|(x,y)-(a,b)| < r$. Då gäller (se figur, där den lilla cirkeln har centrum i (a,b))

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= |(x,y)-(0,0)| = |(x,y)-(a,b)+(a,b)-(0.0)| \\ &\le |(x,y)-(a,b)| + |(a,b)-(0,0)| < r + (1-r) = 1.\end{aligned}$$



Detta bevisar att $(x,y) \in M$. Vi har därmed visat att omgivningen N helt ligger i M, och detta betyder att (a,b) är en inre punkt i M. Alla punkter i M är inre punkter, ingen punkt i M är randpunkt, M är en öppen mängd. Man brukar tala om M som *den öppna enhetsskivan.*

Exempel. Mängden M i föregående exempel är ju inget annat än den speciella omgivningen $N((0,0),1)$ av origo i $\mathbf{R}^2$. På precis samma sätt kan man visa att en godtycklig omgivning $N(\mathbf{a}, \delta)$ av en punkt $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ är öppen.

Exempel. Låt nu M vara mängden $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ i $\mathbf{R}^3$. Ytligt betraktat ser denna mängd likadan ut som mängden i förra exemplet. Men eftersom den nu betraktas som delmängd av det tredimensionella rummet kommer dess egenskaper att vara annorlunda. Den saknar inre punkter: ty en omgivning i $\mathbf{R}^3$ är ett öppet klot, och inga öppna klot kan få plats i mängden M, eftersom den är alldeles "platt". Mängden består alltså av idel randpunkter, och är därmed inte öppen. Men den är inte heller sluten, eftersom punkterna $(x, y, 0)$ med $x^2 + y^2 = 1$ också är randpunkter till M.

Om M är en punktmängd, låter vi symbolen $\overline{M}$ beteckna det *slutna höljet* av M. Detta består av M tillsammans med alla randpunkter:

$$\overline{M} = M \cup \partial M.$$

Lemma 1.3 *$\overline{M}$ är en sluten mängd.*

Bevis. Låt $\mathbf{a}$ vara en punkt som *inte* tillhör $\overline{M}$. Det betyder att $\mathbf{a}$ är yttre punkt till M, och alltså har $\mathbf{a}$ en omgivning $N = N(\mathbf{a}, \delta)$ som ligger utanför M. Eftersom denna omgivning är en öppen mängd, har varje $\mathbf{x} \in N$ en egen omgivning $N_1 = N(\mathbf{x}, \delta_1)$ som ligger helt i N och alltså helt utanför M. Alla punkter i N är alltså yttre punkter till M, dvsde tillhör komplementet till $\overline{M}$. Detta komplement är alltså öppet, och därmed är $\overline{M}$ själv sluten. □

Det är praktiskt att införa namnet *höljepunkt* som gemensam beteckning för inre punkt och randpunkt.

Lemma 1.4 *En mängd M är sluten om och endast om $M = \overline{M}$.*

Bevis. M sluten $\Leftrightarrow \partial M \subseteq M \Leftrightarrow M = M \cup \partial M = \overline{M}$. □

För unioner och skärningar gäller följande resultat. En *indexmängd* I kan bestå av ändligt eller oändligt många element. Vanliga exempel är $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I = \mathbf{Z}_+$, men även exempelvis $I = \mathbf{R}$ är en möjlig indexmängd. Om M_ι är mängder för alla $\iota \in I$ definieras unionen $\bigcup_{\iota \in I} M_\iota$ och skärningen $\bigcap_{\iota \in I} M_\iota$ genom formlerna

$$\bigcup_{\iota \in I} M_\iota = \{x \mid x \in M_\iota \text{ för något } \iota \in I\}, \quad \bigcap_{\iota \in I} M_\iota = \{x \mid x \in M_\iota \text{ för alla } \iota \in I\}.$$

Om indexmängden är ändlig eller består av exempelvis $\mathbf{Z}_+$ kan man skriva sådant som

$$\bigcup_{k=1}^{n} M_k \quad \text{och} \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j.$$

Sats 1.5 (a) *Antag att O_ι är öppna mängder för alla $\iota \in I$. Då är unionen $U = \bigcup_{\iota \in I} O_\iota$ också öppen.*
(b) *Antag att $O_1, O_2, \ldots, O_m$ är ändligt många öppna mängder. Då är skärningen $S = \bigcap_{k=1}^{m} O_k$ också öppen.*

Bevis. (a) Antag $\mathbf{a} \in U$. Det betyder att det finns ett $\iota \in I$ sådant att $\mathbf{a} \in O_\iota$. Efterstom O_ι är öppen, har $\mathbf{a}$ en omgivning $N \subseteq O_\iota$, och denna omgivning tillhör också unionen U, vilket bevisar påståendet.

(b) Antag $\mathbf{a} \in S$. Då gäller $\mathbf{a} \in O_k$ för alla k. Eftersom O_k är öppen, finns en omgivning $N_k = N(\mathbf{a}, \delta_k)$ till $\mathbf{a}$ i O_k. Sätt $\delta =$ det minsta av talen δ_k och $N = N(\mathbf{a}, \delta)$ (observera att $\delta > 0$). Då gäller $N \subseteq N_k$ för alla k, vilket betyder att N ligger i S, och saken är klar. □

Övningar

1.1 Bestäm inre punkter och randpunkter till följande mängder. Vilka av mängderna är öppna eller slutna?

a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ b) $\mathbf{Q}$ = de rationella talen på $\mathbf{R}$
c) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1\}$ d) $\{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$
e) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1,\ y = 0\}$ f) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy > 1\}$

1.2 Bestäm A° och $\overline{A}$ då
$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1,\ x, y \text{ rationella}\}$.

1.3 Bevisa att $\emptyset$ och hela $\mathbf{R}^n$ är den enda delmängder av $\mathbf{R}^n$ som är både öppna och slutna.

1.4 a) Gäller $\partial M = \partial(\overline{M})$? Bevis eller motexempel!
b) Om $A \subseteq B$, gäller då $A^\circ \subseteq B^\circ$?

1.5 Ge ett exempel på att skärningen av oändligt många öppna mängder inte behöver vara öppen. (Det går att finna exempel där mängderna är intervall på $\mathbf{R}$.)

1.6 Visa följande sats för slutna mängder, som kan uppfattas som "komplementär" till sats 1.5: Unionen av ändligt många slutna mängder är sluten; och en godtycklig skärning av (ändligt eller oändligt många) slutna mängder är sluten.

1.7 Ge exempel (med intervall på $\mathbf{R}$) på att unionen av oändligt många slutna mängder inte behöver vara sluten.

1.8 Bevisa eller ge motexempel till följande relationer:

a) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ b) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
c) $\partial A = \partial(A^\circ)$ d) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

1.9 Bevisa olikheterna $\|\mathbf{x}\|_\infty \le |\mathbf{x}| \le \sqrt{n} \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty$ (lemma 1.1).

1.10 Bevisa att $\lim_{p \to \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty$.

1.11 Visa att triangelolikheten gäller för normerna $\|\cdot\|_1$ och $\|\cdot\|_\infty$, dvs. att

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p \quad \text{om } p = 1 \text{ eller } p = \infty.$$

1.12 Visa att begreppen inre punkt och randpunkt till en mängd inte förändras om man definierar omgivningar med hjälp av det avståndsbegrepp som ges av normen $\|\cdot\|_1$ eller normen $\|\cdot\|_\infty$.

1.2 Gränsvärde och kontinuitet

Med en (oändlig) *punktföljd* i $\mathbf{R}^n$ menar vi en svit punkter, numrerade med heltal: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$. Man skriver också sådant som $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^\infty$ eller helt enkelt $\{\mathbf{a}_k\}$. En matematisk purist kan tänka sig en punktföljd som en funktion $\mathbf{a} : \mathbf{Z}_+ \to \mathbf{R}^n$, dvsèn funktion som till varje positivt heltal k ordnar en punkt $\mathbf{a}_k$ i $\mathbf{R}^n$. (Naturligvis behöver indexeringen inte börja med just talet 1.)

En punktföljd $\{\mathbf{a}_k\}$ sägs vara *konvergent*, om det finns en punkt $\mathbf{b}$ med följande egenskap: för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal K (som i allmänhet beror på ε), sådant att för alla $k > K$ gäller att $|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}| < \varepsilon$. Samma sak kan även formuleras med omgivningsbegreppet så här: till varje omgivning N av $\mathbf{b}$ finns ett K så att $\mathbf{a}_k \in N$ för alla $k > K$. Om detta gäller säger vi också att $\mathbf{b}$ är gränsvärdet av $\mathbf{a}_k$ och skriver

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{b} \quad \text{eller} \quad \mathbf{a}_k \to \mathbf{b} \text{ då } k \to \infty.$$

Om en följd inte är konvergent, kallas den *divergent.*

Låt $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ och $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Genom att använda olikheterna i lemma 1.1 inser man att $\mathbf{a}_k \to \mathbf{b}$ är ekvivalent med att man har *koordinatvis* konvergens. Närmare bestämt gäller ju

$$\max_{1\le j\le n} |a_{kj} - b_j| = \|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}\|_\infty \le |\mathbf{a}_k - \mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj} - b_j|.$$

Om $a_{kj} \to b_j$ för varje j, kommer högerledet här att gå mot noll och därmed också mittersta ledet; och om detta går mot noll gäller detsamma för vänsterledet och därmed gäller $a_{kj} \to b_j$ för varje j.

I det följande kommer vi ofta att använda följande resultat.

Sats 1.6 *En mängd M är sluten om och endast om den har följande egenskap: Om $\{\mathbf{a}_k\}$ är en följd av punkter ur M som konvergerar mot en punkt $\mathbf{b}$, så ligger alltid $\mathbf{b}$ också i M.*

Bevis. Antag först att M är sluten, och låt $\{\mathbf{a}_k\}$ vara en punktföljd utvald ur M som konvergerar mot $\mathbf{b}$. Detta betyder att varje omgivning av $\mathbf{b}$ innehåller många (rentav oändligt många) av punkterna $\mathbf{a}_k$ som alla ligger i M, och detta innebär ju att $\mathbf{b}$ är en höljepunkt till M. Eftersom $M = \overline{M}$ följer då att $\mathbf{b} \in M$, vilket bevisar den ena riktningen av påståendet.

I andra riktningen: antag att man alltid vet att gränsvärdet för en konvergent följd ur M också tillhör M. Låt $\mathbf{b}$ vara en randpunkt till M och låt $N_k = N(\mathbf{b}, 1/k)$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$. Varje N_k innehåller säkert en punkt $\mathbf{a}_k \in M$ (enligt definitionen av randpunkt), och eftersom $|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}| < 1/k$ gäller att $\mathbf{a}_k \to \mathbf{b}$. Det följer att $\mathbf{b} \in M$, och alltså innehåller M alla sina randpunkter, vilket betyder att M är sluten. $\square$

Man studerar även gränsvärden av funktioner definierade i någon del av $\mathbf{R}^n$, med värden i $\mathbf{R}$ eller rentav i något rum $\mathbf{R}^p$. Definitionen kan formuleras ordagrant som i det endimensionella fallet, fast beloppsstrecken nu beskriver avstånd i rum av högre dimension. Att

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \qquad \text{eller} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{A} \text{ då } \mathbf{x} \to \mathbf{a}$$

betyder alltså att man till varje tal $\varepsilon > 0$ kan finna ett $\delta > 0$ sådant att $0 < |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta$ medför att $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{A}| < \varepsilon$. Med omgivningsspråk kan man också uttala detta så här: till varje omgivning N av $\mathbf{A}$ finns en punkterad omgivning $O^\bullet$ av $\mathbf{a}$ sådan att $\mathbf{f}(O^\bullet) \subset N$.

Naturliga modifikationer av gränsvärdesdefinitionen kan göras för det fall att $\mathbf{a}$ ligger på randen till definitionsområdet för $\mathbf{f}$.

När man har gränsvärde, kan man också tala om kontinuitet. Funktionen $\mathbf{f}$ är kontinuerlig i $\mathbf{a}$ om $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

I praktiken händer det ofta att mängder beskrivs genom ekvationer och olikheter som innehåller olika funktionsuttryck. Exempelvis beskriver vi den öppna enhetscirkeln i $\mathbf{R}^2$ genom olikheten $x^2 + y^2 < 1$. För att avgöra om en sålunda beskriven mängd är öppen eller sluten, eller vad den nu är, kan man ha glädje av följande sats.

