UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Vretblad

Flerdimensionell analys

för civilingenjörsprogrammen

LÄSANVISNINGAR

till Adams, femte upplagan
Version 2004

Till räkneövning nr 1

Till den första lektionen ska ni studera kapitel 10 i Adams. Stora delar av detta är faktiskt sådant som ni redan bör ha nosat på i algebrakurserna: vektorer, skalär och vektoriell produkt, räta linjer och plan, matriser. Men en del saker är nog nya eller i varje fall ovana.

I avsnitt 10.1 presenteras scenen för det drama som sedan ska utspelas under kursens gång. Den fysiska verkligheten kan ju sägas utspela sig i ett tredimensionellt rum och en endimensionell tid (åtminstone så länge vi håller oss till den klassiska fysiken). Punkterna i rummet beskrivs med koordinater på ett eller annat sätt; för det mesta kommer vi att använda ett *fixerat ON-system*. Det som är mest ovant för er finns nog i **Ex. 2–5**: hur man beskriver olika objekt i rummet. En huvudprincip är att *en ekvation* normalt betyder en *yta*, medan en *kurva* kräver (minst) *två ekvationer* — man tänker sig kurvan som skärningen mellan två ytor.

Avsnittet avslutas på sid. 598 med en del terminologi, som blir aktuell när ni kommer till gränsvärden i ett senare kapitel. Just nu kan ni gå förbi detta.

Gör några övningar på sid. 599: **nummer 3, 5, 6, 10, 12–27, 29, 31**.

I avsnitt 10.2 bör ni kunna sträckläsa stora delar och känna igen er. Det som står om »Hanging cables and chains« kan ni dock hoppa förbi, om ni inte har mekanikkursen på gång – i så fall kan det vara en trevlig illustration till denna. Likaså är 10.3 och 10.4 ren repetition av begrepp från tidigare kurser. I 10.5 beskrivs ett antal *ytor,* som också tas upp i slutet av linjära algebran. De är motsvarigheter till de kurvor i planet som kallas kägelsnitt. Eftersom de kommer att användas flitigt i exempel och övningar under kursens gång, är det bra om man bekantar sig med dem. Ett par av ytorna tas ev. inte ens upp i linjära algebran: elliptiska och hyperboliska paraboloider. Ett sätt att känna igen en sådan här yta är att man tänker sig att skära den med olika plan parallella med ett koordinatplan, och sedan känna igen skärningskurvorna. Fördenskull kan det därför också vara bra att repetera de tre huvudfallen av *andragradskurvor:* ellips, parabel och hyperbel (se sid. 21–24 i början av boken). Övningar på sid. 631: **nummer 1, 3, 5, 6, 7, 9, 15, 17, 19**. Observera att ett ekvationssystem som i övning 17 eller 19 normalt betyder en kurva. Att med ord beskriva en kurva i $\mathbb{R}^3$ är lite mer omständigt än i planet. Exempelvis är en cirkel inte fullständigt beskriven av medelpunkt och radie!

Avsnitt 10.6 består helt av saker som tas upp i linjära algebran. Det som står på slutet om kvadratiska former och positivt definithet etc. kommer vi att använda när vi kommer till extremvärdesproblem i kap. 13. Avsnitt 10.7 slutligen går vi förbi.

Som träning på både gammalt och nytt kan det vara lämpligt att dessutom göra några blandade »Review exercises« på sid. 649: **nummer 19, 21, 23, 27**.

Några extraövningar:

(a) Bestäm ortogonala projektionen i xy-planet av skärningskurvan mellan ytorna $3x^2 + 4y^2 - 4x - z = 0$ och $x^2 + 3y^2 + 2y - z = 1$.

(b) Samma uppgift för kurvan $z = x^2 + 4y^2$, $2x + 8y + z = 4$.

Till räkneövning nr 2

Nu ska ni ta en titt på det lilla av kapitel 11 som vi tar med i kursen. I avsnitt 11.1 tas upp de grundläggande begreppen för en kurva betraktad som banan för en rörlig partikel. Detta betyder att man beskriver läget av partikeln med en ortsvektor $\mathbf{r}(t)$, som är en funktion av tiden t. En liten ordlista för att få de svenska orden rätt:

path	bana, bankurva
smooth curve	slät kurva
velocity	hastighet
speed	fart
motion	rörelse

Ex. 1–5 är ganska enkla men också nyttiga.

> När man arbetar med vektorer måste man vara mycket noga med att inte blanda ihop vektorer och skalärer. Det är t.ex. omöjligt att addera en vektor och en skalär. Och man kan aldrig *dividera* med en vektor.

Reglerna för derivering av kombinationer av vektorer behövs när man studerar mekanik. För den här *matematik*kursens del är de inte så viktiga. Men de ser ju ganska naturliga ut – allihop har samma formella struktur som motsvarande regler för skalära uttryck. (Man måste dock vara noga med ordningsföljden mellan faktorerna så snart en kryssprodukt är inblandad.)

Övningar på sid. 657: nummer 1–5, 7, 9, 17. Nummer 1–5 liknar exempel 1–2 i texten, övning 7 och 9 liknar ex. 3, och nummer 17 påminner om ex. 5.

Avsnitt 11.2 är rena rama mekanikkursen. Hoppa över det nu, och gå till 11.3. Här beskrivs kurvor betraktade som geometriska objekt, dvs. variabeln i en parametrisering behöver inte längre betyda tiden. Flera olika parametriseringar kan beskriva samma kurva, vilket illustreras i **Ex. 1**. Också här kan det vara bra med en ordlista:

piecewise smooth	styckevis slät
closed curve	sluten kurva
non-self-intersecting	enkel (!)
simple closed	enkel sluten
orientation	orientering

Redan i **Ex. 1** på sid. 652 såg ni att en kurva kan ha en väldigt »slät« parametrisering utan att kurvan själv är särskilt »slät«. I en punkt där derivatan $\mathbf{r}'(t)$ är $\mathbf{0}$ kan lite av varje inträffa. **Ex. 2–3** visar hur man kan parameterframställa en kurva som är given på ett annat sätt.

Definitionen av båglängd och formeln för denna kan ses som omvändningen till det faktum att *farten är tidsderivatan av sträckan* – då borde ju sträckan vara integralen av farten! Läs texten fram till och inklusive **Ex. 4**.

Det sista stycket av 11.3 handlar om användning av båglängden som parameter. Detta är i själva verket mycket naturligt: parametervärdet s i en punkt talar om hur långt man är från »utgångspunkten« (där $s = 0$). När man ger sig in på mer djupgående undersökningar av kurvor, kommer många formler att bli särskilt enkla om man använder denna parameter. Detta sker t.ex. i avsnitt 11.4, som dock inte ingår i kursen (liksom resten av kapitlet).

Övningar på sid. 673: nummer 5, 7, 13, 16, 19. Ledning till nr 16: skriv om de trigonometriska funktionerna genom att gå över till dubbla vinkeln, så kan man sedan känna igen kurvan.

Några extraövningar:

(a) Parametrisera kurvan i extraövning (b) till förra räkneövningen!

(b) Studera kurvan $r = 1 - \cos\theta$ (polära koordinater i xy-planet). Den kan lätt parametriseras genom att man använder formlerna

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = (1 - \cos\theta)\cos\theta \\ y &= r\sin\theta = (1 - \cos\theta)\sin\theta \end{aligned} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

och använder θ som parameter. Skissera kurvan! Undersök särskilt hur den ser ut i närheten av $\theta = 0$. Beräkna längden av kurvan. (Kurvan kallas *cardioiden* eller *hjärtkurvan*.)

Till räkneövning nr 3

Nu ska ni börja studera funktioner som är definierade i någon del av $\mathbb{R}^n$. En sak som gör teorin för sådana funktioner svårare än för envariabelfunktioner är att de inte kan illustreras grafiskt lika lätt. För en funktion f från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$ finns möjligheten att tänka sig grafen som ytan $z = f(x, y)$ i det tredimensionella rummet, men för fler variabler än så räcker våra vanliga dimensioner inte till. Grafen för $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kan fortfarande tänkas som en delmängd av $\mathbb{R}^{n+1}$, men vi kan inte se den framför oss längre.

Läs avsnitt 12.1 och studera exemplen. För att illustrera en funktion av två variabler kan man i stället för grafen även rita en *karta* över funktionsvärdena, i form av en skara av *nivåkurvor*. Ett exempel är isobarerna på en vanlig väderlekskarta, som illustrerar lufttrycket som en funktion av positionen på jordytan. För en funktion av tre variabler kan man analogt tänka sig en skara av *nivåytor*, som i texten längst ner på sid. 709. Några bra övningar på sid. 712: **nummer 1, 3, 5, 11, 14, 17; 19, 21, 23**. Dessutom några lite mer kluriga: **28, 33, 35**. (Ordet *topography* betyder ungefär »landskapsformationer«.)

