UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

Vårterminen 2009

Flervariabelanalys

för

F1, KandMa1, KandFy1 och Gylärare

Kurslitteratur

Robert A. Adams, Calculus: a complete course, 6th ed., Addison Wesley, 2006. Följande avsnitt ingår i kursen: Kap. 10.1-6; 11.1,3; 12.1-9; 13.1-3,5; 14; 15; 16.1-5.
Anders Vretblad: Topologi och konvergens (1997 års upplaga, översedd 2008).

Kurshemsida: http://www.math.uu.se/staff/pages/index.php?uname=ryszard

Undervisning

Undervisning sker i form av föreläsningar (35 st) och lektioner (15 st). En del av föreläsningarna kommer att ägnas åt räkneövningar med genomgång av problem och uppgifter.

Preliminär tidsplan

Föreläsning	Kapitel	
1-2	Kap.10	Introduktion. Koordinatgeometri i rummet. Kvadratiska former och andragradsytor.
3-4	Kap.11	Vektorvärda funktioner av en variabel och rumskurvor.
5-10	Kap.12	Funktioner av flera variabler: kontinuitet, partiella derivator, differentierbarhet, kedjeregeln, gradient, riktningsderivata, inversa- och implicita funktionssatsen, Taylorserier.
11-12		Problemdemonstration: Kapitel 10-12.
13-14	Kap.13	Lokala egenskaper hos kritiska punkter. Globala extremvärdesproblem. Extremvärdesproblem med bivillkor, Lagranges multiplikatorer.
15		Problemdemonstration: Kapitel 13.
16-20	Kap.14	Multipelintegraler: itererade integraler, generaliserade integraler, variabelbyte.
21		Problemdemonstration: Kapitel 14.
22-24	Kap.15	Vektorfält, konservativa vektorfält. Kurvintegraler. Ytor och ytintegraler.
25-27	Kap.16	Vektoranalys: divergens och rotation, Greens sats, Gauss sats och Stokes sats.
28-29		Problemdemonstration: Kapitel 15-16.
30-32		Likformig kontinuitet. Derivering av integraler med parametrar. Funktionsföljder och funktionsserier. Punktvis konvergens och likformig konvergens.
33		Problemdemonstration.
34-35		Repetition.

V.g.v!

Inlämningsuppgifter

Under kursens gång kommer inlämningsuppgifter att delas ut. Lösningarna skall vara prydligt skrivna för hand. Om 40% resp. 70% av inlämningsuppgifterna är korrekt lösta får man 1 resp. 2 bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Examination

En (frivillig) kontrollskrivning (dugga) äger rum i början av period 4. Om man har klarat duggan får man 2 bonuspoäng. Även dessa adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Resultatet från duggan samt bonuspoängen från inlämningsuppgifterna tillgodoräknas enbart vid det första tentamenstillfället.

Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna redogöra för begreppen gränsvärde, kontinuitet, partiell derivata, gradient och differentierbarhet för funktioner av flera variabler;
- kunna parametrisera kurvor och ytor;
- kunna beräkna partiella derivator till elementära funktioner;
- kunna använda sig av partiella derivator för att beräkna lokala och globala extremvärden - med eller utan bivillkor;
- kunna redogöra för multipelintegralens definition, beräkna multipelintegraler samt använda sig av multipelintegraler för att beräkna volymer, tyngdpunkter, m.m;
- kunna redogöra för begreppen kurv- och ytintegral samt kunna beräkna sådana integraler;
- kunna använda sig av Greens, Stokes och Gauss satser;
- känna till begreppen likformig konvergens och likformig kontinuitet, samt kunna avgöra om en enkel funktionsföljd är likformigt konvergent;
- kunna exemplifiera och tolka viktiga begrepp i konkreta situationer;
- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område;
- kunna översätta problem från relevanta tillämpningsområden till för matematisk behandling lämplig form;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa problem inom kursens område;
- kunna presentera matematiska resonemang för andra.