Sats 1.7 *Antag att D är en öppen mängd i $\mathbf{R}^n$, och låt $f : D \to \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion. För varje reellt tal t är då mängden $M_t = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) < t\}$ öppen.*

Bevis. Antag $\mathbf{a} \in M_t$ och sätt $f(\mathbf{a}) = u$. Då är alltså $u < t$, och vi sätter $\varrho = t - u > 0$. På grund av gränsvärdesdefinitionen, och på grund av att definitionsmängden D är öppen, finns en omgivning N av $\mathbf{a}$ sådan att för alla $\mathbf{x} \in N$ gäller $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varrho$. Speciellt har man att denna olikhet är sann även utan beloppsstreck. För alla dessa $\mathbf{x}$ gäller alltså att

$$f(\mathbf{x}) = \big(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\big) + f(\mathbf{a}) < \varrho + u = t - u + u = t.$$

Detta innebär ju att $\mathbf{x} \in M_t$, dvs. hela omgivningen N tillhör M_t. Alltså är $\mathbf{a}$ en inre punkt, och påståendet följer. $\square$

Med denna sats inser man exempelvis att mängden som beskrivs av de tre olikheterna $|x| + y^2 > 3$ och $-1 < x < 2$ är öppen. Ty de tre olikheterna kan alla skrivas om på formen $f(x) < t$:

$$3 - |x| - y^2 < 0, \quad -1 - x < 0, \quad x < 2,$$

där vänsterleden är kontinuerliga; och skärningen av tre öppna mängder är öppen.

Övningar

1.13 Antag att $f : D \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig på den slutna mängden D, och låt t vara ett reellt tal. Visa att mängden $\{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) \le t\}$ är sluten.

1.14 Visa att en funktion definierad i en öppen mängd är kontinuerlig om och endast om inversa bilden av en öppen mängd alltid är öppen.

Kapitel 2

Generaliseringar av gränsvärdesbegreppet

2.1 Förberedelser

Vi skall studera punktföljder i det n-dimensionella euklidiska rummet $\mathbf{R}^n$. Precis som för vanliga talföljder gäller naturligtvis att en sådan punktföljd inte alls behöver vara konvergent. Vi skall undersöka vad som kan sägas i allmännare situationer. Vi gör först några definitioner.

Definition 2.1 *Låt $\{\mathbf{a}_\nu\}$ vara en punktföljd i $\mathbf{R}^n$ och $\mathbf{b}$ en punkt i $\mathbf{R}^n$. Vi säger att $\mathbf{b}$ är en hopningspunkt till följden $\{\mathbf{a}_\nu\}$, om det till varje omgivning N av $\mathbf{b}$ finns oändligt många indexvärden ν sådana att $\mathbf{a}_\nu \in N$.*

Att $\mathbf{b}$ är en hopningspunkt uttrycker man också så att punkterna $\mathbf{a}_\nu$ *hopar sig* mot $\mathbf{b}$.

Anmärkning. Någon läsare tycker kanske att definitionen ser mer än nödvändigt tillkrånglad ut. Varför skulle man inte bara kunna säga att N skall innehålla oändligt många punkter ur följden? Orsaken är att man kan ha följder som ”upprepar” samma punkt – ett extremt exempel är en *konstant* följd, där $\mathbf{a}_\nu = \mathbf{a} =$ fix punkt, samma för alla ν. I detta fall vill vi likafullt att $\mathbf{a}$ skall räknas som hopningspunkt, trots att följden i viss mening bara innehåller en enda punkt. Om man emellertid kommer överens om att man skall tolka uttrycket ”oändligt många punkter ur följden” som ”punkter för oändligt många indexvärden”, kan man väl använda uttryckssättet, och den som skriver dessa rader syndar själv ofta på denna punkt. $\square$

Definition 2.2 *Antag att $1 \le \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$, där alla ν_j är heltal. Då säger vi att följden $j \mapsto \mathbf{a}_{\nu_j}$ är en* delföljd *av följden $\nu \mapsto \mathbf{a}_\nu$.*

Det vanliga skrivsättet är att man ser $\{\mathbf{a}_{\nu_j}\}$ eller mer specificerat $\{\mathbf{a}_{\nu_j}\}_j$ eller $\{\mathbf{a}_{\nu_j}\}_{j=1}^\infty$ som en delföljd av $\{\mathbf{a}_\nu\}$ (eller $\{\mathbf{a}_\nu\}_\nu$ eller $\{\mathbf{a}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$). Man inser lätt att en punktföljd är konvergent med ett visst gränsvärde $\mathbf{b}$ om och endast om *varje* delföljd är konvergent med samma gränsvärde. Vi skall nu karakterisera begreppet hopningspunkt med hjälp av delföljder.

Sats 2.3 *Punkten $\mathbf{b}$ är hopningspunkt till följden $\{\mathbf{a}_\nu\}$ om och endast om det finns en delföljd av $\{\mathbf{a}_\nu\}$ som konvergerar mot $\mathbf{b}$.*

Bevis. Antag först att $\mathbf{b}$ är en hopningspunkt. Låt $N_j = N(\mathbf{b}, 1/j)$ vara omgivningar (öppna bollar med radie $1/j$) för $j = 1, 2, \ldots$. Varje sådan innehåller ju oändligt många $\mathbf{a}_\nu$. Välj först $\mathbf{a}_{\nu_1} \in N_1$, välj sedan ν_2 så att $\nu_2 > \nu_1$ och $\mathbf{a}_{\nu_2} \in N_2$, $\nu_3 > \nu_2$ så att $\mathbf{a}_{\nu_3} \in N_3$ osv. Detta ger en delföljd $\{\mathbf{a}_{\nu_j}\}_{j=1}^{\infty}$, där $\mathbf{a}_{\nu_j} \in N_j$, dvs. $|\mathbf{a}_{\nu_j} - b| < 1/j \to 0$, vilken är den önskade delföljden.

Den omvända delen av påståendet är lätt och lämnas till läsaren som övning. $\square$

Övningar

2.1 Bestäm alla hopningspunkter till talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, då

a) $a_n = (-1)^n + \dfrac{n}{3n+1}$ b) $a_n = 2(-1)^n - 3(-1)^{2n} + (-1)^{3n}$

c) $a_{2k-1} = \cos\dfrac{1}{k} + (-1)^k$, $\quad a_{2k} = \sin\dfrac{1}{k} + (-1)^k$.

2.2 Bestäm alla hopningspunkter till $\{a_n\}_1^{\infty}$, där

a) $a_n = \dfrac{1}{2+\cos\frac{n\pi}{2}}$ b) $a_n = \sin\left(\pi n^2 \cos\dfrac{1}{n}\right)$

c) $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\, e^{1/n}\right)$ d) $a_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$

e) $a_n = \left(1+\dfrac{\cos \pi n}{n}\right)^n$ f) $a_n = \tan\left(\pi n^3\, e^{1/n}\right)$

g) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n^2+n}\right)$ h) $a_n = \cos\left(\pi n^3 \sin\dfrac{1}{n}\right)$

i) $a_n = \cos\sqrt{n}$ j) $a_n = \sqrt[4]{n}\cos\sqrt{n}$

2.3 Punktföljden $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathbf{R}^n$ definieras av att P_n har de polära koordinaterna $r_n = \dfrac{n}{n+1}$, $\theta_n = \sqrt{n}$. Bestäm alla hopningspunkter till följden.

2.4 Låt U vara en öppen mängd, och låt U_1 vara det inre av det slutna höljet av U, $U_1 = \left(\overline{U}\right)^{\circ}$. Visa att om $U = U_1$, så finns det för varje punkt p på randen till U en följd av *yttre* punkter till U, som konvergerar mot p.

2.5 Visa att mängden av hopningspunkter till en följd är sluten.

2.2 Bolzano–Weierstrass' sats

En mängd $K \subset \mathbf{R}^n$ kallas *begränsad* om $K \subset N(\mathbf{0}, r)$ för något $r > 0$, dvs. alla punkter i K ligger inom ett visst fixt avstånd från origo. Mängder som är både *slutna* och *begränsade* visar sig ha intressanta egenskaper, vilket motiverar att de ges en egen benämning:

Definition 2.4 *En mängd $K \subset \mathbf{R}^n$ kallas* kompakt *om den är sluten och begränsad.*

Huvudresultatet i detta avsnitt är sats 2.6. För dess bevis behöver vi följande resultat, som även är intressant för sin egen skull.

Sats 2.5 ((Intervallkapslingssatsen)) *För $\nu = 1, 2, \ldots$, låt I_ν vara ett kompakt intervall på reella axeln, $I_\nu = [a_\nu, b_\nu]$, med längd $|I_\nu| = b_\nu - a_\nu$. Antag att*

$$I_\nu \supseteq I_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{2.1}$$

Då är genomskärningen $I = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ icke-tom; i själva verket är I självt ett kompakt intervall med längd $|I| = \lim_{\nu\to\infty} |I_\nu|$.

Observera att satsen blir falsk om intervallen inte är kompakta. Undersök t.ex. vad som händer om $I_\nu =]0, 1/\nu]$ eller $I_\nu = [\nu, \infty[$.

Bevis. Antagandet (2.1) kan skrivas

$$a_\nu \le a_{\nu+1} \le b_{\nu+1} \le b_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Man ser att $\{a_\nu\}$ är en växande (dvs. icke-avtagande) följd, och eftersom $a_\nu \le b_\nu \le b_1$ är den uppåt begränsad (av talet b_1 t.ex.). Alltså existerar gränsvärdet $\xi = \lim a_\nu$, och $a_\nu \le \xi$ för alla ν. Analogt är $\{b_\nu\}$ en avtagande (dvs. icke-växande) och nedåt begränsad talföljd med ett gränsvärde $\eta = \lim b_\nu$ sådant att $\eta \le b_\nu$ för alla ν. Eftersom $a_\nu \le b_\nu$ följer även att $\xi \le \eta$, så att för alla ν gäller

$$a_\nu \le \xi \le \eta \le b_\nu.$$

Detta visar att $[\xi, \eta] \subseteq I = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$, dvs. skärningen är icke-tom. Man inser lätt att inga punkter utanför $[\xi, \eta]$ kan tillhöra alla I_ν, så att man i själva verket har $I = [\xi, \eta]$; påståendet om $|I|$ följer sedan omedelbart. □

Ett viktigt specialfall av satsen är det fall då $|I_\nu| \to 0$ när $\nu \to \infty$. I det läget blir förstås $\xi = \eta$, och det finns precis en punkt som tillhör alla intervallen I_ν.

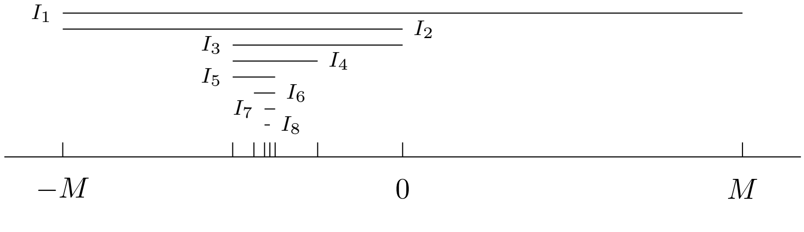
Sats 2.6 ((Bolzano–Weierstrass' sats)) *Varje begränsad punktföljd i $\mathbf{R}^n$ har minst en hopningspunkt.*

Bevis. Vi genomför beviset fullständigt i fallet $n = 1$. Sedan antyds hur man kan generalisera till godtycklig (ändlig) dimension.

Vi antar alltså att $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ är en reell talföljd, som är begränsad, dvs. det finns ett tal M sådant att $|a_\nu| \le M$ för alla ν. Låt I_1 vara intervallet $[-M, M]$. Betrakta de båda delintervallen $[-M, 0]$ och $[0, M]$. Minst ett av dem måste innehålla oändligt många punkter ur följden. Kalla ett sådant intervall för I_2 (om båda duger, välj t.ex. det högra som I_2). Betrakta sedan de två slutna intervall, som man får genom att dela I_2 mitt itu. Av dessa finns (minst) ett som innehåller oändligt många element ur följden, och det kallas I_3. Fortsätt på detta vis. Vi får en följd av kompakta intervall

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots,$$

som uppfyller villkoren i inkapslingssatsen, och vilkas längd går mot noll. Enligt denna sats finns då ett ξ som tillhör alla I_ν. Vi påstår att ξ är hopningspunkt till den givna följden. Vi kan nämligen konstruera en delföljd av $\{a_\nu\}$, som konvergerar mot ξ, på följande sätt.



Låt $\nu_1 = 1$; att $a_{\nu_1} \in I_1$ är klart. Antag sedan att vi har funnit $a_{\nu_k} \in I_k$ för $k = 1, 2, \cdots, p$. Eftersom I_{p+1} innehåller oändligt många av talen a_ν, kan vi finna ett $\nu_{p+1} > \nu_p$ så att $a_{\nu_{p+1}} \in I_{p+1}$. Genom induktion får vi $\{a_{\nu_k}\}_{k=1}^{\infty}$, och konstruktionen medför att $a_{\nu_k} \to \xi$ då $k \to \infty$. Detta visar satsen i det endimensionella fallet.

För högre dimensioner kan man förfara på följande sätt. Att $\{\mathbf{a}_\nu\}$ är en begränsad följd i $\mathbf{R}^2$, med $\mathbf{a}_\nu = (a_\nu, b_\nu)$, innebär att det finns ett tal M så att dels $|a_\nu| \leq M$, dels $|b_\nu| \leq M$ för alla ν. Då är $\{a_\nu\}$ en begränsad följd av reella tal, och den har enligt det föregående en hopningspunkt ξ, som är gränsvärde för en viss delföljd $\{a_{\nu_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Betrakta så delföljden $\{b_{\nu_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Den är också begränsad och har en hopningspunkt η, gränsvärde för en del-delföljd $\{b_{\nu_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$. Punkterna $\mathbf{a}_{\nu_{k_j}}$ bildar då en delföljd av den givna följden, som konvergerar mot (ξ, η), vilken alltså är hopningspunkt. Hur man fortsätter till högre dimension än två borde stå klart. $\square$

Följdsats 2.7 *En begränsad punktföljd är konvergent om och endast om den har precis en hopningspunkt.*

Beviset för följdsatsen överlåtes åt läsaren.