Inför avsnitt 12.2 bör ni gå tillbaka till sid. 598 för att insupa terminologin där. En liten ordlista:

neighbourhood	omgivning
disk	(cirkel)skiva
ball	klot
boundary	rand
boundary point	randpunkt
interior/exterior point	inre/yttre punkt
the interior/exterior	det inre/yttre

Gör några övningar på sid. 599: **nummer 33–37, 40**.

I avsnitt 12.2 definieras gränsvärdet av $f(x,y)$ då (x,y) går mot en punkt (a,b). Själva definitionen kan skrivas nästan ordagrant som i envariabelfallet:

> Utsagan $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ betyder:
>
> *man kan vara säker på att avståndet mellan $f(x,y)$ och A kan göras* **så litet som man önskar**, *bara man ser till att avståndet mellan punkten (x,y) och (a,b) är* **tillräckligt litet** *(utan att (x,y) sammanfaller med (a,b).)*

Om man *kvantifierar* vad som menas med de fetstilta delarna av denna formulering får man den här versionen:

> Utsagan $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ betyder:
>
> *För varje tal $\varepsilon > 0$ kan man bestämma ett tal $\delta > 0$ sådant att för alla (x,y) som uppfyller $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta$ gäller att $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.*

Den stora skillnaden mot envariabelfallet är att det finns så många flera *riktningar* nu. I en dimension finns bara två riktningar: »framåt« och »bakåt«. Nu har man oändligt många riktningar. På grund av detta kan en funktion se mycket mer invecklad ut nära en punkt där ett gränsvärde *inte* existerar, än vad fallet är i en dimension. Detta illustreras av **Ex. 2** och **3**. Ett alternativt sätt att studera en funktion i närheten av origo är f.ö. att använda *polära koordinater*. I **Ex. 2** blir det så här:

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta.$$

Man ser att f beror på θ men inte på r; i varje omgivning av origo antar f alla värden mellan -1 och 1. Den kan då inte ha något gränsvärde i origo.

Observera en principiell skillnad mellan att visa att ett gränsvärde *existerar* och att visa att det *inte existerar:* i det förra fallet krävs i allmänhet mer »bevisning«; i det senare kan det räcka med ett »exempel«.

Övningar på sid. 717: **nummer 1, 4, 7, 13.** I vissa av dessa är det en god idé att använda polära koordinater, som vi gjorde ovan.

Det som står i avsnitt 12.3 brukar inte vara så svårt att begripa sig på. Att derivera partiellt innebär bara att man »låtsas« att alla de andra variablerna är konstanta. Det brukar man vänja sig vid ganska snart. Läs texten t.o.m. **Ex. 5**. Tillämpningarna på tangentplan och normallinjer m.m. kan ni spara till litet senare. Räkna övningar sid. 724–5: **nummer 1–5, 7, 11.** Dessutom några övningar där man ska sätta in i en partiell differentialekvation: **25, 26, 27, 31**.

Några extraövningar:

(a) Övning 16 sid. 717.

(b) Definiera $f(x,y)$ genom $f(0,0) = 0$ och $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ för övrigt. Beräkna $f_1(0,y)$ för alla y och $f_2(x,0)$ för alla x.

Till räkneövning nr 4

Läs avsnitt 12.4. Själva begreppet »högre derivata« är inget särskilt svårt. Det nya är nu bara att man har så många olika sorters derivator av t.ex. andra ordningen. Studera hur beteckningarna fungerar: för t.ex. $z = f(z,y,z)$ gäller exempelvis att

$$f_{123}(x,y,z) = \frac{\partial^3 z}{\partial z \partial y \partial x}\,.$$

Sats 1 säger att om alla derivator »på vägen« är kontinuerliga så spelar det ingen roll vilken ordning man deriverar i. Observera att detta ingalunda är självklart. Det går att finna exempel där $f_{12}(a,b) \neq f_{21}(a,b)$. I så fall måste minst en av de inblandade derivatorna vara diskontinuerlig. Ni bör faktiskt ha stött på en funktion där detta inträffar. Vilken är det?

Laplaces differentialekvation och vågekvationen (sid. 729–30) hör till allmänbildningen för fysiker och tekniker. Lös övningar på sid. 731: **nummer 1, 5, 7, 9, 11**. Svaret till nr 7 är inte helt korrekt. Hur då? Övning **15** är lite mer finurlig; försök gärna, men ägna inte mer än 5 minuter åt den.

Hoppa för ögonblicket förbi avsnitt 12.5 och studera direkt 12.6. När vi definierade de partiella derivatorna i 12.3, satte vi på oss »skygglappar«. Tag exemplet

$$f(x,y) = 0 \text{ om } xy = 0, \quad f(x,y) = 1 \text{ om } xy \neq 0.$$

Denna funktion har $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$, men den är inte ens kontinuerlig i origo. Att de båda partiella derivatorna existerar är alltså en ganska intetsägande upplysning. De innehåller ingen information alls om hur funktionen ser ut i andra riktningar än parallellt med koordinataxlarna. I avsnitt 12.6 försöker man finna på ett villkor som bättre motsvarar det som deriverbarhet betyder i en variabel.

Att $y = f(x)$ är deriverbar för $x = a$, betyder att kurvan $y = f(x)$ kan approximeras väldigt bra med en viss rät linje, så länge x är nära a. För $z = f(x,y)$ skall motsvarande begrepp vara att ytan approximeras mycket bra av ett visst plan, då (x,y) är nära (a,b). Detta är vad som innehålles i Definition 6.

Villkoret i definitionen är jobbigt att verifiera som det står. Därför är det bra att man har sats 4, som säger att om f har *kontinuerliga* partiella derivator, så är f differentierbar. Detta villkor är oftast mycket lätt att kontrollera, och i 99 % av fallen klarar man sig med det.

Det som står om »Proof of the Chain Rule« hoppar ni över just nu. Däremot är begreppet differential på sidan 747 f. viktigt för alla användare: de kan användas för att göra feluppskattningar t ex vid laborationer, så som illustreras av **Ex. 3**. Hoppa sedan över resten av avsnittet, men räkna **på sid. 750: nummer 1, 2, 7.**

Att en funktion är differentierbar f i en punkt (a,b) betyder ju att det är meningsfullt att tala om ett *tangentplan* och *normallinje* till funktionens graf i motsvarande punkt. Återvänd nu till avsnittet om dessa ting som börjar på sid. 721. Räkna **på sid. 724–5 nummer 13, 15, 17 och 23.**

Till räkneövning nr 5

Till den här lektionen handlar det först och främst om kedjeregeln. Avsnitt 12.5 innehåller ett antal varianter av denna och ett antal bra exempel. Som ni bör ha sett på föreläsningen har man vissa bekymmer med beteckningarna — det finns knappast något sätt att skriva partiella derivator som är helt utan nackdelar!

För den som ska läsa fysik och kemi är den s.k. termodynamiska beteckningen intressant. Om man studerar en gasmassa med tryck p, volym V och absoluttemperatur T, så är dessa kopplade till varandra genom ett samband av typen $f(p, V, T) = 0$. (För en ideal gas har det formen $pV/T = R$.) Detta innebär att två av de tre storheterna i princip bestämmer den tredje. Vad ska man i så fall mena med en partiell derivata m.a.p. exempelvis T? Man måste precisera vad som hålls konstant: p eller V. Man brukar då skriva t.ex.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_p,$$

där index p markerar att p hålls konstant. Se »Remark« på sid. 735–6.

I komplicerade situationer kan det vara till hjälp att rita ett »beroendediagram« som visar hur de olika variablerna beror på varandra; se sidan 737. När man sedan deriverar med avseende på en viss variabel, ska man följa diagrammet ända ner till varje ställe där variablen avslutar en »kedja«.

Studera bokens text från avsnittets början, inklusive **Ex. 1–7**. Avsnittet om homogena funktioner på sid. 737–8 kan ni hoppa över. Gå vidare med **Ex. 8–10**. Liknande exempel bör också ha gjorts på föreläsningen. **Övningar på sid. 741 f: nummer 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.** Tänk hela tiden efter vilken beteckningsmodell för partiell derivata som är mest lämplig i varje fall!

Extraövning:

Transformera differentialekvationen

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

($f = f(x, y, z)$), genom att införa nya variabler $u = (x + y)e^{-z}$, $v = (x - y)e^{z}$, $w = z$. Ange också den allmänna lösningen till differentialekvationen i hela $\mathbb{R}^3$.

