UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

Vårterminen 2008

Flervariabelanalys

för

F1, KandMa1 och KandFy1

Lektionsanvisningar till Lektionerna 10 - 15

Obs : Den planering till Lektionerna 10 till 12 som finns nedan är något ändrad jämfort med den ursprungliga som ni fick vid kursstarten.

Inför lektion nr 10

Till lektion nr 10 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.15.1, s.811: **2, 3, 5, 13,**
avs.15.2, s.819-820: **1-5,**
avs.15.3, s.824: **1, 2, 8,**
avs.15.4, s.831-832: **1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13.**

Inför lektion nr 11

Till lektion nr 11 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.16.3, s.868: **1, 2, 3, 5.**

samt

1. Beräkna kurvintegralen
$$\int_C (e^{x+y} - y)\,dx + (e^{x+y} - 1)\,dy$$
längs halvcirkelbågen i första kvadranten från origo till punkten $(1, 0)$.

2. Beräkna
$$\int_C (2xy - x^2 + y^2 \sin xy^2)\,dx + (x + y^2 + 2xy \sin xy^2)\,dy,$$
där C är den positivt orienterade randen till området $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

3. Beräkna
$$\int_C \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{x^2+y^2+2x+1},$$
där C är kurvan $|x|+|y|=4$, genomlöpt ett varv i positiv led.

4. Bevisa att kurvintegralen
$$\int_C (3x^2+2xy-2x-y+1)\,dx + (x^2-x)\,dy,$$
där C är en väg från punkten $(0,a)$ till punkten $(1,b)$, är oberoende av valet av a, b och C; och bestäm integralens värde.

5. Bestäm en enkel, sluten, kontinuerligt deriverbar kurva Γ i planet orienterad moturs så att
$$\oint_\Gamma (4y^3+y^2x-4y)\,dx + (8x+x^2y-x^3)\,dy$$
blir så stor som möjligt och beräkna integralen för denna kurva.

(Svar: **1.** $e-1-\pi/8$. **2.** $\frac{1}{30}$. **3.** -2π. **4.** 1. **5.** Kurvan är $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ i positiv led. Integralen blir 12π.)

Inför lektion nr 12

Till lektion nr 12 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.15.5, s.842: **4, 7, 8, 13,**

samt:

• Beräkna arean av en *sfärisk zon*, dvs. den del av en sfär som ligger mellan två parallella plan. Konkret: den yta som beskrivs av $x^2+y^2+z^2=a^2$, $b \le z \le c$. (Resultatet är på ett visst sätt lite överraskande. Hur då?)

Vidare

avs.15.6, s.848: **1, 2, 5, 7.**

Slutligen

blandade övningar på sidan 4 i detta häfte, nummer 1, 2, 3.

Inför lektion nr 13

Till lektion nr 13 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.16.1, s.858: **3, 6, 7,**

avs.16.4, s.873-874: **1, 2, 6,**

avs.16.5, s.878-879: **2, 3, 4, 8**

och

blandade övningar på sidorna 4-5 i detta häfte, nummer 8, 9, 13, 14, 18, 19.

Inför lektion nr 14

Förkortningen **AV** nedan refererar till Anders Vretblads häfte ‘**“Topologi och konvergens” (1997 års upplaga, översedd 2008)**.

Till Lektion nr 14 bör ni förbereda följande uppgifter:

AV: 2.1 (a),(c), 2.2 (b),(e),(f), 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.8, 4.1, 4.2,

samt

1. Beräkna andraderivatan av funktionen

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\ln(1+t^2)\ dt$$

   och visa att funktionen satisfierar differentialekvationen

$$y'' + y = \ln(1+x^2)\ \ .$$

2. Beräkna för $y > 0$ integralen $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-2}\,dx$ genom derivering av $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-1}\,dx$.

3. Beräkna för $a > 0$ och $b > 0$ integralen

$$\int_0^{\pi/2} (a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-2}\ dx$$

   med hjälp av de partiella derivatorna med avseende på a och b av

$$\int_0^{\pi/2} (a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-1}\ dx\ .$$

4. Uppgift 4.15 i **AV** (för denna uppgift behöver(?) ni kanske fräscha upp lite grann era kunskaper i hur man integrerar rationella funktioner av en variabel).

Svar: 2. $\dfrac{\pi}{4y^3}$. 3. $\dfrac{\pi}{4ab}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$. 4. $F'(1) = \dfrac{\pi}{16}$.

Inför lektion nr 15

(Förkortningen **AV** nedan refererar till Anders Vretblads häfte '**"Topologi och konvergens" (1997 års upplaga, översedd 2008)**.)

