UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

Flervariabelanalys F1,
KandMa1, KandFy1, Gylärare
Vårterminen 2011

# Inlämningsuppgift nr 3

Inlämnas senast fredagen den 29 april 2011, kl.18.00
i respektive gruppl ärares postfack.

**1.** Beräkna ytintegralen $I = \iint_{\mathscr{S}} f\, dS$ av funktionen $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{1}{2} + y^2}$ över ytan $\mathscr{S}$ som ges av $x^2 + 2y^2 = 1,\ \ 0 \le z \le x^2 + y^2$. (Ledning: parametrisera ytan.) (5p)

**2.** Givet är ett vektorfält

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (z\,e^y + Ay\,e^x)\cdot \mathbf{i} + \big(x^2 z + B(zy^3 - y^2\,e^x)\big)\cdot \mathbf{j} + \big(3y^2 z^2 + x\cos(xy)\big)\cdot \mathbf{k}$$

på $\mathbb{R}^3$, där $A, B \in \mathbb{R}$ är reella konstanter. Avgör för vilka värden av konstanterna $A$ och $B$ har vektorfältet $\mathbf{G}$ **en vektorpotential** dvs. för vilka $A$ och $B$ finns det ett vektorfält $\mathbf{H}$ på $\mathbb{R}^3$ s.a. $\mathbf{curl}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$. Finn en sådan vektorpotential $\mathbf{H}$ i varje förekommande fall. (Ledning: Läs stycket “Scalar and Vector Potentials” i Adams, s.898-900, och speciellt Exempel 1, s.900.) (5p)

**3.** (a) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,(x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j} + z\cdot\mathbf{k})$ genom sfären $x^2+y^2+z^2 = a^2,\ (a>0)$. Sfären är orienterad med normalen pekande bort från origo. (3p)

(b) Låt $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x,y,z)$ vara ett vektorfält (av klass $C^1$) definierat i en öppen omgivning av enhetssfären $\mathcal{S}_1 :\ x^2+y^2+z^2 = 1$ och låt $\mathbf{G} = \mathbf{curl}(\mathbf{H})$ vara $\mathbf{H}$:s rotation. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{G} = \mathbf{curl}(\mathbf{H})$ genom enhetssfären $\mathcal{S}_1$ orienterad med normalen pekande bort från origo. (Ledning: dela upp sfären i t.ex. två hemisfärer som har en ekvator som gemensam rand och beräkna flödet genom var och en av hemisfärerna. Motivera noggrant!) (2p)

(c) Beräkna divergensen $\mathbf{div}(\mathbf{F})$ av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ från del (a) av uppgiften. (1p)

(d) Har vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)$ från del (a) **en vektorpotential** i $\mathbb{R}^3 - \{\text{origo}\}$ dvs. finns det något vektorfält $\mathbf{H}$ definierat i $\mathbb{R}^3 - \{\text{origo}\}$ sådant att $\mathbf{F} = \mathbf{curl}(\mathbf{H})$ ? (Se ledningen i uppgift 2 ovan och referenser där.) (1p)

**4.** Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (2yz\,e^{y^2},\ yz + xz^4,\ e^{z^2} - e^{y^2})$, där $C$ är skärningskurvan mellan ytorna $2y = x^2 + 2z^2 + 1$ och $x^2 + 2x + 2z^2 = 1$. Kurvan $C$ är orienterad så att dess omloppsriktning i punkten $(-1,2,1)$ ges av vektorn $(-1,1,0)$. (5p)