Vi skall närmare studera fallet $n = 1$, alltså reella axeln. En begränsad talföljd $\{a_\nu\}$ har alltså alltid minst en hopningspunkt. Genom att i beviset för Bolzano–Weierstrass' sats konsekvent välja det *högra* intervallet, så snart det är möjligt, inser man att det finns en *största* hopningspunkt ξ. Denna brukar kallas *övre limes* eller *limes superior* för följden, vilket skrivs

$$\xi = \limsup_{\nu\to\infty} a_\nu = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, a_\nu.$$

Detta tal kan även karakteriseras på följande sätt:

(i) För varje $\varepsilon > 0$ finns ett N_0 så att $\nu > N_0 \Rightarrow a_\nu < \xi + \varepsilon$,

(ii) För varje $\varepsilon > 0$ och varje N finns ett ν sådant att $\nu > N$ och $a_\nu > \xi - \varepsilon$.

En alternativ formulering av dessa villkor är följande:

(i′) För varje $\varepsilon > 0$ är endast ändligt många a_ν större än $\xi + \varepsilon$,

(ii′) För varje $\varepsilon > 0$ finns det oändligt många a_ν som är större än $\xi - \varepsilon$.

Läsaren uppmanas att tänka igenom ekvivalensen mellan de två karakteriseringarna, och att övertyga sig om att de verkligen beskriver precis vad som måste vara den största hopningspunkten.

Analogt kan man identifiera den *minsta* hopningspunkten, *undre limes* eller *limes inferior*, $\eta = \liminf_{\nu\to\infty} a_\nu = \underline{\lim}_{\nu\to\infty}\, a_\nu$. Det är en lämplig övning att skriva upp karakteriseringar av denna, analoga med ovanstående för övre limes.

Även för obegränsade följder talar man ibland om $\limsup$ och $\liminf$. De kan då anta oändliga "värden". Exempel:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu \sin\nu = +\infty, \qquad \underline{\lim}\, \nu = \overline{\lim}\, \nu = +\infty.$$

En praktisk sida av övre och undre limes är att de, till skillnad från vanliga gränsvärden, alltid existerar. I vissa situationer kan de ersätta äkta gränsvärden.

Exempel. Med hjälp av övre limes kan man formulera en kraftigare version av Cauchys rotkriterium för konvergens av positiva serier:

Antag att $a_n \geq 0$ *för alla* n *och sätt* $A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. *Då gäller att*

$$\begin{aligned} A < 1 \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\sum a_n \text{ är konvergent,} \\ A > 1 \quad &\Rightarrow \quad \textstyle\sum a_n \text{ är divergent.} \end{aligned}$$

Antag först att $A < 1$: sätt $r = (A+1)/2$. Eftersom $r > A$, finns ett N så att för alla $n > N$ gäller $\sqrt[n]{a_n} < r$, dvs. $a_n < r^n$; men $r < 1$, så att jämförelse med den geometriska serien ger att $\sum a_n$ är konvergent.

Om å andra sidan $A > 1$, finns oändligt många n för vilka $\sqrt[n]{a_n} > 1$ och därmed $a_n > 1$, vilket medför seriens divergens (termerna går inte mot noll).

Övningar

2.6 Bestäm $\limsup a_n$ och $\liminf a_n$, då $a_n =$

a) $(-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ b) $\left(1 + \dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$ c) $\tan\left(\pi n^3 e^{1/n}\right)$

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n^2+n}\right)$

2.7 Visa att om $a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, så gäller $\underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$.

2.8 Antag $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, och $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$. Visa att det finns godtyckligt stora tal i följden. Gäller $\lim a_n = +\infty$?

2.9 Antag a_n, $b_n > 0$. Vidare antar vi att $\{a_n\}$ är begränsad och $\overline{\lim} \sqrt[n]{b_n/a_n} < 1$. Visa att det existerar ett tal $k < 1$ så att $b_n < k^n$ för alla tillräckligt stora n.

2.10 Låt $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ vara begränsade talföljder. Visa att $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$, och ge ett exempel som visar att olikhet kan inträffa.

2.3 Cauchys konvergensprincip

Definitionen av att en punktföljd är konvergent ser ju ut så här:

> *Följden* $\{a_\nu\}$ *är konvergent om det finns ett tal* b *sådant att för varje* $\varepsilon > 0$ *existerar ett* N *sådant att*
>
> $$\nu > N \quad \Rightarrow \quad |a_\nu - b| < \varepsilon.$$

Här förekommer en referens till det avsedda gränsvärdet, dvs. punkten b. I många fall kan det vara svårt att använda denna definition – det kan vara mer eller mindre omöjligt att bestämma gränsvärdet, även om man känner sig ganska säker på att följden konvergerar. Det finns emellertid ett villkor på $\{a_\nu\}$ som är ekvivalent med konvergens, men som inte refererar till någon punkt utanför följden själv. Först en definition:

Definition 2.8 *En punktföljd* $\{a_\nu\}$ *i* $\mathbf{R}^n$ *kallas en* Cauchyföljd *eller sägs uppfylla ett* Cauchyvillkor, *om till varje* $\varepsilon > 0$ *finns ett tal* N *sådant att för alla indexvärden* μ, ν *gäller att*

$$\mu, \nu > N \quad \Rightarrow \quad |a_\mu - a_\nu| < \varepsilon.$$

Sats 2.9 *En punktföljd i* $\mathbf{R}^n$ *är konvergent om och endast om den är en Cauchyföljd.*

Bevis. ($\Rightarrow$) Antag $\{a_\nu\}$ konvergent med gränsvärde A. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Då finns definitionsmässigt ett N sådant att för alla $\nu > N$ gäller $|a_\nu - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Om både μ och ν är större än N gäller alltså

$$|a_\mu - a_\nu| = |a_\mu - A + A - a_\nu| \le |a_\mu - A| + |a_\nu - A| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

dvs. följden uppfyller ett Cauchyvillkor.

($\Leftarrow$) Nu antar vi att $\{a_\nu\}$ är en Cauchyföljd. Speciellt gäller då (för "$\varepsilon = 1$") att det finns ett N_0 så att μ, $\nu > N_0$ medför att $|a_\mu - a_\nu| < 1$. Om $\nu > N_0$ gäller då

$$|a_\nu| = |a_\nu - a_{N_0} + a_{N_0}| \le |a_\nu - a_{N_0}| + |a_{N_0}| < 1 + |a_{N_0}|,$$

dvs. alla $|a_\nu|$ för $\nu > N_0$ ligger under ett fixt tal; detta betyder att den givna följden är begränsad. Enligt Bolzano–Weierstrass finns då (minst) en hopningspunkt ξ med tillhörande konvergent delföljd: $a_{\nu_j} \to \xi$, $j \to \infty$. Vi skall visa att hela följden faktiskt konvergerar mot ξ.

Låt därför $\varepsilon > 0$ vara givet, och välj tillhörande N enligt Cauchyvillkoret:

$$\mu, \nu > N \quad \Rightarrow \quad |a_\mu - a_\nu| < \varepsilon.$$

Eftersom den speciella delföljden a_{ν_j} konvergerar mot ξ finns säkert ett j-värde sådant att $\nu_j > N$ och $|a_{\nu_j} - \xi| < \varepsilon$. För alla $\nu > N$ får vi då

$$|a_\nu - \xi| = |a_\nu - a_{\nu_j} + a_{\nu_j} - \xi| \le |a_\nu - a_{\nu_j}| + |a_{\nu_j} - \xi| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

vilket ju innebär att $a_\nu \to \xi$ då $\nu \to \infty$, dvs. följden är konvergent. □

Exempel. Sätt $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Vi kan anta att $m < n$. Då gäller

$$a_n - a_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{m}.$$

Integraluppskattning (se envariabelanalysen!) ger

$$\ln\frac{n}{m+1} = \int_{m+1}^{n} \frac{dx}{x} < \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots \frac{1}{n} < \int_m^n \frac{dx}{x} = \ln\frac{n}{m},$$

så att

$$\ln\frac{n}{m+1} - \ln\frac{n}{m} < a_n - a_m < 0,$$

dvs. $|a_n - a_m| < \ln\dfrac{n}{m} - \ln\dfrac{n}{m+1} = \ln\dfrac{m+1}{m} = \ln\bigl(1 + \dfrac{1}{m}\bigr)$. Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $\ln(1+t) \to 0$ då $t \to 0$, finns ett N så att $\ln\bigl(1 + 1/m\bigr) < \varepsilon$ om $m > N$ (och därmed även $n > N$). Alltså existerar $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Gränsvärdet brukar betecknas γ eller C och kallas *Eulers konstant*. Man vet att $\gamma = 0.577...$, men det är t.ex. inte känt om γ är rationellt eller irrationellt. □

Cauchys princip kan även formuleras för andra former av gränsövergång. Som ett exempel: låt oss formulera ett Cauchyvillkor för gränsvärden av typen $\lim_{x\to a} f(x)$ (där f t.ex. är en reellvärd funktion av en reell variabel). För ett sådant gränsvärde gäller följande grundläggande hjälpsats.

Lemma 2.10 *Antag att f är definierad i en punkterad omgivning av a. Då gäller att $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och är lika med A om och endast om det för varje talföljd $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ sådan att $x_\nu \neq a$ för alla ν och $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = a$ gäller att $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = A$.*

Bevis. $\Rightarrow$) Antag att $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Om $\varepsilon > 0$ är givet finns alltså ett $\delta > 0$ så att för alla x som uppfyller $0 < |x-a| < \delta$ gäller $|f(x) - A| < \varepsilon$. Låt nu $\{x_\nu\}$ vara en punktföljd sådan att $x_\nu \neq a$ för alla ν men $x_\nu \to a$ då $\nu \to \infty$. Det betyder att det finns ett N så att $0 < |x_\nu - a| < \delta$ för alla $\nu > N$, där δ är samma δ som ovan. Men då har vi ju att

$$\nu > N \quad \Rightarrow \quad |f(x_\nu) - A| < \varepsilon,$$

dvs. $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = A$.

$\Leftarrow$) Nu antar vi att $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = A$ för *alla* punktföljder $\{x_\nu\}$ med $x_\nu \neq a$ för alla ν och $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = a$. Dessutom antar vi att det *inte* gäller att $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Då skulle det finnas ett ε-värde, säg $\varepsilon = b$, som är sådant att hur litet δ jag än väljer, så kommer det alltid att finnas något x-värde som uppfyller $0 < |x-a| < \delta$ medan det trots detta gäller att $|f(x) - A| > b$. Vi väljer då successivt δ-värdena $\delta = 1/\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, och kallar motsvarande x-värden för x_ν. Detta ger en följd $\{x_\nu\}$ med $x_\nu \neq a$, men $|x_\nu - a| < 1/\nu \to 0$, så att $x_\nu \to a$ då $\nu \to \infty$. Att $|f(x_\nu) - A| \geq b$ betyder att $f(x_\nu)$ inte går mot A, vilket strider mot antagandet. Motsägelse! $\square$

Med hjälp av lemmat kan man visa följande ”Cauchysats”:

Sats 2.11 *$\lim_{x\to a} f(x)$ existerar om och endast om till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att för alla x_1, x_2 gäller att*

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Beviset lämnas som övning.

Övningar

2.11 Visa med användning av Cauchyvillkor att talföljden $\{a_n\}$ är konvergent, om a_n ges av

a) $\dfrac{n+1}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ c) $\displaystyle\int_0^n \sin(x^2)\,dx$.

2.12 Med Cauchys konvergensprincip kan man ge ett mycket koncist bevis för satsen att en absolutkonvergent serie är konvergent. Gör det!

2.13 Bevisa sats 2.11!

Blandade övningar på kap. 2

2.14 Skärp kvotkriteriet för positiva serier på följande sätt: Antag $a_n > 0$. Då är serien $\sum a_n$ konvergent, om $\overline{\lim}\, a_{n+1}/a_n < 1$, divergent om $\underline{\lim}\, a_{n+1}/a_n > 1$.

2.15 $\{a_n\}_1^{\infty}$ är en talföljd sådan att $p = \overline{\lim}\, \dfrac{\ln a_n}{\ln n}$ existerar ändligt. Visa att det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns en konstant k sådan att $a_n < k\, n^{p+\varepsilon}$ för alla n.

2.16 Visa följande olikhet för begränsade talföljder, och ge också exempel på att olikhet kan inträffa:

$$\overline{\lim} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \overline{\lim}\, a_n.$$

2.17 A och B är två delmängder av $\mathbf{R}^n$, A är kompakt och B är sluten. Visa att $A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \,:\, \mathbf{a} \in A,\, \mathbf{b} \in B\}$ är sluten.