Tips

- Bearbeta varje föreläsning, helst samma dag men senast till nästa föreläsning, genom att läsa och skriva rent dina föreläsningsanteckningar och genom att läsa de motsvarande avsnitten i kursboken. Anteckna det som är oklart. Fråga vid nästa undervisningstillfälle.
- Diskutera uppgifter och teori med dina kurskamrater. Om något är oklart under en föreläsning eller en lektion, fråga direkt.
- Inför lektionerna, gör så många uppgifter du hinner (bland de som finns angivna på den utdelade listan) **före** lektionen. På själva lektionen kan du då be om hjälp med sådana uppgifter som du har fastnat på.
- Ta vara på den s k Mattesupporten. Den är schemalagd i sal P2144 måndagar - torsdagar kl.17.00 - 19.00, från och med den 19.1.2009 till och med den 4.6.2009 med uppehåll vecka 15 (påskveckan) och den 30.4. Där finns amanuenser att fråga om man behöver hjälp.

Uppsala, den 16 januari 2009.

Ryszard Rubinsztein
Georgios Dimitroglou Rizell
Marcus Eriksson

Lektionsanvisningar

Inför lektion nr 1

Till lektion nr 1 bör ni **förbereda (dvs lösa) följande uppgifter:**

avs.10.1, s.542-543: 3, 5, 6, 10, 15-19, 21, 22, 25-29, 31,

avs.10.5, s.570-571: 1, 3, 5-15, 17, 19,

avs.11.1, s.597-598: 1-5, 7, 9, 17.

Ett frivilligt moment: avs.10.6, s.579-580: 21-26.

Några extraövningar

(a) Bestäm ortogonala projektionen i xy-planet av skärningskurvan mellan ytorna $3x^2+4y^2-4x-z=0$ och $x^2+3y^2+2y-z=1$.

(b) Samma uppgift för kurvan $z=x^2+4y^2, \quad 2x+8y+z=4$.

Svar: (a) $(x-1)^2+\frac{1}{2}(y-1)^2=1$ (b) $\frac{1}{9}(x+1)^2+\frac{4}{9}(y+1)^2=1\,.$

Inför lektion nr 2

Till lektion nr 2 bör ni **förbereda (dvs lösa)** följande uppgifter:

avs.11.3, s.611: 5, 7, 9, 13, 16, 19,

avs.12.1, s.645-646: 1-5, 13-15, 17, 21, 23, 24, 27, 33, 35, 37, 39, 40,

avs.10.1, s.542-543: 33-37, 40,

avs.12.2, s.650: 1, 4, 7, 9, 11, 13.

Några extraövningar

(a) Parametrisera kurvan i extraövning (b) till förra lektionen!

(b) Studera kurvan $r=1-\cos\theta$ (polära koordinater i xy-planet). Den kan parameterframställas genom att man använder formlerna

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = (1-\cos\theta)\cos\theta \\ y &= r\sin\theta = (1-\cos\theta)\sin\theta \end{aligned} \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

och använder θ som parameter. Skissera kurvan! Undersök särskilt hur den ser ut i närheten av $\theta=0$. Beräkna längden av kurvan. (Kurvan kallas *cardioiden* eller *hjärtkurvan.*)

Svar: (a) $\mathbf{r}(t)=(-1+3\cos(t),\,-1+\frac{3}{2}\sin(t),\,14-6\cos(t)-12\sin(t)),\ 0\le t\le 2\pi,$
(b) Kurvan längd är 8.

Inför lektion nr 3

Till lektion nr 3 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.12.3, s.656-657: 3-8, 11, 12, 26, 27, 28, 31,
avs.12.4, s.662: 1, 5, 7, 9-11, 15,
avs.12.6, s.679-680: 1, 2, 7,
avs.12.3, s.656-657: 13, 15, 17, 23, 35.

Extraövning

Definiera $f(x,y)$ genom $f(0,0) = 0$ och $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ för övrigt. Beräkna $f_1(0,y)$ för alla y och $f_2(x,0)$ för alla x.

Svar: $f_1(0,y) = -y, \quad f_2(x,0) = x\,.$

Inför lektion nr 4

Till lektion nr 4 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.12.5, s.671-672: 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15,
avs.12.6, s.679-680: 13, 14, 15,
avs.12.7, s.688-689: 5, 7, 11, 15, 19, 26.

Några extraövningar

(a) Transformera differentialekvationen

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

($f = f(x,y,z)$), genom att införa nya variabler $u = (x+y)e^{-z}$, $v = (x-y)e^{z}$, $w = z$. Ange också den allmänna lösningen till differentialekvationen i hela $\mathbb{R}^3$.

(b) Övning 22 på sid.689.