Till räkneövning nr 6

Av avsnitt 12.6 återstår det som handlar om funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, med början på sid. 748. Det gäller att approximera sådana avbildningar lokalt med *linjära* transformationer, i princip av den typ som studeras i linjära algebran. Där är man van vid att en sådan avbildning representeras med en matris (sedan man fixerat baser i de inblandade rummen). I vår situation visar sig denna matris vara *Jacobimatrisen* eller *totalderivatan*, som Adams betecknar med $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$. En annan beteckning som förekommer är $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$.

Ex. 4 visar hur totalderivatan fungerar mer konkret för att approximera en vektorvärd funktion i närheten av en punkt. Allt det här är en sorts »högredimensionell« motsvarighet till det som i enklare fall beskrivs av tangentplanet. **Övningar på sid. 751: nummer 13, 14, 15.**

Avsnitt 12.7 om gradient och riktningsderivator är mycket viktigt för tillämpningar. Gradienten definieras i boken på ett sätt som ser ut att bero på koordinatsystemet, men i själva verket går den att beskriva koordinatfritt, vilket görs i det tonade fältet på sid. 755. Riktningsderivator är en naturlig generalisering av partiella derivator, och sats 7 visar hur de kan bestämmas med hjälp av gradienten, förutsatt att funktionen är differentierbar. Läs texten och exemplen t.o.m. **Ex. 5** sid. 757. »Rates perceived by a moving observer« kan ni hoppa över, men gradienten i tre dimensioner är viktig. Kopplingen mellan gradient och nivåytor (eller nivåkurvor) är av fundamental betydelse och dessutom användbar vid problemlösning. **Öva på sid. 761–2: nummer 1, 4, 5, 7, 11, 15, 19, 26, 27.** Försök dessutom göra nummer **21**, som är en hel liten saga! Det problemet kan gärna tas upp till diskussion mellan läraren och hela lektionsgruppen!

Några extraövningar:

Övning 22 på sid. 762. Dessutom följande:

Antag att $f(x, y)$ satisfierar den partiella differentialekvationen $f_1 + 2f_2 = 0$. Visa att för alla a är linjerna $y = 2x + a$ är (delmängder av) nivåkurvor för f. Ledning: sätt $g(x) = f(x, 2x + a)$.

Till räkneövning nr 7

Nu ska ni arbeta med »implicita funktioner«, dvs. funktioner som är beskrivna genom samband mellan variabler, utan att man har en »utlöst« formel för att beräkna funktionsvärdena.

De enklaste fallen beskrivs på sid. 763–4. Under vilka förhållanden kan man vara säker på att ett samband av formen

$$F(x, y) = 0 \quad \text{eller} \quad G(x, y, z) = 0$$

kan uppfattas som en beskrivning av en funktion $y = y(x)$ respektive $z = z(x, y)$ (åtminstone »lokalt«, dvs. i närheten av en viss punkt)? Boken gör troligt att det bör räcka med att man vet att kurvan $F(x, y) = 0$, resp. ytan $G(x, y, z) = 0$, inte har lodrät tangent, resp. lodrätt tangentplan i punkten. Man kan också se det mer »algebraiskt« så här:

Om $F(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b), där $F(a, b) = 0$, innebär att i närheten av (a, b) är ekvationen $F(x, y) = 0$ ekvivalent med följande:

$$\begin{aligned} 0 = F(x, y) &= F(a, b) + F_1(a, b)(x - a) + F_2(a, b)(y - b) + R(x, y) \\ &= F_1(a, b)(x - a) + F_2(a, b)(y - b) + R(x, y), \end{aligned}$$

vilket kan skrivas om till

$$F_2(a, b)y = F_2(a, b)b - F_1(a, b)(x - a) - R(x, y).$$

Här är $R(x, y)$ »mycket liten«. Om vi kan bortse från den termen, har vi en mycket enkel ekvation. Vi kan då lösa ut y, uttryckt i x, förutsatt att koefficienten $F_2(a, b)$ inte är 0.

Detta är inte ett bevis utan bara ett »övertalningsförsök«, men idén bakom är användbar i många situationer. Vad man gör genom att bortse från $R(x, y)$ är att man ersätter kurvan $F(x, y) = 0$ med sin tangent i punkten (a, b). Man säger att man *lineariserar* situationen. Så här ser det ut i ett annat fall:

När kan man vara säker på att ekvationssystemet

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

definierar y och z som funktioner av x i närheten av punkten (a,b,c)? Uppgiften kan formuleras som att vi vill lösa y och z ur ekvationssystemet, uttryckta i x. Lineariseringen blir nu ett *linjärt ekvationssystem:*

$$\begin{cases} 0 = F(x,y,z) = F(a,b,c) + F_1(a,b,c)(x-a) + F_2(a,b,c)(y-b) + F_3(a,b,c)(z-c) \ (+R(x,y,z)) \\ 0 = G(x,y,z) = G(a,b,c) + G_1(a,b,c)(x-a) + G_2(a,b,c)(y-b) + G_3(a,b,c)(z-c) \ (+S(x,y,z)) \end{cases}$$

som kan stuvas om till

$$\begin{cases} F_2(a,b,c)y + F_3(a,b,c)z = \text{diverse}_1 \\ G_2(a,b,c)y + G_3(a,b,c)z = \text{diverse}_2 \end{cases}$$

Detta system är entydigt lösbart om determinanten av vänsterledet är skild från 0:

$$0 \neq \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$$

(där alla derivatorna ska räknas ut i punkten (a,b,c)).

Att detta villkor verkligen är tillräckligt *kan* bevisas, men beviset är ganska omständligt (det handlar i princip om att kontrollera att de slopade resttermerna inte stör för mycket).

Adams' text handlar mest om problemet att bestämma derivator av implicit definierade funktioner. Läs **Ex. 1**, **2**, **3** (och kanske **4**). Definitionen av Jacobideterminant är viktig, men lär er inte utantill sådana formler som står mitt på sid. 770. När man behöver en sån här derivata är det nog enklare och säkrare att derivera »för hand«. Jämför exempel från föreläsningen!

Några övningar på **sid. 772–3: 1, 3, 11, 13, 16, 25.** Observera att dessa problem många gånger kan lösas på flera olika sätt, och att svaret kan se olika ut men ändå vara rätt! Som exempel ges här två sätt att lösa övning 3:

Lösning 1. Derivera den givna ekvationen som den står, varvid vi alltså underförstår att z beror på (x,y), och x hålls konstant; högerledet deriveras som en produkt av x/y och z:

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} + 3xy^2 = -\frac{x}{y^2}z + \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{varav} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3xy^2 + (xz/y^2)}{(x/y) - 2z} = \frac{3xy^4 + xz}{xy - 2y^2 z}.$$

(Fyll själv i detaljerna!)

Lösning 2. Multiplicera först med y för att slippa nämnare: $yz^2 + xy^4 = xz$, och derivera sedan:

$$1 \cdot z^2 + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} + 4xy^3 = x\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{varav} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 + 4xy^3}{x - 2yz}.$$

Att de två svaren faktiskt är lika beror på att vi har tre bokstäver x, y och z som inte är oberoende av varandra – de hänger ju ihop genom den givna ekvationen! Försök själv visa att svaren är lika! (Ledning: en av de tre variablerna kan enkelt lösas ut, uttryckt i de andra!)

Dessutom följande (gamla tentaproblem!)

1. Visa att sambandet $\ln(xy) - (x-1)e^{y-1} = 0$ definierar y som funktion av x i en omgivning av $(1,1)$. Visa också att denna funktion har en stationär punkt i $x = 1$ och bestäm dennas karaktär!
2. Visa att sambandet $x^2 - xyz + y^2 + z^3 = 4$ definierar z som funktion f av (x,y) i en omgivning av punkten $(2,1,1)$ och beräkna $\nabla f(2,1)$.
3. Visa att sambandet $z^3 + xyz^2 - x^2y - 8 = 0$ definierar en funktion $z = f(x,y)$ i någon omgivning av punkten $(x,y,z) = (4,0,2)$. Visa vidare att $(x,y) = (4,0)$ är en *stationär punkt* till $f(x,y)$, dvs. att de båda partiella förstaderivatorna är noll där.