2.18 $\{\mathbf{x}_\nu\}$ är en följd av punkter i $\mathbf{R}^n$ sådan att följden $\{|\mathbf{x}_\nu|\}$ av reella tal konvergerar. Visa att

a) följden $\{\mathbf{x}_\nu\}$ har minst en hopningspunkt $\mathbf{x}$,

b) $|\mathbf{x}| = \lim |\mathbf{x}_\nu|$,

c) om dessutom skalärprodukten $\langle \mathbf{x}_\mu \,, \mathbf{x}_\nu \rangle \geq |\mathbf{x}|^2$ för alla μ och ν, så är följden $\{x_\nu\}$ konvergent.

2.19 Antag att $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, och att $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existerar ändligt. Visa olikheterna

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Kapitel 3

Kontinuerliga funktioner

3.1 Funktioner definierade på en kompakt mängd

Vi skall visa några fundamentala resultat för kontinuerliga funktioner, definierade i en del av $\mathbf{R}^n$ och med värden i $\mathbf{R}$ eller $\mathbf{R}^m$. Från och med nu avstår vi från att vektormarkera punkter i $\mathbf{R}^n$ — av sammanhanget får framgå om t.ex.symbolen x står för ett reellt tal eller för en punkt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{R}^n$.

För definitionen av kontinuitet och dess elementära egenskaper hänvisas till kurslitteraturen. Vi börjar nu med en hjälpsats.

Lemma 3.1 *Funktionen $x \mapsto |x|$ från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}$ är kontinuerlig.*

Bevis. Enligt en variant av triangelolikheten gäller

$$\big||x| - |a|\big| \le |x - a|,$$

varav följer att $|x| \to |a|$ då $x \to a$, vilket är påståendet. □

Sats 3.2 *Antag att K är en kompakt mängd i $\mathbf{R}^n$ och att $f : K \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig. Då är värdemängden $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ en kompakt delmängd av $\mathbf{R}^m$.*

Bevis. Vi skall visa dels att $f(K)$ är sluten, dels att den är begränsad. Vi börjar med slutenheten. Därvid skall vi utnyttja den sats som säger att en mängd M är sluten om och endast om den är sluten under gränsövergång, dvs. att den har följande egenskap: Om $\{a_\nu\}$ är en punktföljd i M och $a_\nu \to b$ då $\nu \to \infty$, så gäller alltid att $b \in M$. Låt alltså $y_\nu \in f(K)$ för $\nu = 1, 2, \ldots$, och antag att y_ν konvergerar mot en punkt η. Vår uppgift är att visa att $\eta \in f(K)$.

Att $y_\nu \in f(K)$ innebär att $y_\nu = f(x_\nu)$ för något $x_\nu \in K$. Detta ger oss en följd av punkter $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, som alla ligger i K. Eftersom K är begränsad, har följden en hopningspunkt ξ (Bolzano–Weierstrass), och eftersom K är sluten gäller dessutom $\xi \in K$ (ovan citerad sats). Till ξ hör en delföljd $\{x_{\nu_j}\}_{j=1}^\infty$ sådan att $x_{\nu_j} \to \xi$. Enär $\xi \in K$ är $f(\xi)$ definierat, och då f är kontinuerlig gäller att

$$f(\xi) = \lim_{j\to\infty} f(x_{\nu_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{\nu_j} = \eta,$$

vilket just säger att η tillhör $f(K)$; $f(K)$ är alltså sluten.

Antag sedan att $f(K)$ *inte* vore begränsad. Det skulle innebära att det funnes punkter $y_k \in f(K)$ sådana att $|y_k| \ge k$ för $k = 1, 2, \ldots$. Som ovan är $y_k = f(x_k)$ för något $x_k \in K$, och punktföljden $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ har enligt Bolzano–Weierstrass en hopningspunkt ζ, som tillhör K enligt ovan och är gränspunkt för någon delföljd $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Värdet $f(\zeta)$ är definierat och lika med någon punkt $\omega \in f(K)$. Men nu börjar det bli konstigt: f är kontinuerlig i K, speciellt i ζ, så att

$$\omega = f(\zeta) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{k_j},$$

varav skulle följa (här använder vi lemmat ovan)

$$|\omega| = \lim_j |y_{k_j}| \geq \lim_j k_j = +\infty.$$

Men inga element i $\mathbf{R}^m$ har oändlig norm. Vi har åstadkommit en orimlighet genom att anta att $f(K)$ är obegränsad. □

Ett viktigt fall är naturligtvis $m = 1$ (reellvärda funktioner). Vi skall formulera om resultatet i detta fall. Först en hjälpsats.

Lemma 3.3 *Om K är en icke-tom kompakt mängd på $\mathbf{R}$, så innehåller K ett största och ett minsta tal.*

Bevis. K är begränsad och har allstå en minsta övre begränsning:

$$\Xi = \sup K = \sup_{y\in K} y.$$

Definitionen av supremum ger att för varje heltal n finns ett tal $y_n \in K$ sådant att

$$\Xi - \frac{1}{n} < y_n \leq \Xi.$$

Följden $\{y_n\}$ konvergerar mot en punkt som tillhör K, eftersom K är sluten; å andra sidan är det klart att $\lim y_n = \Xi$, varför $\Xi \in K$, vilket visar att K har en maximal punkt. Helt analogt visas att $\inf K \in K$. □

Följdsats 3.4 (specialfall av sats 3.2) *Om $K \subset \mathbf{R}^n$ är kompakt och $f : K \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig, så är f begränsad, och dessutom* antar *f ett maximum och ett minimum på K.*

Utsagan om maximum och minimum innebär att det finns punkter ξ och η i K sådana att $f(\eta) \leq f(x) \leq f(\xi)$ för alla $x \in K$. Detta följer av att $f(K)$ är en kompakt mängd enligt satsen, och en kompakt mängd av reella tal har maximum och minimum enligt lemmat.

Följdsatsen spelar en stor roll vid undersökning av max- och min-problem: den kan ofta användas för att säkerställa att en lösning till ett sådant problem existerar.

Ett viktigt resultat om kontinuerliga funktioner, som redan använts flitigt i tidigare kurs, är satsen om mellanliggande värden. Eftersom vi skall generalisera denna till ett allmännare fall, tar vi med den i detta sammanhang, med bevis.

Sats 3.5 *Låt $[a, b]$ vara ett intervall på $\mathbf{R}$, och antag att $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig. Då antar f på intervallet $[a, b]$ alla reella värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.*

Bevis. Först gör vi två förenklingar av förutsättningarna:
(a) Vi kan anta att $f(a) < f(b)$, annars ersätter vi f med $-f$.
(b) Låt y vara ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, $f(a) < y < f(b)$. Genom att ersätta f med $f - y$ kan vi anta att $f(a) < 0 < f(b)$, och det är tillräckligt att visa att f antar värdet 0 någonstans.

Bilda mängden $E = \{x \in [a,b] \,:\, f(x) < 0\}$. E är uppåt begränsad, ty om $x \in E$ så är $x \leq b$; och E är icke-tom, ty $a \in E$. Enligt axiomet om övre gräns existerar då talet $c = \sup E$, och det är klart att $a < c < b$. Vi påstår att $f(c) = 0$.

Om vi hade $f(c) > 0$, så skulle på grund av kontinuiteten gälla att $f(x) > 0$ i ett helt intervall till vänster om c, vilket strider mot definitionen av c som supremum. Om å andra sidan $f(c)$ vore < 0, så gåve kontinuiteten att $f(x) < 0$ i ett intervall till höger om c, vilket också strider mot definitionen av c. Återstår alltså endast möjligheten att $f(c) = 0$. □

Om man vill formulera en motsvarighet till detta resultat i högre dimensioner måste man komma åt begreppet "mellanliggande" i $\mathbf{R}^n$. Ett sätt att göra detta ges av följande definitioner.

Definition 3.6 *En* kontinuerlig kurvbåge *som förbinder två punkter* $\mathbf{a}$ *och* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{R}^n$ *är en kontinuerlig avbildning* $\mathbf{x}$ *från ett kompakt intervall* $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$*, sådan att* $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{a}$ *och* $\mathbf{x}(\beta) = \mathbf{b}$.

Anmärkning. Språkbruket i samband med kurvor och kurvbågar är något vacklande. Ofta avser man med orden de rent geometriska objekten, som utgörs av värdemängden till funktionen $\mathbf{x}$, dvs. en massa punkter i $\mathbf{R}^n$. □

Definition 3.7 *En mängd* $A \subset \mathbf{R}^n$ *kallas* bågvis sammanhängande*, om varje par av punkter i* A *kan förbindas med en kontinuerlig kurvbåge som ligger helt i* A.

I fallet $n = 1$, dvs. på $\mathbf{R}$, är en bågvis sammanhängande mängd detsamma som ett intervall, vilket den intresserade kan försöka bevisa som övning.

En motsvarighet till satsen om mellanliggande värden är nu följande.

Sats 3.8 *Antag* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *bågvis sammanhängande och* $f : A \to \mathbf{R}^m$ *kontinuerlig. Då är också* $f(A)$ *bågvis sammanhängande.*

Bevis. (Se figuren!) Låt $y_1,\ y_2 \in f(A)$. Då är $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, där $x_1,\ x_2 \in A$. Förbind x_1 med x_2 via en kontinuerlig kurvbåge $\mathbf{x} : [a,b] \to A$, där $\mathbf{x}(a) = x_1$, $\mathbf{x}(b) = x_2$. Den sammansatta funktionen

$$f \circ \mathbf{x} \,:\, [a,b] \to \mathbf{R}^m$$

är då kontinuerlig, och den förbinder y_1 och y_2 på önskat sätt. □

Övningar

3.1 Ge exempel på en sluten mängd $A \subset \mathbf{R}$ och en kontinuerlig funktion $f : A \to \mathbf{R}$ sådan att $f(A)$ inte är sluten.

3.2 Ge exempel på en begränsad mängd $B \subset \mathbf{R}$ och en kontinuerlig funktion $f : B \to \mathbf{R}$ sådan att $f(B)$ inte är begränsad.

3.2 Likformig kontinuitet

Antag att f är definierad i en mängd A (t.ex. ett intervall). Definitionen av att f är kontinuerlig återför det hela på de enskilda punkterna i intervallet: *f är kontinuerlig i A om f är kontinuerlig i varje punkt $a \in A$.* Det senare definieras i sin tur med hjälp av gränsvärden: *f är kontinuerlig i a om* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Om man analyserar denna definition i sin tur har man att f är kontinuerlig i a om

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \; : \; |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

I allmänhet kommer δ här att bero inte bara på ε utan även på a. En formulering av kontinuitet i mängden A blir då

$$\forall a \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \; : \; |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En *skärpning* av kontinuitetsbegreppet på en mängd får vi, om vi postulerar att det skall finnas ett δ som duger för alla a-värden *samtidigt*. Det skulle innebära att kvantifikationen av a flyttas till efter kvantifikationen av δ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \; \forall a \in A \; : \; |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Vi säger att f är *likformigt kontinuerlig i mängden A* om (3.1) gäller. Observera att begreppet likformig kontinuitet är knutet till en *mängd* redan i och med sin definition; att tala om likformig kontinuitet i en enstaka punkt är tämligen meningslöst.

I definitionen (3.1) förekommer a och x helt symmetriskt. Man kan markera denna symmetri genom ett bokstavsbyte, vilket ger följande formulering.

Definition 3.9 *Låt $A \subseteq \mathbf{R}^n$ och $f : A \to \mathbf{R}^m$. Vi säger att funktionen f är* likformigt kontinuerlig på A, *om det till varje positivt tal ε går att finna ett positivt tal δ sådant att för alla punkter x och y i A med $|x - y| < \delta$ gäller att $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$; eller med logiska symboler:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \; \forall y \in A \; : \; |x - y| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Vi tar ett par exempel.

Exempel. Låt $A = [0, 2]$, $f(x) = x^2$. Här gäller att

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \le 4|x - y|.$$

Om $\varepsilon > 0$ är givet, kan vi sätta $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon$, så blir (3.2) uppfylld. Det går alltså att finna ett δ som inte beror på var i intervallet man håller till, vilket betyder att f är likformigt kontinuerlig i $[0, 2]$.

Exempel. Nu tar vi $A = [0, \infty[$ och $f(x) = x^2$. Vi har fortfarande

$$|f(x) - f(y)| = |x + y||x - y|,$$

men sedan blir det besvärligare. Hur litet vi än väljer talet δ, går det att finna två punkter x och y med $|x - y| < \delta$, så att trots detta differensen $|f(x) - f(y)|$ blir (icke blott icke mindre än något visst ε utan rentav) godtyckligt stor! Låt nämligen ω vara ett godtyckligt (stort) positivt tal, och välj $x = \dfrac{\omega}{\delta}$, $y = \dfrac{\omega}{\delta} + \dfrac{\delta}{2}$, så är

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{men} \quad |f(x) - f(y)| = \omega + \frac{\delta^2}{4} > \omega.$$

Detta betyder att f inte kan vara *likformigt kontinuerlig i intervallet* $[0, \infty[$, trots att f är *kontinuerlig i varje punkt i* $[0, \infty[$.