(c) Antag att $f(x,y)$ satisfierar den partiella differentialekvationen $f_1 + 2f_2 = 0$. Visa att för alla a är linjerna $y = 2x + a$ (delmängder av) nivåkurvor för f. Ledning: sätt $g(x) = f(x, 2x+a)$.

Svar: (a) $\dfrac{\partial g}{\partial w} = 0\,.$ Den allmänna lösningen: $f(x,y,z) = h((x+y)e^{-z},\,(x-y)e^{z})$, där $h(u,v))$ är en godtycklig funktion av två variabler av klass C^1.

(b) $y = e^{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{x^2})}\,.$

Inför lektion nr 5

Till lektion nr 5 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.12.8, s.698-699: **1, 3, 11, 13, 16, 25,**

avs.12.9, s.704-705: (i de tre första uppgifterna nöjer vi oss med Taylorpolynomet av grad 2) **7, 8, 9, 10.**

Några extraövningar (gamla tentaproblem)

1. Visa att sambandet $\ln(xy) - (x-1)e^{y-1} = 0$ definierar y som funktion av x i en omgivning av $(1,1)$. Visa också att denna funktion har en stationär punkt i $x = 1$ och bestäm dennas karaktär!
2. Visa att sambandet $x^2 - xyz + y^2 + z^3 = 4$ definierar z som funktion f av (x,y) i en omgivning av punkten $(2,1,1)$ och beräkna $\nabla f(2,1)$.
3. Visa att sambandet $z^3 + xyz^2 - x^2y - 8 = 0$ definierar en funktion $z = f(x,y)$ i någon omgivning av punkten $(x,y,z) = (4,0,2)$. Visa vidare att $(x,y) = (4,0)$ är en *stationär punkt* till $f(x,y)$, dvs. att de båda partiella förstaderivatorna är noll där.

Svar: (a) Lokal minimumpunkt. (b) $\nabla f(2,1) = (-3,0)$.

Inför lektion nr 6

Till lektion nr 6 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.13.1, s.714: **1, 3, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 22,**

avs.13.2, s.720: **1, 2, 3, 4, 6, 9, 10.**

Några extraövningar
(som illustrerar skillnaden mellan funktioner av flera variabler och funktioner av 1 variabel vad gäller deras möjliga lokala och globala extrempunkter)

(a) Övning 29, s.714.

(b) Låt $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$. Visa att f har en enda stationär punkt (a,b), som är lokalt minimum. Visa att $f(a,b)$ inte är funktionens minsta värde, eftersom f antar *alla* reella värden. (Lägg märke till skillnaden mellan detta fall och situationen för funktioner av 1 variabel där inget sådant vore möjligt. Man kan försöka göra sig en bild av funktionens graf, fast det är inte så lätt!)

Inför lektion nr 7

Till lektion nr 7 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.13.3, s.728-729: **1, 2, 7, 8, 9, 11, 19, 22, 24,**

avs.14.1, s.759-760: **13-19, 21**

avs.14.2, s.766-767: **1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 19, 23.**

Inför lektion nr 8

Till lektion nr 8 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.14.3, s.771-772: **1, 3, 4, 5, 7, 8, 23, 26,**

avs.14.4, s.780-781: **1, 3, 5, 9, 11, 13, 21, 30, 31, 32, 33.**

Inför lektion nr 9

Till lektion nr 9 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.14.5, s.787: **1, 2, 3, 4, 7, 9, 14, 15, 17, 27,**

avs.14.6, s.795: **1, 2, 3, 5, 7, 15, 17, 20, 22, 25, 27,**

avs.14.7, s.803-804: **1, 3, 5, 7, 19, 21.**

Några extraövningar:

(a) Beräkna volymen av den kropp som ligger innanför de båda cylindrarna $x^2 + z^2 = a^2$ och $y^2 + z^2 = a^2$.

(b) Beräkna volymen av den kropp som ligger innanför alla *tre* cylindrarna $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ och $x^2 + y^2 = a^2$.

Svar : (a) $16a^3/3$ (b) $8a^3(2 - \sqrt{2})$

Inför lektion nr 10

Till lektion nr 10 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.15.1, s.811: **2, 3, 5, 13,**

avs.15.2, s.819-820: **1-5,**

avs.15.3, s.824: **1, 2, 8,**

avs.15.4, s.831-832: **1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13.**

Inför lektion nr 11

Till lektion nr 11 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.16.3, s.868: **1 - 5.**

samt

1. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (e^{x+y} - y)\, dx + (e^{x+y} - 1)\, dy$$

längs halvcirkelbågen i första kvadranten från origo till punkten $(1, 0)$.