Avsnitt 12.9: här kan vi nöja oss med att ta med termer av högst grad 2. Dvs. vad ni ska veta är att om $F(x,y)$ är en C^2-funktion (alla derivator av ordning $\leqslant 2$ är kontinuerliga), så kan man skriva

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + L(h,k) + \tfrac{1}{2}\,Q(h,k) + R(h,k),$$

där $L(h,k)$ är differentialen och $Q(h,k)$ en kvadratisk form:

$$L(h,k) = f_1(a,b)h + f_2(a,b)k, \qquad Q(h,k) = f_{11}(a,b)h^2 + 2f_{12}(a,b)hk + f_{22}(a,b)k^2,$$

och resttermen $R(h,k)$ är »mindre« än en kvadratisk form i den meningen att

$$\frac{R(h,k)}{h^2+k^2} \to 0 \quad \text{då } (h,k) \to (0,0).$$

Motsvarande formler gäller för fler än två variabler. Den kvadratiska formen är den vars matris består av alla andraderivatorna, placerade enligt den vanliga numreringen. Matrisen kallas ibland *Hessianen*. En kompakt version av Taylor ser ut så här:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{h}^T H\mathbf{h} + R(\mathbf{h}),$$

där H är hessianen (uträknad i $\mathbf{a}$).

Övningar på sid. 780: **nummer 7, 8, 9** (men nöj er med gradtalet 2).

Till räkneövning nr 8

Till den här lektionen och nästa ska du studera kapitel 13, som handlar om extremvärdesproblem med flera oberoende variabler. Det är viktigt att skilja på två olika typer av sådana problem:

A **Globala problem,** dvs. bestämning av största och/eller minsta värde som en funktion antar på en viss mängd.

B **Lokala problem,** dvs. bestämning av lokala extrempunkter och undersökning av huruvida de är lokala maxima eller minima.

I avsnitt 13.1 börjar Adams med några övergripande resultat i sats 1 och 2. Vi föredrar namnet *stationär punkt* för det som Adams kallar *critical point*. **Ex. 1–4** är bra.

Sedan behandlas främst problemtypen B. Huvudsakligen handlar det om att avgöra karaktären hos en stationär punkt. Detta hänger ihop med den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen kring punkten. Sats 3 handlar om detta. I fallet med två variabler kan man använda det resultat som står i Remark på sid. 788.

Studera **Ex. 5–9**. Övningar på **sid. 791 f.: 1, 3, 4, 5, 9, 12, 20.** Av dessa är nr 9 ganska intrikat – man kan ha hjälp av att rita en karta över funktionsvärdenas tecken . . . (Observera att man ibland kan lösa problemen med enklare metoder än derivator – exempelvis uppgift 12.) Den som vill studera ett knepigt fall kan också ta en titt på övning **27**.

I avsnitt 13.2 behandlas globala problem. Här behöver man normalt inte alls gå in på andraderivator. I stället går metoden ut på att man letar rätt på alla punkter som skulle kunna tänkas vara extrempunkter. Vilka av dessa som sedan vinner avgörs helt enkelt av funktionsvärdena där. **Ex. 1–2** är bra typtal. **Ex. 3** är tänkvärt så tillvida som att det illustrerar att en matematiker ofta kan vinna på att tänka igenom hur man vill ha det med koordinatsystemet osv.

En viktig del av lösningen till sådana här problem är att man måste veta om ett (t.ex.) största värde verkligen existerar. Det är lätt att finna exempel där en funktion t.ex. är uppåt begränsad, men inte antar något största värde. Men en enkel situation där saken är klar är om definitionsmängden är kompakt (dvs. sluten och begränsad) och funktionen är kontinuerlig (sats 2 sid. 784).

Avsnittet om *linjärprogrammering* är inte svårt, men kan ändå sättas inom parentes. Övningar på **sid. 797: 1, 2, 4, 6, 9.**

Tänk på att man ibland kan få ett enklare problem om man använder polära koordinater!

Extraövning:

Låt $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$. Visa att f har en enda stationär punkt (a, b), som är lokalt minimum. Visa att $f(a, b)$ inte är funktionens minsta värde, eftersom f antar *alla* reella värden. Hur kan detta vara möjligt? (Man kan försöka göra sig en bild av funktionens graf, fast det är inte så lätt!)

Till räkneövning nr 9

Avsnitt 13.3 handlar om extremvärdesproblem med s.k. bivillkor. Det enklaste fallet är att bestämma extremvärden för en funktion $f(x, y)$ under villkoret att $g(x, y) = 0$. Detta kan geometriskt ses som att man undersöker de värden som $f(x, y)$ antar på en viss kurva i xy-planet, som är en nivåkurva för en funktion g. Det är lätt att inse att i en extrempunkt kan denna kurva i princip inte *skära* en nivåkurva för f. Från detta kan man dra slutsatsen att gradienterna för f och g måste vara *linjärt beroende* i punkten.

Liknande resultat gäller för mer allmänna fall. Om man söker max eller min av $f(\mathbf{x})$ under bivillkoren $g_k(\mathbf{x}) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, där $m < n$, ska man leta bland de punkter där alla gradienterna

$$\nabla f,\ \nabla g_1,\ \nabla g_2,\ \ldots,\ \nabla g_m$$

är linjärt beroende.

Adams föredrar att formulera resultaten med s.k. Lagrangemultiplikatorer i stället. I allmänhet brukar det (tycker jag) vara enklare att tänka i termer av linjärt beroende.

Observera att *två* vektorer är linjärt beroende precis om den ena är en multipel av den andra. Om antalet vektorer är lika med dimensionen kan man också använda villkoret att determinanten ska vara lika med 0.

Övningar på **sidan 807: 1, 2, 7, 8, 9, 11, 19.**

Extraövning:

En 60 cm bred plåtremsa ska vikas till en ränna (öppen upptill), vars tvärsnitt har formen av ett parallelltrapets med de icke-parallella sidorna lika långa. Hur stor kan tvärsnittets area maximalt göras?

Till räkneövning nr 10

Nu ska det handla om dubbelintegraler. Läs kap. 14.1 i Adams, utan att fastna! Konstruktionen och definitionerna 1 och 2 är ganska naturliga motsvarigheter till hur man gör vanliga enkelintegraler. Som definitionerna ser ut, är det inte så självklart vilka funktioner som verkligen är integrerbara över ett givet område. Sats 1 på sidan 839 undanröjer dock bekymren i praktiken. Räknereglerna på sidan 840 är viktiga men ganska naturliga. Exempel 2–4 är bra: många gånger kan man bestämma värdet av en dubbelintegral genom att använda symmetrier och känna igen geometriska tolkningar. Gå igenom **övningar på sid. 841–2: nummer 13–19, 21.** Observera alltså att *alla dessa kan beräknas utan att man behöver använda något av det som kommer i senare avsnitt!*

Det normala sättet att beräkna dubbelintegraler är annars det som tas upp i 14.2. Man ska välja i vilken ordning man ska integrera: först x och sedan y, eller tvärtom. Det är nästan alltid en god idé att följa »minsta motståndets lag«, dvs. att se till att den första (innersta) integrationen blir så enkel som möjligt. Alla exemplen i avsnittet är bra. **Övningar sid. 849 f.: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 23.**

Till räkneövning nr 11

Nu fortsätter vi med *generaliserade* dubbelintegraler. Det handlar om sådana fall då endera området eller integranden (dvs. funktionen som ska integreras) är obegränsad. Här kan det bli komplikationer av en sort som inte kan inträffa för enkelintegraler. Ett exempel är följande.

Exempel. Låt D vara »halvremsan« $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Hur är det då med integralen

$$I = \iint_D y\,dA\,?$$

Om man approximerar D med följden av områden (rita figur!)

$$D_n(a) = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant n + ay,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\},$$

får man

$$\iint_{D_n(a)} y\,dA = \int_{-1}^{1} y(n + ay)\,dy = \tfrac{2}{3}\,a.$$

När $n \to \infty$ får man alltså olika gränsvärden beroende på hur man har valt talet a. Detta är inte tillfredsställande. Det hela beror på att man egentligen försöker räkna ut ett gränsvärde som är av typen $\infty - \infty$: den integral vi försöker beräkna »mäter« differensen mellan två oändligt stora volymer. För att komma ifrån detta brukar man komma överens om att endast acceptera *absolutkonvergenta* dubbelintegraler. I praktiken, liksom i boken, löser sig detta ofta genom att integranden är positiv. I så fall finns det bara två möjligheter: endera är integralen konvergent, vilket visar sig så att man får ett ändligt värde när man räknar (hur man än gör det); eller så är integralen divergent, vilket man ser på att man får ett »oändligt« värde när man räknar. Läs igenom bokens **Ex. 1–4**.

Medelvärdet av en funktion $f(x,y)$ över ett område i planet definieras på sid. 854. Som ett specialfall kan man se koordinaterna för tyngdpunkten eller »centroiden« för ett plant område (**Ex. 5**).

Övningar sid. 855: 1, 3, 4, 7, 8, 23, 26.

Avsnitt 14.4 innehåller mer än vad rubriken säger. Att byta till polära koordinater är bara ett specialfall av den allmänna idén att byta variabler.