I övning 3.4 nedan ges ett exempel på en funktion som är kontinuerlig i ett *begränsat* intervall, men inte likformigt kontinuerlig där.

Att direkt med definitionen undersöka likformig kontinuitet är, som framgår av exemplen, inte särskilt inbjudande. Lyckligtvis har man följande sats, som klarar av många situationer. Det resultat, som ges i övning 3.8 nedan, kan också vara användbart.

Sats 3.10 *Antag att K är en kompakt mängd i $\mathbf{R}^n$ och f en kontinuerlig funktion $K \to \mathbf{R}^m$. Då är f likformigt kontinuerlig på K.*

Bevis. Vi skall göra ett motsägelsebevis. Vi antar alltså att f *inte* är likformigt kontinuerlig på K. Detta innebär att vi skall negera formeln (3.2), vilket ger resultatet

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x \in K \;\; \exists\, y \in K \;:\; |x - y| < \delta \,\wedge\, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

I ord uttryckt: det finns ett positivt tal ε, låt oss [1] kalla det för a, som är sådant, att hur litet δ man än försöker med, så finns det ett punktpar x, y med inbördes avstånd $< \delta$ där funktionsvärdena trots detta skiljer sig åt med minst a. Vi kan t.ex. välja $\delta = 1/k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, och får då två punktföljder $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ sådana att

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} \quad \text{och} \quad |f(x_k) - f(y_k)| \geq a.$$

Som i beviset för sats x.x finner vi nu en konvergent delföljd $\{x_{k_j}\}$ med gränspunkt ξ. För motsvarande delföljd av $\{y_k\}$ får vi

$$|y_{k_j} - \xi| \leq |y_{k_j} - x_{k_j}| + |x_{k_j} - \xi| \leq \frac{1}{k_j} + |x_{k_j} - \xi|,$$

varav

$$\varlimsup_{j \to \infty} |y_{k_j} - \xi| \leq 0 + \lim_{j \to \infty} |x_{k_j} - \xi| = 0,$$

vilket innebär att även $y_{k_j} \to \xi$. (Detta är f.ö. ett bra exempel på hur användning av övre limes kan bespara oss en massa epsilonmixtrande!) Motsägelsen är nu nära: då f är kontinuerlig i ξ gäller både

$$f(x_{k_j}) \to f(\xi) \quad \text{och} \quad f(y_{k_j}) \to f(\xi) \quad \text{då} \quad j \to \infty,$$

men samtidigt är $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \geq a > 0$. Detta är orimligt, som följande sammanställning visar:

$$0 < a \leq |f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \to |f(\xi) - f(\xi)| = 0. \qquad \square$$

Som en tillämpning av begreppet likformig kontinuitet skall vi visa följande viktiga sats, som brukar ges utan bevis vid de första analysstudierna.

Sats 3.11 *Om f är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a, b]$, så är f integrerbar på $[a, b]$.*

Bevis. Att f är integrerbar på $[a, b]$ innebär att det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns en indelning Δ av intervallet som är sådan att differensen mellan översumman och

[1] för att undvika associationer som vidlåder bokstaven ε.

undersumman för Δ är mindre än eller lika med ε. Med lite beteckningar: låt en indelning Δ beskrivas av indelningspunkterna

$$\Delta \quad : \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Sätt sedan för $k = 1, 2, \ldots, n$

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \quad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\},$$

och bilda översumman resp. undersumman:

$$S(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{x-1}), \quad s(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Eftersom f är kontinuerlig på $[a, b]$ och $[a, b]$ är kompakt, så är f likformigt kontinuerlig på $[a, b]$ enligt sats I. Det finns alltså ett δ så att för alla punktpar x, y med $|x - y| < \delta$ gäller $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Välj nu en indelning Δ sådan att

$$|\Delta| = \max_k (x_k - x_{k-1}) < \delta.$$

Då följer att värdena av f på varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ skiljer sig åt med högst $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, så att

$$M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Men då får vi

$$\begin{aligned} S(\Delta) - s(\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \tfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Vi har funnit en indelning där undersummorna skiljer sig med högst ε. Eftersom ε kan väljas godtyckligt litet följer satsen. $\square$

Övningar

3.3 Visa att om $a > 0$ är $f(x) = \dfrac{1}{x}$ likformigt kontinuerlig på $[a, \infty[$.

3.4 Visa att $f(x) = \dfrac{1}{x}$ inte är likformigt kontinuerlig på $]0, 1]$.

3.5 a) Visa att f är likformigt kontinuerlig på $\mathbf{R}$, då $f(x) = |x|$.
b) Motsvarande uppgift för $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, där $f(x) = |x|$.

3.6 Är funktionen $\cos\sqrt{xy}$ likformigt kontinuerlig på mängden $\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$?

3.7 Visa att om $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är deriverbar med begränsad derivata, så är f likformigt kontinuerlig på $\mathbf{R}$.

3.8 En funktion f är kontinuerlig på $[0, \infty[$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar ändligt. Bevisa att f är likformigt kontinuerlig på $[0, \infty[$.

Blandade övningar på kap. 3

3.9 Antag att $f : [0,1] \to [0,1]$ är kontinuerlig. Visa att f har en fixpunkt (dvs. att det finns ett $x \in [0,1]$ sådant att $f(x) = x$).

3.10 a) Visa att det inte finns en kontinuerlig surjektion $[0,1] \to]0,1[$.
b) Ge ett exempel på en kontinuerlig surjektion från en sluten mängd till en öppen mängd!

3.11 Är en begränsad kontinuerlig funktion på $\mathbf{R}$ säkert likformigt kontinuerlig? Ge bevis eller motexempel!

3.12 Funktionen f är likformigt kontinuerlig på det öppna intervallet $]a,b[$. Är f begränsad i intervallet? Gäller att $\lim_{x \to a+} f(x)$ existerar ändligt?

3.13 f är kontinuerlig på $[0,1]$ och $f(x) < 1$. Visa att ekvationen $2x - \int_0^x f(t)\,dt = 1$ har exakt en rot i intervallet $]0,1[$.

3.14 Funktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$ och $f(x) \geq 0$. Beräkna

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b \big(f(x)\big)^n \, dx \right)^{1/n}.$$

3.15 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ är kontinuerlig i intervallet $]0,1[$. Visa att f ej är likformigt kontinuerlig i samma intervall.

Kapitel 4

Omkastning av gränsprocesser

4.1 Derivering av integraler

Vi skall i detta avsnitt studera funktioner, som på olika sätt är definierade med hjälp av (enkel-)integraler. Först betraktar vi fallet att variabeln ingår i integrationsgränserna.

Exempel 1. Om $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, så gäller $F'(x) = f(x)$ i varje punkt x, där f är kontinuerlig (integralkalkylens huvudsats).

Exempel 2. Sätt $F(x) = \int_x^4 t\cos t\,dt$. Med omskrivningen $F(x) = -\int_4^x t\cos t\,dt$ ser man att F är deriverbar enligt exempel 1 och att $F'(x) = -x\cos x$.

Exempel 3. Låt $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$. Här kan man använda kedjeregeln och får (med $u = x^2$):

$$F'(x) = \frac{d}{du}\left(\int_0^u \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx} = \frac{e^{-u}}{1+u}\,2x = \frac{2xe^{-x^2}}{1+x^2}\,.$$

Vi samlar oss nu till ett ”allmänt fall”. Låt

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\,dy,$$

där f är kontinuerlig och φ och ψ deriverbara. Låt a vara någon konstant (mellan $\varphi(x)$ och $\psi(x)$). Då är

$$F(x) = \int_a^{\psi(x)} - \int_a^{\varphi(x)},$$

och som i exempel 3 får man

$$F'(x) = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Härnäst studerar vi integraler av typen

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \tag{4.1}$$

där alltså x förekommer i integranden, medan integrationsgränserna (tills vidare) är konstanta (och ändliga). Här gäller följande satser.

Sats 4.1 *Om f är kontinuerlig i $Q = [a, b] \times [c, d]$, så är $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ kontinuerlig, där F definieras av* (4.1)*.*

Bevis. Q är en kompakt mängd, där f är kontinuerlig. Då är f *likformigt* kontinuerlig där; dvs. om $\varepsilon > 0$ är givet, så kan man säkert finna ett $\delta > 0$ sådant att så snart två punkter $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$ ligger inom avståndet δ från varandra, så gäller $|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| < \varepsilon$. Om nu $|h| < \delta$ får vi alltså

$$\begin{aligned}|F(x+h) - F(x)| &= \left|\textstyle\int_c^d \big(f(x+h, y) - f(x, y)\big)\, dy\right| \\ &\le \textstyle\int_c^d |f(x+h, y) - f(x, y)|\, dy \le \int_c^d \varepsilon\, dy = \varepsilon(d - c).\end{aligned}$$

Eftersom ε är godtyckligt litet, följer påståendet. □

Sats 4.2 *Om f är som i sats 4.1 och dessutom $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ är kontinuerlig i Q, så är F deriverbar i $[a, b]$ och*

$$F'(x) = \int_c^d f_1(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Bevis. På grund av sats 4.1 vet vi att funktionen

$$x \mapsto g(x) = \int_c^d f_1(x, y)\, dy$$

är kontinuerlig på $[a, b]$. Den har en primitiv funktion G definierad av

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt = \int_a^x \int_c^d f_1(t, y)\, dy\, dt.$$

Enligt Fubinis sats kan vi kasta om integrationsordningen och får

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_c^d \int_a^x f_1(t, y)\, dt\, dy = \int_c^d \Big[f(t, y)\Big]_{t=a}^{t=x} dy = \int_c^d f(x, y)\, dy - \int_c^d f(a, y)\, dy \\ &= F(x) - F(a).\end{aligned}$$

Derivering ger nu $G'(x) = F'(x)$, men vi vet ju att $G'(x) = g(x)$, vilket ger satsens påstående. □

Exempel 4. Om $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{x^2 + y^2}$, $x > 0$, så är enligt sats 4.2

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) dy = -2x \int_0^1 \frac{dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Å andra sidan kan man räkna ut att $F(x) = \dfrac{1}{x} \arctan \dfrac{1}{x}$ (sätt $y = tx$ i integralen), och derivering ger $F'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \arctan \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x(1 + x^2)}$. Speciellt är t.ex

$$F'(1) = -2 \int_0^1 \frac{dy}{(1 + y^2)^2} = -\arctan 1 - \tfrac{1}{2},$$

varav följer

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \frac{\pi+2}{8}.$$

"Derivering under integraltecknet" är faktiskt en förekommande metod för beräkning av bestämda integraler, som exempel 4 visar.

Exempel 5 Bestäm det reella talet a så att $\displaystyle\int_0^1 \bigl(\ln(x+1)-ax\bigr)^2\,dx$ blir så liten som möjligt!

Lösning. Man kan sätta $F(a)=\int_0^1 \bigl(\ln(x+1)-ax\bigr)^2\,dx$. Derivering är tillåten och ger $F'(a)=\int_0^1 2(ax-\ln(x+1))x\,dx=\cdots=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$. $F'(a)=0$ endast för $a=\frac{3}{4}$, som ger globalt minimum (studera tecknet hos $F'(a)$ för alla värden på a).

Exempel 6 Sätt $\displaystyle H(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}\,e^{-xt^2}\,dt$, $x\geq 1$. Bestäm $H'(x)$.

Lösning. Sätt $\displaystyle G(u,v)=\int_1^u \frac{1}{t}\,e^{-vt^2}\,dt$. Då är

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{1}{u}\,e^{-vu^2}, \qquad \frac{\partial G}{\partial v}=\int_1^u (-t)\,e^{-vt^2}\,dt$$

och

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \frac{d}{dx}\,G(\sqrt{x},x)=\frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{u}\,e^{-vu^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}-\int_1^u t\,e^{-vt^2}\,dt\cdot 1\\
&= \frac{1}{2x}\,e^{-x^2}-\int_1^{\sqrt{x}} t\,e^{-xt^2}\,dt=\frac{1}{2x}\,e^{-x^2}+\left[\frac{1}{2x}\,e^{-xt^2}\right]_{t=1}^{t=\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{x}\,e^{-x^2}-\frac{1}{2x}\,e^{-x}.
\end{aligned}$$

Allmänt gäller att om f och f_1 är kontinuerliga i $[a,b]\times[c,d]$ och $\varphi,\psi\,:\,[a,b]\to\mathbf{R}$ är deriverbara, så är

$$x\mapsto F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

deriverbar på $[a,b]$ och

$$F'(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_1(x,y)\,dy\;+\;f(x,\psi(x))\,\psi'(x)\;-\;f(x,\varphi(x))\,\varphi'(x). \tag{4.2}$$

Övningar

4.1 Beräkna för $x>0$ uttrycket $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^1 e^{x+y}\,dy$, dels med formeln (4.2), dels genom direkt beräkning.

4.2 $\displaystyle J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\,d\theta$. Visa att J_0 satisfierar differentialekvationen

$$J_0{}''+\frac{1}{x}\,J_0{}'+J_0=0.$$

4.3 Sök en kontinuerlig funktion f som satisfierar integralekvationen

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(x-y)\, e^y \, dy.$$

4.4 Funktionerna f och g är definierade genom

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \, dt.$$

Visa att a) $f'(x) + g'(x) = 0$, b) $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$. c) Beräkna med ledning härav $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt$.