2. Beräkna

$$\int_C (2xy - x^2 + y^2 \sin xy^2)\, dx + (x + y^2 + 2xy \sin xy^2)\, dy,$$

där C är den positivt orienterade randen till området $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

3. Beräkna

$$\int_C \frac{y\, dx - (x+1)\, dy}{x^2 + y^2 + 2x + 1},$$

där C är kurvan $|x| + |y| = 4$, genomlöpt ett varv i positiv led.

4. Bevisa att kurvintegralen

$$\int_C (3x^2 + 2xy - 2x - y + 1)\, dx + (x^2 - x)\, dy,$$

där C är en väg från punkten $(0, a)$ till punkten $(1, b)$, är oberoende av valet av a, b och C; och bestäm integralens värde.

5. Bestäm en enkel, sluten, kontinuerligt deriverbar, positivt orienterad kurva Γ i planet så att

$$\int_\Gamma (4y^3 + y^2 x - 4y)\, dx + (8x + x^2 y - x^3)\, dy$$

blir så stor som möjligt och beräkna integralen för denna kurva.

6. Beräkna

$$\int_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2},$$

där γ löper i positiv led längs ellipsen $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ från $(1, 0)$ till $(0, -2)$.

7. Beräkna arean av området mellan x-axeln och cykloidbågen

$$\begin{cases} x = t - \sin t\,, \\ y = 1 - \cos t\,, \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(Svar: **1.** $e - 1 - \pi/8$. **2.** $\frac{1}{30}$. **3.** -2π. **4.** 1. **5.** Kurvan är $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ i positiv led. Integralen blir 12π. **6.** $3\pi/2$. **7.** 3π.)

Inför lektion nr 12

Till lektion nr 12 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.15.5, s.842: **4, 7, 8, 13, 15,**

samt:

• Beräkna arean av en *sfärisk zon*, dvs. den del av en sfär som ligger mellan två parallella plan. Konkret: den yta som beskrivs av $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $b \leq z \leq c$. (Resultatet är på ett visst sätt lite överraskande. Hur då?)
(Svar: Area $= 2\pi|a|(c-b)$ för $-|a| \leq b \leq c \leq |a|$.)

Vidare

avs.15.6, s.848: 1, 2, 5, 7.

Slutligen

blandade övningar på sidan 11 i detta häfte, nummer 1, 2, 3.

Inför lektion nr 13

Till lektion nr 13 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.16.1, s.858: 3, 6, 7,

avs.16.4, s.873-874: 1, 2, 6,

avs.16.5, s.878-879: 2, 3, 4, 8

och

blandade övningar på sidorna 11-12 i detta häfte, nummer 8, 9, 13, 14, 18, 19.

Inför lektion nr 14

Förkortningen **AV** nedan refererar till Anders Vretblads häfte '**"Topologi och konvergens" (1997 års upplaga, översedd 2008)**.

Till Lektion nr 14 bör ni förbereda följande uppgifter:

AV: 2.1 (a),(c), 2.2 (b),(e),(f), 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 4.1, 4.2,

samt

1. Beräkna andraderivatan av funktionen

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\ln(1+t^2)\ dt$$

och visa att funktionen satisfierar differentialekvationen

$$y'' + y = \ln(1+x^2) \ .$$

2. Beräkna för $y > 0$ integralen $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-2}\,dx$ genom derivering av $\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-1}\,dx$.

3. Beräkna för $a > 0$ och $b > 0$ integralen

$$\int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-2}\; dx$$

med hjälp av de partiella derivatorna med avseende på a och b av

$$\int_0^{\pi/2} (a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{-1}\; dx\ .$$

Svar: 2. $\dfrac{\pi}{4y^3}$. 3. $\dfrac{\pi}{4ab}\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right)$.

Inför lektion nr 15

(Förkortningen **AV** nedan refererar till Anders Vretblads häfte '**"Topologi och konvergens" (1997 års upplaga, översedd 2008)**.)