Läs den inledande texten och **Ex. 1–5**. Därefter följer en utredning om det allmänna fallet, som kulminerar i sats 4 sidan 863. Ett viktigt fall av variabelbyte är *linjär* transformation, som är lite försummad i boken. Det är då fråga om ett variabelbyte av formen

$$\begin{cases} x = a_1 u + b_1 v \\ y = a_2 u + b_2 v \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Speciellt påminner vi om de transformationer som svarar mot enkel vridning av koordinatsystemet, dvs. *ortogonala* transformationer där matrisen har formen

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1.$$

Bokens **Ex. 7** kan kompletteras med följande:

Exempel. Beräkna $I = \iint_D (x-2y)\sqrt[3]{2x+3y}\,dA$, där D är parallellogrammen med hörnen $(2,-1)$, $(4,0)$, $(1,2)$ och $(-1,1)$.

Lösning. Rita figur! Sätt $u = x - 2y$, $v = 2x + 3y$, så blir åtminstone integranden enkel. Eftersom detta är ett linjärt variabelbyte kommer den givna parallellogrammen att svara mot en parallellogram D' i uv-planet. Räknar man ut dess hörn, finner man att de är $(4,1)$, $(4,8)$, $(-3,8)$ och $(-3,1)$, dvs. den har sidorna parallella med u- och v-axlarna. Vidare är skalfaktorn »baklänges«

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

vilket betyder att skalfaktorn som ska in i integralen är $\frac{1}{7}$. Vi får alltså (kontrollera räkningarna!)

$$I = \iint_{D'} u \cdot v^{1/3}\,\tfrac{1}{7}\,du\,dv = \tfrac{1}{7}\int_{-3}^{4} u\,du \int_{1}^{8} v^{1/3}\,dv = \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{7}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot 15 = \tfrac{45}{8}. \qquad \square$$

Bokens **Ex. 8** och **9** lite mer kuriösa och inte så viktiga. **Övningar sid. 865–6: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 21, 31, 32, 33.** Vi påminner om möjligheten att förenkla räkningarna genom att utnyttja symmetrier av olika slag. Exempelvis kan problem 5 göras så här: man inser att $\iint_D x^2\,dA = \iint_D y^2\,dA$ (varför?). Den givna integralen I är då lika med medelvärdet av dessa, dvs. $I = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,dA$, som är lättare att beräkna!

Några extraövningar:

(a) Beräkna volymen av den kropp som ligger innanför de båda cylindrarna $x^2 + z^2 = a^2$ och $y^2 + z^2 = a^2$.
(b) Beräkna volymen av den kropp som ligger innanför alla *tre* cylindrarna $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ och $x^2 + y^2 = a^2$.

Till räkneövning nr 12

Till den här gången handlar det om kapitel 14.5–6. Först ska du läsa igenom 14.5 om trippelintegraler. Här är det inte ens möjligt att tolka integralerna på det enkla geometriska sättet (enkelintegral = area, dubbelintegral = volym). Men trippelintegraler behövs ändå, t.ex. för bestämning av massan hos en kropp med olikformig densitet, eller beräkning av tyngdpunkt och moment för kroppar. **Ex. 1–3** illustrerar själva beräkningstekniken. **Ex. 4** *behöver* inte lösas med en trippelintegral, men det kan ibland vara bekvämt att teckna en volym som $\iiint_R dV$.

Ex. 5 innebär nyttig hjärngymnastik: konsten att skissa och arbeta med tredimensionella figurer är inte helt enkel. (Olika människor verkar ha ganska olika talang för det.) I **Ex. 6** visas hur man kan ersätta en uppsättning olikheter med en annan. Två beskrivningar av ett område är ekvivalenta om varje olikhet i den ena kan logiskt härledas från den andra, och vice versa.

Räkna några **övningar på sid. 873: nummer 1, 2, 3, 5, 7, 14, 17**. Håll ögonen öppna för möjligheten att utnyttja symmetrier! Om integrationsområdet är symmetriskt med avseende på ett koordinatplan, kommer t.ex. termer i integranden som är »udda« på rätt sätt att få integralen noll.

I avsnitt 14.6 tas upp hur man byter variabler i en trippelintegral. Linjära variabelbyten (**Ex. 1**) fungerar analogt med i två dimensioner. Cylinderkoordinater är inte egentligen särskilt märkvärdiga: de innebär bara att man använder vanliga polära koordinater i stället för x, y och låter z vara kvar som tredje koordinat. Studera **Ex. 2–3**.

Däremot är sfäriska koordnater något alldeles nytt: en punkts läge i rummet anges genom att man talar om dess avstånd ρ till origo samt (i princip) latitud och longitud på den sfär kring origo som har radien ρ. Studera introduktionen på sid. 877 och de följande exemplen. Räkna på **sidan 882, nummer 1–3, 5, 7, 15, 17, 25** och kanske **27.**

I avsnitt 14.7 finns tillämpningar. Du kan nöja dig med att studera följande: Arean av en graf, sid. 883–4; masscentrum (centroid) sid. 886–8. Det övriga får fysikerna ta hand om! Några **övningar på sid. 891 f.: 1, 3, 7, 19, 21.**

Extraövning:

Övning 10 sid 873.

Till räkneövning nr 13

Nu kommer vi in på det som kröner kursen: det handlar om matematik som spelar stor roll inom tillämpningar som elektromagnetism, hydrodynamik m.m. Till stor del beskrivs sådant med hjälp av begreppet *fält*.

Avsnitt 15.1 presenterar skalära fält och vektorfält. Läs igenom det och försök få en känsla för sakerna, inklusive strömlinjer i ett vektorfält (det som Adams kallar *field lines*). Formlerna i polära koordinater behöver ni inte kunna (men ni ska veta att de finns!). Lös **några övningar på sid. 900: nummer 1–3, 5, 7**. Kanske också något tredimensionellt exempel, som **9, 13**; men det är inte aktuellt med någon mer djuplodande problemlösning här.

I avsnitt 15.2 handlar det om en mycket viktig kategori av fält: sådana som kallas konservativa, dvs. som är gradienter av något skalärfält. *Fysikaliskt* förekommer sådana fält i anslutning till energiprincipen; exempel är (Newtonsk) gravitation och elektrostatiskt fält i vakuum. *Matematiskt* kan man se det här som en flerdimensionell variant av problemet att bestämma en primitiv funktion.

Om $\mathbf{F} = \nabla\phi$, säger Adams att ϕ är en *potential* till $\mathbf{F}$. Detta stämmer inte med det vanliga sättet att uttrycka sig i fysiken: där är det $-\phi$ som är potential. Jag föreslår att man kallar ϕ för en *primitiv funktion* till fältet $\mathbf{F}$ – det är inte så allmänt vedertaget, men kan knappast missförstås.

Läs igenom texten och observera att de blåtonade villkoren på sid. 903 är *nödvändiga*, men inte säkert *tillräckliga*. Detta ser man i **Ex. 5**. Studera även **Ex. 1–4**. Begreppen *källa, sänka* och *dipol* hör till allmänbildningen, men **Ex. 6** kan ni hoppa över.

Bland **övningarna på sid. 909** bör ni lösa **nummer 1–5, 9**.

I avsnitt 15.3 och 15.4 introduceras kurvintegraler, som finns av två slag: integral med avseende på båglängden och s.k. arbetsintegral. Den senare är den viktigaste. Integralerna i 15.3 kan användas för att bestämma massa, tyngdpunkt och moment för trådformiga massfördelningar. Titta igenom **Ex. 1** och **2** och **gör övningarna 1, 2, 8 på sid. 915**. (Övning 1 leder fram till en integral, som är ganska besvärlig att beräkna; man får ta till tabeller sådana som finns på bakre pärmuppslaget i Adams.)

Det som händer i 15.4 är som sagt mycket viktigare. Den här typen av integral används som sagt för att beräkna det arbete som uträttas då en partikel rör sig i ett kraftfält. Det finns flera olika sätt att notera dessa integraler:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{T}}\, ds = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Den mellersta formeln innehåller *enhetstangenten* till kurvan och betonar att det är fältvektorn $\boldsymbol{F}$:s projektion på kurvans tangent som är den »aktiva« vektorn. För att konkret beräkna en kurvintegral har man ytterligare skrivsätt:

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_a^b \big(P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(\cdots)\,y'(t) + R(\cdots)\,z'(t)\big)\,dt.$$

(Om kurvan råkar löpa parallellt med en koordinataxel kan integralen skrivas som en »vanlig« integral – se föreläsningsanteckningar.)

Om fältet är konservativt blir beräkningen av kurvintegralen särskilt enkel. I det fallet beror dess värde inte ens av vilken kurva man väljer mellan start- och slutpunkt. Detta behandlas i den sista delen av avsnittet.