4.2 Likformig konvergens

Låt A vara en mängd i $\mathbf{R}^n$ (i praktiken är det oftast fråga om ett intervall på $\mathbf{R}$ eller en kurvbåge i $\mathbf{R}^n$). För $k = 1, 2, 3, \ldots$ låter vi f_k vara en (reell- eller vektorvärd) funktion, definierad i A. Detta ger oss en *funktionsföljd* $\{f_k\}_1^\infty$. Vi radar upp några exempel, som skall belysa utvecklingen i det följande. Läsaren uppmanas enträget att rita figurer till alla exemplen!

(a) $\quad A = [0, 1], \quad f_k(x) = \dfrac{kx}{k+x}$.

(b) $\quad A = [0, 1], \quad f_k(x) = kx\, e^{-kx}$.

(c) $\quad A = [0, 1], \quad f_k(x) = k^2 x\, e^{-kx}$.

(d) $\quad A = [0, \infty[, \quad f_k(x) = e^{-x^k}$.

För varje fixt värde på $x \in A$ får man en *talföljd* $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$. Denna kan ha ett gränsvärde, vars existens och värde i allmänhet beror på x; detta definierar i så fall en funktion på en del av eller hela A, som vi kallar f:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

I våra exempel inträffar följande:

(a) $f_k(x) = \dfrac{x}{1 + \dfrac{x}{k}} \to x$, dvs. $f(x) = x$ existerar i hela A.

(b) $f_k(x) = x\, \dfrac{k}{(e^x)^k} \to 0$ för alla $x \in A$.

(c) Precis som i (b) är $f(x) = 0$ för alla $x \in A$.

(d) Här finner man att $f(x) = 1$ om $0 \leq x < 1$, $= e^{-1}$ om $x = 1$ och $= 0$ om $x > 1$.

Man observerar i exempel (d) att trots att alla funktionerna f_k är kontinuerliga och trots att gränsfunktionen f är definierad för alla x, så är den diskontinuerlig. Man söker då efter någon sorts villkor, som försäkrar oss att sådana obehagligheter inte kan inträffa. Orsaken till det hela kan vara denna: vid gränsövergången har vi studerat ett x-värde i taget, och det skulle kunna tänkas att $f_k(x)$ går mot $f(x)$ *olika fort* för olika x. Den hittills betraktade typen av gränsövergång skulle kunna kallas *punktvis*. Vi gör nu en mer krävande konvergensdefinition, som innebär att man betraktar alla $x \in A$ samtidigt.

Definition 4.3 *Antag att* f_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *och* f *är definierade i en mängd* A *och att*

$$\sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \ \text{då} \ k \to \infty.$$

Då säger vi att $f_k \to f$ likformigt i A.

Likformig konvergens är alltså knuten till en *mängd* i definitionsområdet för de ingående funktionerna. Att tala om likformig konvergens i en *punkt* är meningslöst (eller i varje fall ointressant).

Likformig konvergens innebär alltså, att man till ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ kan finna ett N, som får bero på ε, *men inte på* x, så att för alla $n > N$ och alla $x \in A$ gäller att $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Av detta följer förstås att om $f_k \to f$ likformigt på A, så gäller speciellt punktvis konvergens för varje enskilt $x \in A$.

Vi studerar våra exempel igen.

(a) Här gäller $f_k(x) - f(x) = \dfrac{kx}{k+x} - x = \dfrac{-x^2}{k+x}$, så att

$$\sup_{0 \le x \le 1} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{0 \le x \le 1} \left| \frac{-x^2}{k+x} \right| = \sup_{0 \le x \le 1} \frac{x^2}{k+x} \le \frac{1^2}{k+0} = \frac{1}{k} \to 0,$$

då $\to \infty$. Konvergensen är alltså likformig.

(b) Här är $|f_k(x) - f(x)| = kx\,e^{-kx}$, vars supremum på $[0, 1]$ bestäms genom derivering: derivatan är $k(1 - kx)e^{-kx}$, som är noll endast för $x = 1/k$, där derivatan har teckenväxlingen $+0-$ och funktionen alltså maximum: $f_k(1/k) = k\,\dfrac{1}{k}\,e^{-1} = e^{-1}$, vilket inte går mot noll då $k \to \infty$. Konvergensen är alltså *inte* likformig.

(c) Helt analogt med (b) får man här att $\sup |f_k(x) - f(x)| = \dfrac{k}{e} \to \infty$ då $k \to \infty$. Konvergensen är inte heller här likformig.

Exempel (d) är en aning besvärligt att undersöka direkt. Frågan om likformig konvergens i detta fall kommer att avgöras på indirekt väg, sedan vi visat sats 4.4.

Vi skall nu nämligen visa, att den nya konvergenstypen löser det problem, som den uppställdes för att lösa.

Sats 4.4 *Antag f_k kontinuerliga i en mängd A och $f_k \to f$ likformigt i A. Då är gränsfunktionen f kontinuerlig i A.*

Bevis. Fixera $x_0 \in A$ och låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi skall visa att f är kontinuerlig i punkten x_0. Vi gör följande observationer:

(i) Eftersom $f_k \to f$ likformigt, finns det ett N så att för alla $k > N$ och alla $x \in A$ gäller $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Fixera ett sådant $k = k_0$.

(ii) Funktionen f_{k_0} är kontinuerlig i punkten x_0, dvs. det finns ett tal $\delta > 0$ så att för alla x som uppfyller $|x - x_0| < \delta$ gäller $|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

För alla x som uppfyller $|x - x_0| < \delta$ kommer då att gälla

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)|,$$

där den mellersta termen är mindre än $\frac{1}{3}\varepsilon$ på grund av (ii) och de övriga är mindre än $\frac{1}{3}\varepsilon$ på grund av (i). Totalt är alltså

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x \text{ sådana att} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Detta betyder precis att f är kontinuerlig i x_0, och eftersom x_0 kan vara en godtycklig punkt i A är satsen visad. □

Vårt exempel (b) ovan visar att satsens villkor inte är *nödvändiga*: gränsfunktionen *kan* vara kontinuerlig utan att konvergensen är likformig. Beträffande exempel (d) kan vi nu också säga att konvergensen inte kan vara likformig på $[0, \infty[$, eftersom gränsfunktionen inte är kontinuerlig.

En annan fråga som kan besvaras med hjälp av likformig konvergens är följande. Låt $[a, b]$ vara ett kompakt intervall, och antag att f_k är kontinuerliga på $[a, b]$; antag också att $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ för $a \leq x \leq b$. Gäller då säkert att

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \ ? \tag{4.3}$$

Vi återvänder till ett par av våra exempel.

(a) Här är $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,dx = \int_0^1 \frac{kx}{k+x}\,dx = \int_0^1 \left(k - \frac{k^2}{k+x}\right) dx$

$\displaystyle = k - k^2 \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = k - k^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O(k^{-3})\right) \to \tfrac{1}{2}$ då $k \to \infty$. Eftersom $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2}$, gäller (4.3).

(c) Här är (partiell integration) $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,dx = k^2 \int_0^1 x\,e^{-kx}\,dx = 1-(k+1)e^{-k} \to 1$, då $k \to \infty$, medan gränsfunktionen har integralen noll.

Följande sats gäller.

Sats 4.5 *Antag att f_k är kontinuerliga i ett kompakt intervall $[a,b]$ och att $f_k \to f$ likformigt i $[a,b]$. Då gäller att*

$$\int_a^b f_k(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

Bevis.

$$\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_k(x) - f(x))\,dx\right|$$
$$\le \int_a^b |f_k(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \sup_{[a,b]} |f_k(x) - f(x)|\,dx$$
$$= \sup_{[a,b]} |f_k(x) - f(x)| \cdot (b-a) \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

□

Observera att beviset kräver att intervallet har ändlig längd. Följande exempel visar att satsen inte är sann för oändligt integrationsintervall.

Exempel. Definiera $f_k(x)$ på $[0,\infty[$ genom att sätta $f_k(x) = x/k^2$ för $0 \le x \le k$, $= 2/k - x/k^2$ för $k \le x \le 2k$ och $= 0$ för $x \ge 2k$ (rita figur!) Grafen av f_k ser ut som en triangel med basen $2k$ och höjden $1/k$, så att den generaliserade integralen över $[0,\infty[$ är konvergent och har värdet 1. Men då $k \to \infty$, konvergerar f_k mot 0, likformigt på $[0,\infty[$, och gränsfunktionens integral är alltså 0.

I följande sats, som brukar kallas satsen om *dominerad konvergens*, har man ett tilläggsvillkor, som får det att fungera: alla funktioner i följden skall hålla sig under en fix funktion g, som har konvergent integral. Man säger att funktionsföljden är *dominerad* av funktionen g.

Sats 4.6 *Antag att f_k är kontinuerliga på ett intervall $[a,\infty[$, och att $f_k \to f$ likformigt på $[a,X]$ för alla $X > a$. Antag att det finns en fix kontinuerlig funktion g på $[a,\infty[$ sådan att*

$$|f_k(x)| \le g(x) \quad \textit{för alla } k, \textit{ alla } x, \textit{ och} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{konvergent.} \tag{4.4}$$

Då gäller

$$\int_a^\infty f_k(x)\,dx \to \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{då} \quad k \to \infty.$$

Bevis. Gränsfunktionen f är kontinuerlig på $[a, \infty[$ enligt sats 4.4 och därmed integrerbar på alla intervall $[a, X]$, $X > a$. Villkoret (4.4) medför att de generaliserade integralerna av f_k över $[a, \infty[$ är absolutkonvergenta, och detsamma gäller för integralen av f.

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet, och välj X så stort att $\int_X^\infty g < \varepsilon$. Då kan vi göra följande uppskattning:

$$\begin{aligned}
0 \le A_k &= \left| \int_a^\infty f_k - \int_a^\infty f \right| = \left| \int_a^\infty (f_k - f) \right| \le \left| \int_a^X (f_k - f) \right| + \left| \int_X^\infty (f_k - f) \right| \\
&\le \left| \int_a^X (f_k - f) \right| + \int_X^\infty |f_k| + \int_X^\infty |f| \le \left| \int_a^X (f_k - f) \right| + 2 \int_X^\infty g \\
&\le \left| \int_a^X (f_k - f) \right| + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Men på intervallet $[a, X]$ kan vi använda sats 4.4: $\int_a^X (f_k - f) \to 0$ då $k \to \infty$, vilket betyder att $|\int_a^X (f_k - f)| < \varepsilon$ för $k > k_0$; för alla tillräckligt stora värden på k är alltså $A_k < 3\varepsilon$. Eftersom ε kan väljas godtyckligt litet, har vi tillgodosett gränsvärdesdefinitionens krav så att $\lim A_k = 0$, och det är just påståendet i satsen.
□

Exempel. Bestäm $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos x/k}{1+x^2}\, dx.$

Lösning. $f_k(x) = \dfrac{\cos x/k}{1+x^2} \to \dfrac{1}{1+x^2}$ punktvis, då $k \to \infty$. För att undersöka likformigheten betraktar vi $|f_k(x) - f(x)| = \dfrac{1 - \cos \frac{x}{k}}{1+x^2}$ på ett intervall $[0, X]$. Om $k > \dfrac{X}{\pi}$, är täljaren $1 - \cos \dfrac{x}{k}$ växande på hela $[0, X]$ och vi kan uppskatta:

$$\sup_{[0,X]} |f_k(x) - f(x)| \le \frac{1 - \cos \frac{X}{k}}{1 + 0^2} = 1 - \cos \frac{X}{k} \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

vilket visar att konvergensen är likformig på $[0, X]$. Vidare är $|f_k(x)| \le \dfrac{1}{1+x^2}$ för alla k, och $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ är konvergent. Enligt satsen (med $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$) gäller då

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\cos x/k}{1+x^2}\, dx = \int_0^\infty \lim_{k\to\infty} \frac{\cos x/k}{1+x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Naturligtvis gäller motsvarande resultat för generaliserade integraler över intervall av typerna $]-\infty, b]$ och $]-\infty, \infty[$. Man kan även formulera liknande satser för generaliserade integraler av den typ där integranderna inte är begränsade.

Övningar

4.5 För vilka reella x existerar $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, och i vilka intervall är konvergensen likformig, om $f_n(x)$ ges av
a) x^n b) $(1-x^2)^n$ c) $(1-x^2)^{-n}$ d) $nx^2\,e^{-nx}$ e) $\dfrac{nx}{n+e^x}$
f) $\arctan nx$ g) $n^3 \sin^3 \dfrac{x}{n}$ h) $\dfrac{e^{n^2x}+1}{e^{n^2x}-1}$?

4.6 $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$. Konvergerar funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ likformigt a) på intervallet $[0,1]$? b) på intervallet $[1,\infty[$? c) Gäller det att $\lim \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$?

4.7 Visa att f_k konvergerar likformigt på alla intervall av typen $[\delta,\infty[$ där $\delta > 0$, om $f_k(x) = \dfrac{kx}{k^2x^2+1}$.

