UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

BLANDADE PROBLEM 1
Flervariabelanalys F1,
KandMa1, KandFy1 och Gylärare
Vårterminen 2011

1. Skissera kurvan $\mathbf{r}(t) = e^{-t/6}\cos(t)\,\mathbf{i} + e^{-t/6}\sin(t)\,\mathbf{j}\,,\ \ 0 \le t < \infty\,,$ i planet. Bestäm längden $s(t)$ av den del av kurvan som ligger mellan $\mathbf{r}(0)$ och $\mathbf{r}(t)$. Finn båglängdsparametrisering av kurvan.

2. Avgör om följande gränsvärden existerar och, om så är fallet, beräkna dem:

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2y}{x^2 + y^2 + xy}$,

(ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \dfrac{\sin(|\,\mathbf{x}|^2)}{|\mathbf{x}|^2 + x_1x_2x_3}$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ och $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,.$

3. I vilka punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ är funktionen f kontinuerlig, resp. differentierbar, om $f(0, 0, 0) = 0$ och

$$f(x, y, z) = \frac{xyz - z^2y - x^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

4. Funktionen $f(x, y)$ är definierad i cirkelskivan $x^2 + y^2 < \pi$ genom $f(0, 0) = 0$ och

$$f(x, y) = \frac{\sin(x)\,\sin^3(y)}{\sin(x^2 + y^2)} \qquad \text{om} \qquad 0 < x^2 + y^2 < \pi \quad .$$

I vilka punkter är $f(x, y)$ differentierbar?

5. Genom en punkt P på enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ läggs tangentplanet. Detta visar sig innehålla punkterna $(5, 0, 0)$ och $(0, 5, 0)$. För vilka punkter P kan detta inträffa?

6. Bestäm alla punkter på funktionsytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $\pi : x + y + z - 1 = 0\,.$ Tangerar planet π ytan?

7. Bestäm tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $x^2 - y^2 - z^2 = -1$ och $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ i punkten $(1, 1, 1)$.

8. En C^1-funktion $f(x, y)$ har i punkten $(1, 1)$ riktningsderivatan m.a.p. vektorn $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad ,$$

samt riktningsderivatan m.a.p. vektorn $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$

$$D_{\mathbf{v}}f(1, 1) = -\frac{4}{\sqrt{5}} \qquad .$$

I vilken riktning växer $f(x, y)$ snabbast i punkten $(1, 1)$ och med vilken tillväxthastighet?

V.g.v!

9. Transformera uttrycket $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ genom att införa nya oberoende variabler u och v sådana att $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

10. Antag att f är en funktion som uppfyller differentialekvationen

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad ((x,y) \neq (0,0)) \ .$$

Bevisa att för varje $a > 0$ är cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ en nivåkurva för f (eller en del av en sådan nivåkurva).

11. Visa att ekvationen $x^{12}y^{13} - e^z \cos(yz) = 0$ definierar z som en funktion av (x, y), $z = z(x, y)$ i någon omgivning av punkten $(1, 1, 0)$ samt beräkna $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ och $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

12. Bestäm tangentriktningen till skärningskurvan mellan ytorna $y + z + 2e^{x+z} = 3$ och $x + z + e^{2y+z} = 1$ i punkten $(-2, -1, 2)$. Undersök även om kurvan kan parametriseras i en omgivning av denna punkt med variabeln z som parameter.

13. Bestäm den allmänna lösningen $f = f(x, y)$ av klass C^2 till den partiella differentialekvationen

$$x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = y$$

i området $y > 0$ genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} u = y \\ v = xy \end{cases} .$$

14. Är avbildningen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

bijektiv i en omgivning av $(1, 1)$? Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$ och $\frac{\partial x}{\partial u}(0, 2)$. (Ledning: använd Inversa Funktionssatsen.)

Svar:

1. $s(t) = \sqrt{37}(1-e^{-t/6})$, $\mathbf{r}(s) = \left((1 - \frac{s}{\sqrt{37}})\cos(-6\ln(1 - \frac{s}{\sqrt{37}})),\ (1 - \frac{s}{\sqrt{37}})\sin(-6\ln(1 - \frac{s}{\sqrt{37}}))\right)$.
2. (i) 0, (ii) 1. 3. Kontinuerlig i $\mathbb{R}^3$, differentierbar i $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. 4. Differentierbar i hela skivan $x^2 + y^2 < \pi$. 5. $P_{1,2} = (\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \pm\frac{\sqrt{23}}{5})$ (två punkter). 6. $P = (-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ \frac{5}{16})$. Nej, planet tangerar inte ytan. 7. $(x, y, z) = (1 + t, 1 + 4t, 1 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. 8. I riktningen $\frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$ med tillväxthastigheten $\sqrt{13}$. 9. $\frac{1}{2(u^2+v^2)}\left((u + v)\frac{\partial g}{\partial u} + (u - v)\frac{\partial g}{\partial v}\right)$. 11. $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 12$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 13$. 12. $\vec{T} = (-4, -1, 3)$. 13. $f(x, y) = -xy\ln(y) + G(y) + K(xy)$, där $G(t), K(t)$ - godtyckliga C^2-funktioner av 1 variabel. 14. Ja. $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial x}{\partial u}(0, 2) = \frac{1}{4}$.