Läs hela texten och lös **övningar på sid. 923 f.: 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13.** (I övning 13 är fältet »nästan« konservativt: det kan skrivas som summan av ett konservativt fält och ett mycket enkelt annat fält. Det kan man utnyttja – jämför **Ex. 4**!)

Till räkneövning nr 14

Till den här gången kan det tänkas att det finns en del kvar från det ovanstående. Det är inte så mycket som ytterligare kommer till. Vi gör ett litet hopp och tar upp den första delen av avsnitt 16.3, för att slutgiltigt klara av problemet med »primitiv funktion« i två variabler, innan vi ger oss på det mer komplicerade tredimensionella fallet.

Greens formel kan användas på olika sätt. *Direkt* tillämpning förutsätter att man har en sluten kurva, och att integranden uppför sig snällt både på och innanför denna. Några sätt att använda satsen:

• Kurvintegralen tas på en sluten kurva och ersätts med en dubbelintegral som är enklare att beräkna (**Ex. 2** sid. 964, övning 3 nedan).

• Man har en sluten kurva, men integranden är singulär i en punkt innanför kurvan. Då kan man ersätta kurvan med en annan som är enklare på ett eller annat sätt (**Ex. 3** sid. 964, övning 2 nedan).

• Kurvan är inte sluten, men kan slutas till med en kurvsnutt så att man kan beräkna kurvintegralen med en dubbelintegral och en (förhoppningsvis) enklare integral över kurvsnutten (ex. på föreläsning och övning 1 nedan).

Övningar **på sid. 965–6: nummer 1–5** och, om det finns tid, följande gamla godbitar.

1. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C (e^{x+y} - y)\,dx + (e^{x+y} - 1)\,dy$$

längs halvcirkelbågen i första kvadranten från origo till punkten $(1, 0)$.

2. Beräkna

$$\int_C (2xy - x^2 + y^2 \sin xy^2)\,dx + (x + y^2 + 2xy \sin xy^2)\,dy,$$

där C är den positivt orienterade randen till området $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

3. Beräkna

$$\int_C \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{x^2 + y^2 + 2x + 1},$$

där C är kurvan $|x| + |y| = 4$, genomlöpt ett varv i positiv led.

4. Bevisa att kurvintegralen

$$\int_C (3x^2 + 2xy - 2x - y + 1)\,dx + (x^2 - x)\,dy,$$

där C är en väg från punkten $(0, a)$ till punkten $(1, b)$, är oberoende av valet av a, b och C; och bestäm integralens värde.

(Svar: **1.** $e - 1 - \pi/8$. **2.** $\frac{1}{30}$. **3.** -2π. **4.** 1.)

Till räkneövning nr 15

Nu kommer ni in på de sista verkligen nya begrepp som ingår i kursen: ytintegraler av skalärfält (»massintegraler«) och av vektorfält (»flödesintegraler«). Det handlar alltså om integration över tvådimensionella mängder eller *ytor*, plana eller buktiga. Först ska ni bekanta er (i 15.5) med ännu ett sätt att beskriva ytor. Ni har redan stött på två sätt:

(1) Yta som funktionsgraf: $z = f(x, y)$ för $(x, y) \in D$ (där D är ett område i planet).

(2) Yta som nivåyta till en funktion: $F(x, y, z) = 0$.

Nu tillkommer:

(3) Parametriserad yta: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ för $(u, v) \in D$, där D är ett område i *parameterplanet*. (Obs. att D inte behöver vara en rektangel, som Adams antar i definition 4.)

Man kan se detta som att man låter en funktion $\mathbf{r}(u, v)$ »deformera« ett plant område i uv-planet till en (i allmänhet) buktig yta som svävar i xyz-rummet. Exempel är bokens **Ex. 1–2** och de parametriseringar av en cirkulär cylinder eller en torus, som gavs på föreläsningen. För enkla och regelbundna ytor som dessa kan parametrarna u och v gärna väljas så att de fungerar som »naturliga koordinater« i ytan (i stil med latitud och longitud på en sfär).

När man ska undersöka en yta i detalj, kan man använda de kurvor i ytan som svarar mot linjer $v =$ konstant och $u =$ konstant. Tangentvektorer till dessa kurvor får man som de partiella derivatorna

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,.$$

Man inser att en normalriktning till ytan ges av vektoriella produkten $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Denna vektor visar sig även innehålla upplysning om den lokala areaskalan vid avbildningen $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$. Man säger att *ytelementet* ges av

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv.$$

Specialfall av detta för ytor givna efter modellerna (1) och (2) ovan är

$$dS = \sqrt{1 + (f_1)^2 + (f_2)^2}\, dx\, dy \quad \text{resp.} \quad dS = \left|\frac{\nabla F}{F_3}\right| dx\, dy.$$

(I det senare fallet tänker man sig ytan projicerad i xy-planet.) Glöm inte att normalriktningen till ett *plan* kan avläsas direkt från planets ekvation, men att man får tänka sig för vad den ska ha för längd i olika situationer.

Studera **Ex. 5–7** och **9** och lös några **övningar på sid. 936: nummer 4, 7, 8, 13**. Dessutom följande:

• Beräkna arean av en *sfärisk zon*, dvs. den del av en sfär som ligger mellan två parallella plan. Konkret: den yta som beskrivs av $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $b \leqslant z \leqslant c$. (Resultatet är på ett visst sätt lite överraskande. Hur då?)

De lite mer komplicerade flödesintegralerna i 15.6 handlar om att man integrerar *normalkomponenten* av ett vektorfält över en yta. I praktiken blir det så här för en parameteryta:

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \bullet (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, du\, dv.$$

Återigen ser vi hur vektorn $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ gör dubbel nytta — som normal och som areaskala!

I fallen (1) och (2) ovan fungerar det så att

$$\widehat{\mathbf{N}}\, dS = (-f_1,\ -f_2,\ 1)\, dx\, dy, \qquad \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{F_3} \nabla F\, dx\, dy$$

(se **Ex. 4** resp. **Ex. 5** i boken).

Det är viktigt att man ser till att normalriktningen verkligen ger flödet i den efterfrågade riktningen. Annars får man klämma dit ett minustecken.

Övningar på sidan 943: 1, 2, 5, 7.

Dessutom kan ni räkna **problem 1–3** i de blandade övningarna som börjar på sid. 18 i detta häfte.

Till räkneövning nr 16

Nu kommer vi till det sista i kursen: den tredimensionella vektoranalysen i kapitel 16. I 16.1 definieras operatorerna div och rot (eller curl), och man visar hur de kan skrivas med hjälp av den symboliska operatorn ∇. Läs texten fram t.o.m. **Ex. 2**. Tolkningen av divergens som källtäthet i sats 1 är också viktig, inte minst därför att den visar att divergensen inte beror på koordinatsystemet utan är en verklig »fysisk« storhet. Detta illustreras också av anmärkningarna efteråt och **Ex. 3**. Avsnittet om distributioner och deltafunktioner kan ni bara skumma igenom. Slutligen ges en tolkning av rotationen, som är knepigare än divergensen. Drunkna inte i det avsnittet heller. Övningarna på **sid. 953 är enkla; gör nummer 1–8.**

Avsnitt 16.2 är mest av intresse för specialister, och ni kan gå förbi det helt.

Avsnitt 16.3 har ni redan varit inne på; nu kan ni också förstå innebörden av den avslutande divergenssatsen, som anknyter till det följande avsnittet. Där kommer den tredimensionella divergenssatsen eller Gauss' sats. Den har en naturlig hydrodynamisk tolkning: mängden vätska per tidsenhet som strömmar ut genom en *sluten* yta får man genom att integrera källtätheten över det inneslutna området: det som strömmar ut är det som alstras innanför. Satsen är i många avseenden analog med Greens formel i planet och kan användas på liknande sätt. Studera **Ex. 1–5**. Varianterna i sats 9 kan ni hoppa över. Övningar: **sidan 971 f. nummer 1, 2, 6** och **blandade övningar sid 17 i detta häfte, nummer 5, 7, 8, 11, 14, 17**.

Kursens sista avsnitt är 16.5, som handlar om Stokes' sats. Observera att en sluten kurva i det tredimensionella rummet är rand till ett obegränsat antal olika ytor, dvs. man kan ibland ha frihet att välja vilken yta man vill arbeta med. Satsen har annars först och främst principiell och teoretisk betydelse. Det är i praktiken sällan så att det är lättare att räkna ut en integral över än buktig yta än att räkna ut kurvintegralen direkt. Studera dock **Ex. 4–5** (Den avslutande anmärkningen har vi redan diskuterat i samband med Greens formel.)

En intressant konsekvens av Stokes är att flödet av fältet $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ är detsamma för alla ytor med samma randkurva. Detta kan man även inse på ett annat sätt – hur? (Det hänger ihop med en av reglerna i sats 3 sid. 954–537.)

