UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

BLANDADE PROBLEM 2
Flervariabelanalys F1,
KandMa1, KandFy1,
Gylärare
Vårterminen 2011

1. Låt a vara en reell konstant och sätt $f(x,y) = ax^2y + (x-y)^2 - 2ax - ay$. Visa att $(1,1)$ är en stationär punkt för f. Avgör karaktären hos denna stationära punkt för alla a.

2. Bestäm alla stationära punkter för funktionen $f(x,y,z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - xy$ och avgör deras karaktär.

3. Bestäm, om de existerar, största och minsta värdet av $f(x,y) = x(x+y^2-4)$ på mängden $4x^2 + 2y^2 \leq 9$.

4. Bestäm, om de existerar, största och minsta värdet av $g(x,y) = e^{x+y}(4-x^2-y^2)$ på $\mathbb{R}^2$.

5. Undersök om funktionen $h(x,y) = x^3\, e^{-x^2-2y^4}$ antar största och/eller minsta värden på $\mathbb{R}^2$ och bestäm i så fall dessa värden.

6. Bestäm, om de existerar, största och minsta värden av funktionen $f(x,y,z) = xy + yz$ i halvklotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0$.

7. Undersök om funktionen $f(x,y,z) = yz$ antar största och/eller minsta värden på skärningskurvan mellan ytorna $x^2+2y^2-3z^2 = 1$ och $x^2+y^2+2z^2 = 2$, och bestäm i så fall dessa värden.

8. Visa att sambandet

$$x^5y^6 + z - 5xye^z - y + x^2 - 2x = -6$$

definierar z som en funktion av (x,y) i en omgivning av punkten $(x,y,z) = (1,1,0)$. Visa också att $(1,1)$ är en stationär punkt till denna funktion och bestäm dess karaktär.

Facit:

1. $a < 0:$ en sadelpunkt,
$a = 0:$ ett lokalt minimum (ej strängt),
$0 < a < 3:$ ett strängt lokalt minimum,
$a = 3:$ ej lokal extrempunkt,
$3 < a:$ en sadelpunkt.

2. $P = (0,0,0)$, ett strängt lokalt minimum.

3. $\text{Max}_D f = 33/4$, $\quad \text{Min}_D f = -15/4$.

V.g.v!

4. $\mathrm{Max}_{\mathbb{R}^2} f = 2e^2$, inget minimum.

5. $\mathrm{Max}_{\mathbb{R}^2} h = (3/2)^{3/2}\, e^{-3/2} = h(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0)\,,\qquad \mathrm{Min}_{\mathbb{R}^2} h = -(3/2)^{3/2}\, e^{-3/2} = h(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0)\,.$

6. $\mathrm{Max}_D f = 1/\sqrt{2}\,,\qquad \mathrm{Min}_D f = -1/\sqrt{2}\,.$

7. $\mathrm{Max}_C f = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}\,,\qquad \mathrm{Min}_C f = -\dfrac{2\sqrt{6}}{7}\,.$

8. Ett strängt lokalt minimum.