Till Lektion nr 15 bör ni förbereda följande uppgifter:

AV: 4.5 (a),(d),(e),(g), 4.8 (a),(b), 4.9, 4.10 (a),(c), 4.11, 4.12, 4.13.

Blandade övningar på kurv- och ytintegraler

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $4z = x^2 + y^2$ som skärs ut av cylindern $z = y^2$ och planet $z = 3$.
2. Beräkna arean av den del av planet $x + 2y + z = 1$ som skärs ut av cylindern $x^2 + y^2 = 1$.
3. En del S av konen med ekvation $x^2 + y^2 = z^2$ ligger över xy-planet och dess projektion på xy-planet har area A. Visa att arean av S är $A\sqrt{2}$.
4. Antag att ytan S har ekvationen $z = h(x, y)$, där $(x, y) \in D$ och D är ett område i $\mathbb{R}^2$. Visa att arean av S ges av
$$\iint_D \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy.$$
5. S betecknar ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, med normalen riktad från origo. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(y - 1)\mathbf{k}$ genom S.
6. Låt C vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 - x = 0$ och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + x\mathbf{k}$ och C genomlöps så att riktningen i $(1, 0, 0)$ ges av vektorn $(0, 1, 0)$.
7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + (z^2 + 2)\mathbf{k}$ ut ur cylindern $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.
8. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + y^2e^z\mathbf{j} + (2y - 2ye^z)\mathbf{k}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första oktanten (dvs. $x, y, z > 0$). Normalriktningen antas ha positiv z-komponent.
9. Beräkna $\left|\int_C (z - x)^2\, dx + (z + x)^2\, dy + z^2\, dz\right|$, där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $2x + y + z = 2$.
10. S är en sluten yta (med utåtriktad normal) för vilken Gauss' sats (divergenssatsen) är tillämplig, och $\mathbf{F} = (2x + y - \frac{1}{3}x^3)\mathbf{i} + (y - 4yz^2)\mathbf{j} + (z - 4y^2z)\mathbf{k}$. Bestäm, under dessa förutsättningar, det maximala värdet av $\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$.

11. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, då $\mathbf{F} = \sin x^2\mathbf{i} + (y - 2xy\cos x^2)\mathbf{j} + (1 + y + z)\mathbf{k}$, och S är den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geq 0$ och $z \geq 0$. Ytans positiva normalriktning bildar icke-trubbig vinkel med positiva z-axeln.

12. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. C är en styckvis deriverbar sluten kurva på cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och skär inte sig själv. Beroende på hur C löper på ytan (bara ett varv, givetvis), kan $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ anta tre olika värden. Beskriv de tre fallen och bestäm de tre värdena.

13. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, där S är halvellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$, med uppåtriktad normal, och $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$.

14. Beräkna flödet av vektorfältet $xy\mathbf{i}+xyz\mathbf{j}+(x+2y+3z)\mathbf{k}$ ut ur volymen $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

15. Beräkna $\left|\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz\right|$, där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $2x + 2y + z = 3$.

16. Beräkna med hjälp av Stokes' sats $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = (yz+y-z)\mathbf{i}+(xz+5x)\mathbf{j}+(xy+2y)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2 = 1$ och $x+y = 1$. C är orienterad så att dess omloppsriktning i punkten $(1, 0, 0)$ ges av vektorn $(0, 0, 1)$.

17. Visa att $\displaystyle\int_C (2xy + z^2)\,dx + (2yz + x^2)\,dy + (2xz + y^2)\,dz$ är oberoende av vägen mellan två givna punkter A och B.

18. Låt S vara den del av cylindern $x^2+y^2 = 1$ som ligger mellan planen $z = 0$ och $z = x+2$. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$, om $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

19. Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F} = (xy + z)\mathbf{i} + y^2z^3\mathbf{j} + (\tfrac{1}{2}x^2 + z^2)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + 2y^2 = 1$ och $z = y + 1$. C:s omloppsriktning är positiv (moturs) sett från origo.

Svar:

1. $\frac{56}{9}\pi$. 2. $\pi\sqrt{6}$. 5. 0. 6. $-\pi/4$. 7. $\pi/3$.
8. $e - \frac{5}{2}$. 9. 0. 10. $\frac{64}{15}\pi$. 11. π. 12. 0, π, $-\pi$.
13. 0. 14. 28π. 15. 5π. 16. $-\pi\sqrt{2}/4$. 18. 2π.
19. $\pi/\sqrt{2}$.