Övningar på sid. 977: 2, 3, 4, 8 och **blandade övningar nummer 6, 9, 15, kanske också 16 och 19.**

Till räkneövning nr 17–18

Här blir det inga detaljerade läsanvisningar – nu är det dags att repetera hela kursen, t.ex. genom att räkna gamla tentor.

Blandade övningar på kurv- och ytintegraler

Med * markeras lite svårare uppgifter.

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $4z = x^2 + y^2$ som skärs ut av cylindern $z = y^2$ och planet $z = 3$.

2. Beräkna arean av den del av planet $x+2y+z = 1$ som skärs ut av cylindern $x^2+y^2 = 1$.

3. En del S av konen med ekvation $x^2+y^2 = z^2$ ligger över xy-planet och dess projektion på xy-planet har area A. Visa att arean av S är $A\sqrt{2}$.

4. Antag att ytan S har ekvationen $z = h(x, y)$, där $(x, y) \in D$ och D är ett område i $\mathbb{R}^2$. Visa att arean av S ges av
$$\iint_D \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\,dy.$$

5. S betecknar ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, med normalen riktad från origo. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(y-1)\mathbf{k}$ genom S.

6. Låt C vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 - x = 0$ och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + x\mathbf{k}$ och C genomlöps så att riktningen i $(1, 0, 0)$ ges av vektorn $(0, 1, 0)$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + (z^2 + 2)\mathbf{k}$ ut ur cylindern $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

8. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + y^2e^z\mathbf{j} + (2y - 2ye^z)\mathbf{k}$ vara ett vektorfält i $\mathbb{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första oktanten (dvs. $x, y, z > 0$). Normalriktningen antas ha positiv z-komponent.

9. Beräkna $\left|\int_C (z-x)^2\,dx + (z+x)^2\,dy + z^2\,dz\right|$, där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $2x + y + z = 2$.

10. * S är en sluten yta (med utåtriktad normal) för vilken Gauss' sats (divergenssatsen) är tillämplig, och $\mathbf{F} = (2x + y - \frac{1}{3}x^3)\mathbf{i} + (y - 4yz^2)\mathbf{j} + (z - 4y^2z)\mathbf{k}$. Bestäm, under dessa förutsättningar, det maximala värdet av $\iint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$.

11. *Beräkna $\iint_S F \bullet \widehat{\mathbf{N}}\,dS$, då $\mathbf{F} = \sin x^2\mathbf{i} + (y - 2xy\cos x^2)\mathbf{j} + (1 + y + z)\mathbf{k}$, och S är den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $x \geqslant 0$ och $z \geqslant 0$. Ytans positiva normalriktning bildar icke-trubbig vinkel med positiva z-axeln.

12. * $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. C är en styckvis deriverbar sluten kurva på cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och skär inte sig själv. Beroende på hur C löper på ytan (bara ett varv, givetvis), kan $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ anta tre olika värden. Beskriv de tre fallen och bestäm de tre värdena.

13. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\,dS$, där S är halvellipsoiden $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geqslant 0$, med uppåtriktad normal, och $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$.

14. Beräkna flödet av vektorfältet $xy\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x + 2y + 3z)\mathbf{k}$ ut ur volymen $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

15. Beräkna $\left|\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz\right|$, där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 1$ och planet $2x + 2y + z = 3$.

16. *Beräkna med hjälp av Stokes' sats $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = (yz + y - z)\mathbf{i} + (xz + 5x)\mathbf{j} + (xy + 2y)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + y = 1$. C är orienterad så att dess omloppsriktning i punkten $(1, 0, 0)$ ges av vektorn $(0, 0, 1)$.

17. Visa att $\displaystyle\int_C (2xy + z^2)\,dx + (2yz + x^2)\,dy + (2xz + y^2)\,dz$ är oberoende av vägen mellan två givna punkter A och B.

18. *Låt S vara den del av cylindern $x^2 + y^2 = 1$ som ligger mellan planen $z = 0$ och $z = x + 2$. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, om $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

19. *Beräkna $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F} = (xy + z)\mathbf{i} + y^2z^3\mathbf{j} + (\frac{1}{2}x^2 + z^2)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + 2y^2 = 1$ och $z = y + 1$. C:s omloppsriktning är positiv (moturs) sett från origo.

Svar:

1. $\frac{56}{9}\pi$. 2. $\pi\sqrt{6}$. 5. 0. 6. $-\pi/4$. 7. $\pi/3$.

8. $e - \frac{5}{2}$. 9. 0. 10. $\frac{64}{15}\pi$. 11. π. 12. $0, \pi, -\pi$.

13. 0. 14. 28π. 15. 5π. 16. $-\pi\sqrt{2}/4$. 18. 2π.

19. $\pi/\sqrt{2}$.

KURVOR OCH YTOR

En kurva i planet kan man beskriva med *en ekvation*, dvs. något sådant som $y = f(x)$ eller $F(x, y) = c$. Alternativt kan den parameterframställas, dvs. man har *två ekvationer som innehåller en extra variabel:* $x = x(t)$, $y = y(t)$, där parametern t genomlöper något intervall I. Detta kan uppfattas som en avbildning, en deformation av intervallet I till en kurva.

En yta i det tredimensionella rummet beskrivs också av *en ekvation*, t.ex. $z = f(x, y)$ eller $F(x, y, z) = c$. Ska man parameterframställa en yta innebär det att man »deformerar« ett område D i t.ex. uv-planet till ytan, dvs. man behöver två parametrar och tre ekvationer: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

En kurva i det tredimensionella rummet beskriver man gärna som en deformation av ett intervall I, med tre ekvationer: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, där $t \in I$. Ska man beskriva en kurva parameterfritt, blir det enklast som en *skärning mellan två ytor*, dvs. man har *två* ekvationer som innehåller x, y, z:

$$F(x, y, z) = c_1, \ G(x, y, z) = c_2.$$

En sådan beskrivning är på intet sätt entydigt bestämd: det finns ju oändligt många ytor som innehåller kurvan.

GEOMETRI:

En (slät) kurva i planet har en tangentlinje och en normallinje i varje fixerad punkt.

En (slät) kurva i rummet har en tangentlinje och ett normalplan i varje punkt.

En (slät) yta i rummet har tangentplan och normallinje i varje punkt.

ANALYS:

En funktion av två eller tre (eller fler) variabler kan ha en gradient.

BLANDA INTE IHOP:

En *funktion* kan inte ha tangent eller normal, en *kurva* eller *yta* kan inte ha en gradient.

SYNTES:

1. Vad är »$z = f(x, y)$«? En ekvation. Kan tolkas som beskrivning av en funktion. Eller en yta i $\mathbb{R}^3$. Denna ytas tangentplan kan i så fall beskrivas med i princip differentialen av funktionen f. Gradienten av f lever sitt liv i xy-planet, bör uttolkas primärt i »höjdkartan« av f, inte på ytan som svävar i $\mathbb{R}^3$.

2. Vad är »$f(x, y) = c$«? Också en ekvation. Kan betyda en kurva i $\mathbb{R}^2$, som är en nivåkurva för funktionen f. I en fix punkt på nivåkurvan är gradienten av funktionen f vinkelrät mot kurvan. (Ty längs kurvan förändras inte f:s värde, och längs gradienten ändras värdet med maximal fart.)

Mellan 1 och 2 finns samband: kurvorna $f(x, y) = c$ i planet utgör tillsammans »höjdkartan« över funktionen f.

3. Vad är »$F(x, y, z) = c$«? En ekvation! Kan betyda en yta i $\mathbb{R}^3$, som är en nivåyta för funktionen F. I en fix punkt på nivåytan är gradienten av funktionen F vinkelrät mot ytan. (Ty när man rör sig i ytan förändras inte F:s värde, och längs gradienten ändras värdet med maximal fart.)

Ytorna $F(x, y, z) = c$ (för alla värden på c) bildar tillsammans en tredimensionell »karta« över funktionen F.

Lösningar och svar till vissa av extraövningarna

Till räkneövning nr 1

(a) Eliminera z mellan ytornas ekvationer:

$$(z =)\ 3x^2 + 4y^2 - 4x = x^2 + 3y^2 + 2y - 1,$$

vilket kan skrivas om till $2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$. Kvadratkomplettering ger $2(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ eller

$$\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Projektionen i xy-planet är alltså en ellips med centrum i $(1, 1)$ och halvaxlar 1 (i x-led) och $\sqrt{2}$ (i y-led).

(b) Analogt med (a) får man $x^2 + 4y^2 = 4 - 2x - 8y$ eller $(x+1)^2 + 4(y+1)^2 = 9$, som på standardform blir

$$\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$$

En ellips med centrum $(-1, -1)$ och halvaxlar 3 (i x-led) och $\frac{3}{2}$ (i y-led).