4.8 Beräkna a) $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \int_1^5 \frac{px}{p+x}\,dx$, b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{k}}{x}\,dx$,
c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\cdots+x^n}$.

4.9 Låt $f_n(x) = \dfrac{1}{2+(\tan x)^n}$, $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.

4.3 Funktionsserier

Ett viktigt fall av funktionsföljder är *funktionsserier*. En funktionsserie är informellt en summa av oändligt många termer, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, där u_k är funktioner, definierade i någon mängd A. Serien identifieras med *följden* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ av partialsummor $\sum_{k=1}^{n} u_k$. Serien konvergerar (punktvis) för ett visst x-värde, om motsvarande talföljd $\{s_n(x)\}_1^{\infty}$ är konvergent, och man får på detta sätt en summafunktion s, definierad av

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

för de x-värden, där den numeriska serien i högerledet är konvergent.

Exempel 1 Om $u_k(x) = x^k$, $x \in \mathbf{R}$, studerar vi alltså serien $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (nedre summationsgränsen behöver naturligtvis inte vara 1). Som bekant är denna serie konvergent precis om $|x| < 1$ och den har då summan $\dfrac{1}{1-x}$ (geometriska serien). I detta fall är alltså

$$s(x) = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Exempel 2 Funktionsserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ konvergerar omm $x > 1$. Någon sluten formel för summans värde är dock inte känd.

Precis som här det gäller funktionsföljderna i föregående avnitt är vi nu intresserade av *likformig* konvergens. Antag alltså att funktionerna u_k är definierade i någon mängd A. Då kan vi bilda $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, som blir nya funktioner, definierade i A. Om det gäller att $s_n \to s$ likformigt i A säger vi att funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergerar likformigt i A.

Om vi går tillbaka till definitionen innebär detta att $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett N så att

$$\sup_{x\in A} |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{för alla} \quad n > N.$$

Notera att

$$s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = \text{ seriens "svans".}$$

När det handlade om funktionsföljder, byggde vårt sökande efter likformig konvergens i konkreta fall oftast på att gränsfunktionen var explicit känd. När det gäller serier är detta sällan fallet. För det mesta använder man i stället följande sats, som ger ett *tillräckligt* (men ej nödvändigt) villkor.

Sats 4.7 ***(Weierstrass' majorantsats)*** *Antag att u_k är definierade i en mängd A och uppfyller $|u_k(x)| \le M_k$ för $x \in A$, där $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ är konvergent. Då är funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent i A.*

Bevis. Observera att vi i satsens förutsättning inte ens antar att vi vet att serien är punktvis konvergent! Detta följer emellertid av jämförelsekriteriet för numeriska serier: för ett fixt $x \in A$ gäller ju $|u_k(x)| \le M_k$, och $\sum M_k$ är konvergent; då är $\sum u_k(x)$ (absolut) konvergent. Det är då meningsfullt att studera seriens svans:

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k, \quad x \in A.$$

Eftersom summan längst till höger inte beror på x, har vi rentav

$$\sup_{x\in A} |s(x) - s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Men högerledet går här mot 0, då $n \to \infty$, ty $\sum M_k$ är konvergent. Detta är ju detsamma som att serien är likformigt konvergent på A. □

Vi återvänder till exemplen ovan.

(1) Eftersom $\sup_{]-1,1[} |x^k| = 1$, och $\sum 1$ är kraftigt divergent, kan vi inte visa likformig konvergens på $]-1,1[$. Om däremot $0 < a < 1$, gäller $|x^k| \le a^k$ på intervallet $[-a, a]$, och $\sum a^k$ är konvergent. Konvergensen är alltså likformig på $[-a, a]$.

(2) Om $a > 1$, kan vi visa likformig konvergens på $[a, \infty[$:

$$\left| \frac{1}{k^x} \right| \le \frac{1}{k^a} \text{ om } x \ge a, \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \text{ är konvergent.}$$

Likformig konvergens för serier har analoga konsekvenser med dem för funktionsföljder. Vi formulerar motsvarigheterna till satserna 4.4 och 4.5, och lämnar bevisen till den givetvis intresserade läsaren.

Sats 4.8 *Antag att u_k är kontinuerliga i en mängd A och att serien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergerar likformigt i A. Då är summafunktionen kontinuerlig i A.*

Sats 4.9 *Antag att u_k är kontinuerliga på det kompakta intervallet $[a, b]$ och att funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ är likformigt konvergent där. Då gäller*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_k(x)\, dx \right).$$

Övningar

4.10 Undersök följande funktionsserier med avseende på konvergens och likformig konvergens:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3 + x^{2k}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n^2 + x^2}\right)$

4.11 Visa att om $\alpha > \frac{1}{2}$, så är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1 + kx^2)}$ likformigt konvergent på hela $\mathbf{R}$.

4.12 Visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(\ln(1+x+n))^2}$ är likformigt konvergent på halvaxeln $[0, \infty[$.

4.13 Visa att $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ är kontinuerlig för $x \geq 0$. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

4.4 Dinis sats; begränsad konvergens

Satserna i avsnitt 4.2–3 kan många gånger vara besvärliga att använda direkt. I detta avsnitt ger vi ett par satser, som kan underlätta. Bevisen är dock ganska djupgående.

Först tar vi en sats som handlar om vad som kallas monotont konvergenta funktionsföljder. Vi säger att $f_n \to f$ monotont på en mängd A, om det endera gäller $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ för alla $x \in A$ och alla n eller också $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ för alla $x \in A$ och alla n.

Sats 4.10 ***(Dinis sats)*** *Antag att funktionerna f_n är kontinuerliga och konvergerar mot en* kontinuerlig *funktion f punktvis för alla x i ett kompakt intervall $[a, b]$. Antag att konvergensen är* monoton. *Då är konvergensen likformig på A.*

Bevis. Sätt $g_n = f_n - f$, som är kontinuerlig på $[a, b]$. Vi kan anta att g_n *avtar* mot 0, dvsför alla $x \in [a, b]$ gäller att $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande talföljd, som enligt förutsättningen går mot noll. Låt ε vara ett godtyckligt positivt tal. Låt M_n vara den mängd på $[a, b]$, där $g_n(x) \geq \varepsilon$:

$$M_n = M_n(\varepsilon) = \{x \in [a, b] \colon g_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Eftersom alla g_n är kontinuerliga, kommer M_n att vara en sluten mängd, närmare bestämt kompakt. Eftersom $g_n(x)$ är avtagande för alla x gäller dessutom att $M_{n+1} \subseteq M_n$. Vad vi vill visa är nu att för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N = N(\varepsilon)$ så att M_N

är tom. Det betyder nämligen att $g_n(x) < \varepsilon$ för alla $n \geq N$ och alla $x \in [a,b]$, vilket är precis definitionen av likformig konvergens.

Antag därför motsatsen, dvs. att för något positivt ε alla M_n är icketomma. Vi har då en svit av kapslade, icketomma kompakta mängder

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots .$$

Precis som i beviset för intervallkapslingssatsen i kapitel 2 inser man att det i så fall finns (minst) en punkt ξ i intervallet [a,b], som tillhör *alla* mängderna M_n. Detta innebär att $g_n(\xi) \geq \varepsilon$ för alla n. Men det strider mot att $g_n(x) \to 0$ för alla x i vårt intervall, och denna motsägelse innebär att satsen måste vara sann. □

För serier kan Dinis sats formuleras på ett mycket enkelt sätt. Att följden av partialsummor $s_n(x) = \sum_0^n u_k(x)$ är exempelvis växande är ju detsamma som att alla termerna är ickenegativa, dvs. att serien är vad man brukar kalla positiv. Observera dock att det finns en viktig svårighet vid tillämpning av denna sats: man skall veta att seriens summa (gränsfunktionen) är kontinuerlig. Detta är oftast svårt att kontrollera, eftersom man sällan har någon explicit formel för summan.

Sats 4.11 *Antag att funktionerna $u_k(x)$ är kontinuerliga och ≥ 0 på ett kompakt intervall $[a,b]$, att serien $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ är konvergent för alla $x \in [a,b]$ och att summan $s(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$. Då är serien likformigt konvergent på $[a,b]$.*

Många gånger kan satsen om gränsövergång under integraltecknet (sats 4.5) inte direkt användas, därför att konvergensen inte är riktigt likformig på hela intervallet. Det går att formulera en mer allmängiltig sats, som många gånger kan användas i stället: satsen om begränsad konvergens. I satsens lydelse förekommer villkoret att funktionerna skall vara *styckevis kontinuerliga*. Detta betyder att de är kontinuerliga frånsett eventuellt ändligt många språngpunkter i intervallet; villkoret är till för att man skall vara säker på att alla förekommande integraler är definierade.

Sats 4.12 ***(Satsen om begränsad konvergens)*** *Antag f_n och f definierade och styckevis kontinuerliga på ett kompakt intervall $[a,b]$, och att det finns en konstant M så att $|f_n(x)| \leq M$ för alla x och alla n. Antag att $f_n(x) \to f(x)$ punktvis på $[a,b]$. Antag vidare att man till varje tal $\varepsilon > 0$ kan finna ett delintervall (eller en union av flera delintervall) $I(\varepsilon)$ med (total-)längden $|I(\varepsilon)| < \varepsilon$ och så att f_n och f är kontinuerliga på $[a,b] \setminus I(\varepsilon)$ och $f_n \to f$ likformigt på samma mängd. Då gäller*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bevis. Låt ε vara ett positivt tal och välj $I(\varepsilon)$ som i satsens formulering. Eftersom konvergensen är likformig på återstoden av intervallet, kan vi använda sats 4.4 på denna, vilket t.exm̈edför att det finns ett N så att

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left| \int\limits_{[a,b]\setminus I(\varepsilon)} (f_n - f) \right| < \varepsilon.$$

Eftersom $|f_n(x)| \leq M$ och $f_n(x) \to f(x)$ för varje enskilt x, följer också att $|f(x)| \leq M$ för alla x. Det betyder att vi kan uppskatta differensen mellan integralerna över

$I(\varepsilon)$ så här:

$$\left|\int_{I(\varepsilon)} (f_n - f)\right| \le \int_{I(\varepsilon)} |f_n - f| \le \int_{I(\varepsilon)} \big(|f_n| + |f|\big) \le 2M \int_{I(\varepsilon)} dx < 2M\varepsilon.$$

Nu kan vi ta hand om integralerna över hela $[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_{[a,b]\setminus I(\varepsilon)} (f_n - f) + \int_{I(\varepsilon)} (f_n - f)\right|.$$

Med triangelolikheten ser vi nu att detta är mindre än $(2M+1)\varepsilon$ för $n > N$, och eftersom ε kan väljas godtyckligt litet följer satsen. $\square$

4.5 Derivering av serier

Vi har i avsnitt 4.3 funnit tillräckliga villkor för att man skall få integrera en serie term för term (sats 4.9). Hur är det då med *derivation*? Som följande exempel visar är det mer komplicerat.

Exempel. Sätt $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(12^n x)$. Denna serie är likformigt konvergent enligt Weierstrass' majorantsats på hela $\mathbf{R}$, och f är alltså en kontinuerlig funktion. Termerna i serien är dessutom deriverbara överallt, och man kan fråga sig om summan också blir det. Om man deriverar termvis får man emellertid serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cos(12^n x)$, som är svårartat divergent för t.ex. $x = 0$, eftersom termerna inte tillnärmelsevis går mot noll. Huruvida f är deriverbar kan inte avgöras. (I själva verket är den inte deriverbar för något enda x. Detta är ett klassiskt exempel av Weierstrass, det första exemplet på en funktion som är överallt kontinuerlig men ingenstädes deriverbar.)

Det är alltså inte tillräckligt att serien är likformigt konvergent; men det är inte heller nödvändigt. Man skall inte fokusera hela intresset på hur stora termerna är i serien. Följande sats gäller.

Sats 4.13 *Antag*

(i) *att funktionerna u_k har kontinuerliga derivator i intervallet $[a,b]$,*

(ii) *att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar punktvis i $[a,b]$ med summan $s(x)$,*

(iii) *att serien av derivator $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ konvergerar likformigt i $[a,b]$ med summan $t(x)$.*

Då är funktionen s deriverbar i $[a,b]$, och $s'(x) = t(x)$.

Bevis. Vi utgår från att

$$t(y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(y), \quad a \le y \le b, \tag{4.5}$$

där konvergensen är likformig på $[a, b]$. Då är den även likformig på alla delintervall $[a, x]$, där $a \le x \le b$, och vi kan integrera serien termvis enligt sats 4.8:

$$\int_a^x t(y)\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k'(y)\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \big[u_k(y)\big]_{y=a}^{y=b} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(u_k(x) - u_k(a)\big). \tag{4.6}$$

Men punktvis gäller ju att $\sum u_k(x) = s(x)$ för $a \le x \le b$, så att vi kan skriva

$$\int_a^x t(y)\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = s(x) - s(a). \tag{4.7}$$

Eftersom serien (4.5) konvergerar likformigt och u_k' är kontinuerliga enligt antagandet, är funktionen t kontinuerlig, och därmed är vänsterledet i (4.7) deriverbart med derivatan $t(x)$. Då måste förstås även högerledet vara deriverbart, och eftersom $s(a)$ är konstant får vi

$$s'(x) = t(x), \quad a \le x \le b.$$

□

Man kan säga att satsen säger att termvis derivering är tillåten, om den formellt deriverade serien är likformigt konvergent.