Till Lektion nr 15 bör ni förbereda följande uppgifter:

AV: 4.5 (a),(d),(e),(g), 4.8 (a),(b), 4.9, 4.10 (a),(c), 4.11, 4.12, 4.13.

Blandade övningar på kurv- och ytintegraler

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $4z = x^2+y^2$ som skärs ut av cylindern $z = y^2$ och planet $z = 3$.

2. Beräkna arean av den del av planet $x+2y+z = 1$ som skärs ut av cylindern $x^2+y^2 = 1$.

3. En del S av konen med ekvation $x^2 + y^2 = z^2$ ligger över xy-planet och dess projektion på xy-planet har area A. Visa att arean av S är $A\sqrt{2}$.

4. Antag att ytan S har ekvationen $z = h(x, y)$, där $(x, y) \in D$ och D är ett område i $\mathbb{R}^2$. Visa att arean av S ges av
$$\iint_D \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\, dy.$$

5. S betecknar ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, med normalen riktad från origo. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(y-1)\mathbf{k}$ genom S.

6. Låt C vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 - x = 0$ och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + x\mathbf{k}$ och C genomlöps så att riktningen i $(1, 0, 0)$ ges av vektorn $(0, 1, 0)$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + (z^2 + 2)\mathbf{k}$ ut ur cylindern $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

8. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + y^2e^z\mathbf{j} + (2y - 2ye^z)\mathbf{k}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första oktanten (dvs. $x, y, z > 0$). Normalriktningen antas ha positiv z-komponent.

9. Beräkna $\left|\int_C (z-x)^2\, dx + (z+x)^2\, dy + z^2\, dz\right|$, där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $2x + y + z = 2$.

10. S är en sluten yta (med utåtriktad normal) för vilken Gauss' sats (divergenssatsen) är tillämplig, och $\mathbf{F} = (2x + y - \frac{1}{3}x^3)\mathbf{i} + (y - 4yz^2)\mathbf{j} + (z - 4y^2z)\mathbf{k}$. Bestäm, under dessa förutsättningar, det maximala värdet av $\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$.

11. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, då $\mathbf{F} = \sin x^2\mathbf{i} + (y - 2xy\cos x^2)\mathbf{j} + (1 + y + z)\mathbf{k}$, och S är den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geq 0$ och $z \geq 0$. Ytans positiva normalriktning bildar icke-trubbig vinkel med positiva z-axeln.

12. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. C är en styckvis deriverbar sluten kurva på cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och skär inte sig själv. Beroende på hur C löper på ytan (bara ett varv, givetvis), kan $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ anta tre olika värden. Beskriv de tre fallen och bestäm de tre värdena.

13. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, där S är halvellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$, med uppåtriktad normal, och $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$.

14. Beräkna flödet av vektorfältet $xy\mathbf{i}+xyz\mathbf{j}+(x+2y+3z)\mathbf{k}$ ut ur volymen $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

15. Beräkna $\left|\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz\right|$, där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $2x+2y+z=3$.

16. Beräkna med hjälp av Stokes' sats $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = (yz+y-z)\mathbf{i}+(xz+5x)\mathbf{j}+(xy+2y)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+y=1$. C är orienterad så att dess omloppsriktning i punkten $(1,0,0)$ ges av vektorn $(0,0,1)$.

17. Visa att $\displaystyle\int_C (2xy+z^2)\,dx + (2yz+x^2)\,dy + (2xz+y^2)\,dz$ är oberoende av vägen mellan två givna punkter A och B.

18. Låt S vara den del av cylindern $x^2+y^2=1$ som ligger mellan planen $z=0$ och $z=x+2$. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$, om $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

19. Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F} = (xy+z)\mathbf{i} + y^2z^3\mathbf{j} + (\frac{1}{2}x^2+z^2)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+2y^2=1$ och $z=y+1$. C:s omloppsriktning är positiv (moturs) sett från origo.

Svar:

1. $\frac{56}{9}\pi$.	2. $\pi\sqrt{6}$.	5. 0.	6. $-\pi/4$.	7. $\pi/3$.
8. $e-\frac{5}{2}$.	9. 0.	10. $\frac{64}{15}\pi$.	11. π.	12. 0, π, $-\pi$.
13. 0.	14. 28π.	15. 5π.	16. $-\pi\sqrt{2}/4$.	18. 2π.
19. $\pi/\sqrt{2}$.				