Om man granskar beviset ser man faktiskt att villkoret (ii) i satsens formulering är onödigt starkt. Det räcker med att man vet att $\sum u_k(x)$ konvergerar för ett enda x-värde. Om detta värde får tjänstgöra som punkten a, kommer nämligen konvergensen för alla andra x-värden att följa av formeln (4.6): vänsterledet där betyder ju något tal, och högerledet är differensen mellan två serier av vilka den första är känd som konvergent. Då är även den andra konvergent.

Övningar

4.14 Definiera $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \cos n\pi x$, $x > 0$. Visa att f är deriverbar för $x > 0$ och beräkna $f'(1)$.

4.6 Funktioner definierade av generaliserade integraler

I avsnitt 4.1 studerade vi funktioner, som var definierade med hjälp av integraler över ändliga intervall. Metoderna där kan inte utan vidare användas i fall man har att göra med *generaliserade* integraler. Eftersom sådana emellertid är mycket viktiga i många tillämpningar (t.ex. s.k. Laplacetransformer), är det önskvärt att man kan hantera dem också.

Först etablerar vi ett *jämförelsekriterium* för generaliserade enkelintegraler av typen $\int^{\infty} f$, som är analogt med motsvarande för serier.

Sats 4.14 *Antag att f, $g : [c, \infty[\to \mathbf{R}$ är integrerbara på varje intervall $[c, d]$, $d > c$, och antag att för någon konstant C gäller $0 \le f(x) \le Cg(x)$, $x \ge c$. Om nu integralen $\int_c^{\infty} g$ är konvergent, så är även $\int_c^{\infty} f$ konvergent.*

Beviset lämnas om övning.

Följande sats har analogier med både Weierstrass' majorantsats och satsen om kontinuitet hos summafunktionen vid likformig konvergens (satserna 4.7 och 4.8).

Sats 4.15 *Låt $D = [a, b] \times [c, \infty[$ och antag att $f : D \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig. Antag vidare att det finns en kontinuerlig funktion $g : [c, \infty[\to \mathbf{R}$ sådan att*

$$|f(x, y)| \leq g(y) \text{ för alla } (x, y) \in D \tag{4.8}$$

och

$$\int_c^\infty g(y)\, dy \text{ är konvergent.} \tag{4.9}$$

Då definierar formeln

$$x \mapsto F(x) = \int_c^\infty f(x, y)\, dy \tag{4.10}$$

en kontinuerlig funktion $F : [a, b] \to \mathbf{R}$.

Bevis. Att $F(x)$ existerar för alla $x \in [a, b]$ följer av (4.8), (4.9) och sats 4.14. För enkelhets skull antar vi att $c = 0$. Vi skall utnyttja kända resultat om likformigt konvergenta serier. Sätt

$$\varphi_k(x) = \int_{k-1}^k f(x, y)\, dy \quad \text{för} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Då gäller för $x \in [a, b]$

$$|\varphi_k(x)| \leq \int_{k-1}^k |f(x, y)|\, dy \leq \int_{k-1}^k g(y)\, dy = M_k,$$

och på grund av (4.9) och Weierstrass' majorantsats är serien $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x)$ likformigt (och absolut) konvergent på $[a, b]$. Men summan av denna serie är ju $F(x)$. Enligt sats 4.1 är vidare φ_k kontinuerlig för varje k, och satsen om kontinuitet för summafunktionen vid likformig konvergens (sats 4.8) ger påståendet. □

För derivering gäller följande sats, som är analog med sats 4.13.

Sats 4.16 *Låt området D vara som i sats 4.15 och $f : D \to \mathbf{R}$ kontinuerlig. Antag att $F(x) = \int_c^\infty f(x, y)\, dy$ är en konvergent integral för varje $x \in [a, b]$, att $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1(x, y)$ är kontinuerlig i D och att $|f_1(x, y)| \leq g(y)$ för alla $(x, y) \in D$, där g är en funktion sådan att $\int_c^\infty g$ är konvergent. Då är F deriverbar på $[a, b]$, och*

$$F'(x) = \int_c^\infty f_1(x, y)\, dy.$$

Bevis. Låt φ_k vara som i beviset för sats 4.15. Då är enligt sats 4.2

$$\varphi_k{}'(x) = \int_{k-1}^k f_1(x, y)\, dy.$$

På samma sätt som i beviset för sats 4.15 blir den formellt deriverade serien $\sum \varphi_k{}'$ likformigt konvergent på $[a, b]$, och sats 4.13 om derivering av serier ger påståendet. □

Exempel. Man vet att

$$\int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \tag{4.11}$$

Om $f(x,y) = e^{-xy}$, så är $f_1(x,y) = -y\,e^{-xy}$. Om $a > 0$, så gäller $x \geq a \Rightarrow |-y\,e^{-xy}| \leq y\,e^{-ay}$, och $\int_0^\infty y\,e^{-ay}\,dy$ är konvergent. Alltså är förutsättningarna i sats 4.16 uppfyllda (med $g(y) = y\,e^{-ay}$); man kan derivera likheten (4.11) och får för $x \geq a$

$$\int_0^\infty (-y)e^{-xy}\,dy = -\frac{1}{x^2}.$$

Eftersom a kan väljas hur nära 0 som helst, blir detta faktiskt sant för alla $x > 0$:

$$\int_0^\infty y\,e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Resonemanget kan upprepas och ger (induktionsbevis, t.ex.)

$$\int_0^\infty y^n\,e^{-xy}\,dy = \frac{n!}{x^{n+1}}, \;\; x > 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Satser analoga med 4.14–16 (och med analoga bevis) går även att ställa upp för andra typer av generaliserade integraler; det här behandlade fallet är dock nog det vanligaste.

Övningar

4.15 Visa att $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y \arctan xy}{(1+y^2)^2}\,dy$ är deriverbar för $x > 0$ och beräkna $F'(1)$.

4.16 Beräkna integralen $h(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$ för $x > 0$ genom att först derivera.

Blandade övningar på kap. 4

4.17 Bestäm $\displaystyle\inf_{x>0} \int_0^{1/x} x^2|y - \sqrt{xy}|\,dy$.

4.18 Visa att $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,dx = \ln(\alpha+1)$ om $\alpha > -1$.

4.19 Bestäm för $y > 0$ derivatorna av funktionerna

a) $y \mapsto \displaystyle\int_1^2 \arctan xy\,dx$ b) $y \mapsto \displaystyle\int_{1/y}^{2/y} \arctan xy\,dx$.

4.20 Beräkna andraderivatan av funktionen $y(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\ln t\,dt$, $x > 0$, och använd resultatet för att visa att $y(x)$ satisfierar en viss differentialekvation av andra ordningen.

4.21 Visa att funktionsserien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{2n}}{1 - x^{2n+1}}$ är likformigt konvergent på intervallet $[-a, a]$, om $0 < a < 1$.

4.22 Bestäm $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x^4 + (1/n)}}$.

4.23 Undersök om $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + e^{x/n}}$ existerar, och bestäm i så fall gränsvärdet.

4.24 Bevisa att $\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \frac{t \sin xt}{1+x^2}\, dx = 1$.

4.25 Antag f kontinuerlig i $[0, 2]$. Sätt $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $0 \le x \le 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Tydligen gäller $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ i hela $[0, 1]$. Är konvergensen likformig i intervallet? Bevis eller motexempel!

4.26 Undersök funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^x}$ med avseende på likformig konvergens i olika intervall.

4.27 Visa att $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)+x}$ existerar, och beräkna gränsvärdet.

4.28 Visa att $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. (Ledning: utveckla $\frac{1}{e^x - 1}$ efter potenser av e^{-x}.)

4.29 $f(x) = \int_0^\infty e^{-y^2} \cos 2xy\, dy$. Visa att f satisfierar differentialekvationen $f'(x) + 2x\, f(x) = 0$, och använd detta och resultatet i övning 4.4 sid. 28 för att visa att $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-x^2}$.

4.30 Låt $f(x, y) = (2 - xy)xy\, e^{-xy}$. Visa att

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty f(x, y)\, dy \neq \int_0^\infty dy \int_0^1 f(x, y)\, dx.$$

Svar till övningsuppgifter

KAPITEL 1

1.1. a) Öppen; randen är x-axeln.
b) Inga inre punkter, randen är hela $\mathbf{R}$. Varken öppen eller sluten.
c) Öppen mängd, randen består av de två linjerna $x = 0$ och $x = 1$.
d) Öppen, randpunkter är punkterna 0 och 1.
e) Inga inre punkter, randpunkter är intervallet $[0, 1]$ på x-axeln; varken öppen eller sluten.
f) Öppen. Randen består av två hyperbelgrenar.

1.2. $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} =$ slutna enhetscirkeln.

1.4. a) Motexempel: Låt $M =]0, 1[\cup]1, 2[$ på $\mathbf{R}$. Då är $\overline{M} = [0, 2]$, $\partial M = \{0, 1, 2\}$, $\partial\overline{M} = \{0, 2\}$.
b) Ja.

1.5. Tag t.ex. $O_k =]-1/k, 1/k[$. Då är $\bigcap_{k=1}^{\infty} = \{0\}$.

1.7. Tag t.ex. $F_k = [1/k, 1 - 1/k]$. Då är $\bigcup_{k=1}^{\infty} =]0, 1[$.

1.8. a) Sant, b) falskt, c) falskt, d) sant.

KAPITEL 2

2.1. a) $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ b) –6, 0 c) –1, 0, 1, 2

2.2. a) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1 b) –1, 1 c) –1, 0, 1 d) $-e$, e e) $1/e$, e f) $1/\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ g) $\pm 1/\sqrt{2}$
h) $\pm\sqrt{3}/2$ i) $[-1, 1]$ j) $\mathbf{R}$

2.3. Alla punkter på enhetscirkeln.

2.6. a) e,$-e$ b) e, $1/e$ c) $1/\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ d) $1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$

KAPITEL 3

3.1. T.ex. $A = \mathbf{R}$, $f(x) = \arctan x$.

3.2. T.ex. $B =]0, 1]$, $f(x) = 1/x$.

3.6. Nej.

3.10. b) T.ex. $f : \mathbf{R} \to]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \arctan x$.

3.11. Nej. (T.ex. $f(x) = \sin x^2$.)

3.12. Ja! Ja!

3.14. $\sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$

KAPITEL 4

4.1. $e^x(e - 1 - x)$.

4.3. $\frac{1}{2}(1 + e^{2x})$.

4.4. c) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

4.5. a) $f(x) = 0$, $-1 < x < 1$, $f(1) = 1$. Likf. i $[a, b]$ om $-1 < a < b < 1$.

b) $f(x) = 0$, $0 < |x| < \sqrt{2}$, $f(0) = 1$. Likf. i $[a, b]$ om $0 < a < b < \sqrt{2}$ eller $-\sqrt{2} < a < b < 0$.

c) $f(x) = 0$, $|x| > \sqrt{2}$, $f(0) = 1$. Likf. i $[a, \infty[$ om $a > \sqrt{2}$ och i $]-\infty, b]$ om $b < -\sqrt{2}$.

d) $f(x) = 0$, $x \geq 0$. Likf. på $[0, \infty[$.

e) $f(x) = x$ för alla x. Likf. på $]-\infty, b]$ för varje ändligt b.

f) $f(x) = \pi/2$ för $x > 0$, $= -\pi/2$ för $x < 0$, $f(0) = 0$. Likf. på $[a, \infty[$ om $a > 0$ och på $]-\infty, b]$ om $b < 0$.

g) $f(x) = x^3$ för alla x. Likf. på alla kompakta intervall.

h) $f(x) = 1$ för $x > 0$, $= -1$ för $x < 0$. Likformigt som i f).

4.6. a) Nej. b) Ja. c) Ja.

4.8. a) 12. b) 1. c) $\frac{1}{2}$

4.9. $\pi/8$

4.10. a) Likf. på hela $\mathbf{R}$. b) Konv. på $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, likf. på varje kompakt del av detta intervall som undviker origo. c) Likf. på hela $\mathbf{R}$.

4.13. Integralen $= 1$

4.14. $f'(1) = \dfrac{e}{(e+1)^2}$

4.15. $F'(1) = \pi/16$

4.16. $h(x) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x$.

4.17. $\frac{1}{2}(1 - 2^{-1/3})$

4.19. a) $\dfrac{1}{2y^2} \ln\left(4 - \dfrac{3}{1+y^2}\right)$ b) $\dfrac{1}{y^2}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\pi - 2 \arctan 2\right)$

4.20. $y'' + y = \ln x$.

4.22. $\pi/4$.

4.23. $\pi/2$

4.25. Konvergensen *är* likformig på $[0, 1]$.

4.26. Likformig konvergens på $[a, 2]$ om $0 < a < 2$.

4.27. 1