Till räkneövning nr 2

(a) Projektionen i xy-planet parametriseras med tänjda polära koordinater som $x = -1 + 3\cos t$, $y = -1 + \frac{3}{2}\sin t$; sedan hissar vi upp det i z-led genom $z = 4 - 2x - 8y$ och får alltså

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (\tfrac{3}{2}\sin t - 1)\mathbf{j} + (14 - 6\cos t - 12\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

(b) Se Adams figur 8.38 sid. 508. I närheten av $\theta = 0$, där kurvan passerar origo, kan man Maclaurinutveckla parameterframställningen:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta - \cos^2\theta = \cos\theta - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(2\theta\right)^2 + O(\theta^4) \\ &= \tfrac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^4); \\ y &= \sin\theta - \sin\theta\cos\theta = \sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta = \theta - \tfrac{1}{6}\theta^3 - \tfrac{1}{2}(2\theta) + \tfrac{1}{12}(2\theta)^3 + O(\theta^5) \\ &= \tfrac{1}{2}\theta^3 + O(\theta^5). \end{aligned}$$

Man kan alltså skriva

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta) = \tfrac{1}{2}\theta^2(\mathbf{i} + \theta\mathbf{j}) + O(\theta^4)\mathbf{i} + O(\theta^5)\mathbf{j}.$$

Eftersom $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, kan vi skriva

$$\frac{\mathbf{r}(\theta) - \mathbf{r}(0)}{\theta^2} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{i} + \theta\mathbf{j}) + O(\theta^2)\mathbf{i} + O(\theta^3)\mathbf{j} \to \tfrac{1}{2}\mathbf{i} \text{ då } \theta \to 0.$$

Detta visar att även om $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$, så har kurvan en sorts tangent i origo, en s.k. *spetstangent*. För att beräkna kurvans längd använder vi formen

$$\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta)\mathbf{j},$$

varav

$$\mathbf{r}'(\theta) = (\sin 2\theta - \sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta - \cos 2\theta)\mathbf{j}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}'(\theta)|^2 &= (\sin 2\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \cos 2\theta)^2 \\
&= \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2 2\theta + \cos^2\theta - 2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta) \\
&= 1 + 1 - 2\cos(2\theta - \theta) = 2 - 2\cos\theta = 4\frac{1-\cos\theta}{2} = 4\sin^2\frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Alltså är $|\mathbf{r}'(\theta)| = 2|\sin(\theta/2)|$. För $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ är $\sin(\theta/2) \geqslant 0$, så beloppet är onödigt och båglängden blir då

$$s = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(\theta)| d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8.$$

Till räkneövning nr 3

(b) Använd derivatans definition: för $y \neq 0$ är

$$\frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{hy(h^2-y^2)}{h^2+y^2} - 0\right) = \frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2} \to \frac{-y^3}{y^2} = -y$$

då $h \to 0$. I origo blir det ändå enklare:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \to 0,$$

så att formeln $f_1(0,y) = -y$ gäller för alla reella y. På analogt sätt visar man att $f_2(x,0) = x$ för alla reella x.

Till räkneövning nr 5

Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = e^{-z}\frac{\partial f}{\partial u} + e^{z}\frac{\partial f}{\partial v}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = e^{-z}\frac{\partial f}{\partial u} - e^{z}\frac{\partial f}{\partial v}, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = -(x+y)e^{-z}\frac{\partial f}{\partial u} + (x-y)e^{z}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger (efter förenkling)

$$0 = y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Ekvationen säger nu att f är oberoende av w, dvs. en (gostycklig) funktion av enbart u och v: $f = g((x+y)e^{-z},\ (x+y)e^{z})$, där g är en godtycklig (differentierbar) funktion av två reella variabler.

Till räkneövning nr 6

Använd ledningen och studera hur $g(x)$ varierar med x: $g'(x) = f_1(x, 2x + a) + 2f_2(x + 2a)$. Men detta uttryck är ju noll enligt differentialekvationen. Det betyder att funktionen g är konstant, dvs. f har samma värde i alla punkter på linjen $y = 2x + a$. Denna är alltså (ev. en del av en) nivåkurva för f, v.s.b.

Till räkneövning nr 7

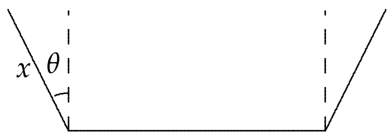
1. Sätt $F(x, y) = \ln(xy) - (x-1)e^{y-1} = \ln x + \ln y - (x-1)e^{y-1}$. Man ser att $F(1, 1) = 0$. Vidare är
$$F_2(x, y) = \frac{1}{y} - (x-1)e^{y-1}, \quad F_2(1, 1) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$
Enligt »implicita funktionssatsen« definierar då sambandet $F(x, y) = 0$ variabeln y som funktion av x i någon omgivning av punkten $(1, 1)$. Derivera sambandet m.a.p. x, varvid y betraktas som en funktion av x:
$$0 = \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} - e^{y-1} - (x-1)e^{y-1}y'. \tag{1}$$
Sätt in $x = 1$, $y = 1$ så fås $0 = 1 + y' - 1 - 0$, varav man ser att $y' = 0$ i punkten. Derivera (1) en gång till:
$$0 = -\frac{1}{x^2} + \frac{yy'' - y'y'}{y^2} - 2e^{y-1}y' - (x-1)e^{y-1}\big(y'\big)^2 - (x-1)e^{y-1}y''.$$
Sätt in $x = 1$, $y = 1$, $y' = 0$ så fås nu $0 = -1 + y'' - 0 - 0 - 0$ varav $y'' = 1$. Punkten är alltså ett lokalt minimum för $y = y(x)$. □
2. Sätt $F(x, y, z) = x^2 - xyz + y^2 + z^3 - 4$. Då är $F(2, 1, 1) = 0$ och
$$F_3(x, y, z) = -xy + 3z^2, \quad f_3(2, 1, 1) = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$
Som i förra exemplet följer det första resultatet: $z = f(x, y)$ i någon omgivning av punkten. För gradienten deriverar vi det givna sambandet först m.a.p. x, sedan m.a.p. y:
$$\begin{aligned} 0 &= 2x - yz - xyz_x + 0 + 3z^2 z_x, \quad \text{i punkten:} \quad 0 = 4 - 1 - 2z_x + 3z_x = 0 \\ 0 &= 0 - xz - xyz_y + 2y + 3z^2 z_y, \quad \text{i punkten:} \quad 0 = -2 - 2z_y + 2 + 3z_y. \end{aligned}$$
Man får $z_x = -3$, $z_y = 0$, så att $\nabla f(2, 1) = -3\mathbf{i}$.
3. Kombinera idéer från 1 och 2.

Till räkneövning nr 8

De partiella derivatorna är
$$f_1 = 2x(1 + y), \quad f_2 = 3x^2(1 + y)^2 + 2y.$$
$f_1 = 0$ ger dels $x = 0$, dels $y = -1$. I det första fallet tvingar $f_2 = 0$ även y att vara 0; alltså $(0, 0)$ stationär. Om $y = -1$ *kan inte* f_2 bli 0; origo är alltså enda stationära punkt. Man ser dessutom att $f(0, 0) = 0$ medan $f(x, y) > 0$ för alla andra (x, y) med $y > -1$, vilket betyder att origo är strängt lokalt minimum.

Men t.ex. $f(1, y) = (1 + y)^3 + y^2 = y^3 + 4y^2 + 3y + 1$ är ett tredjegradspolynom i y, som ju går mot $\pm\infty$ då x går mot $\pm\infty$. Enligt satsen om mellan liggande värden måste f anta alla reella värden. Hur detta är möjligt kan man kanske se genom att låta MAPLE försöka avbilda grafen, eller rita nivåkurvor. Det är lite knepigt, men försök gärna!

Till räkneövning nr 9



Man kan införa variabler θ och x som i figuren. Höjden av rännan blir då $x \cos\theta$ och översidan $(60 - 2x) + 2x \sin\theta$. Hela arean blir

$$A = x\cos\theta \cdot \big((60 - 2x) + x\sin\theta\big) = (60x - 2x^2)\cos\theta + \tfrac{1}{2}x^2 \sin 2\theta.$$

Denna funktion av de båda oberoende variablerna x och θ studeras för $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ (en ränna med negativt θ har mindre area än för motsvarande positiva θ). Definitionsmängden är kompakt, så maximum måste existera. Derivator:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial x}(60 - 4x)\cos\theta + x\sin 2\theta = \cos\theta(60 - 4x + 2x\sin\theta),\\
&\frac{\partial A}{\partial \theta} = -(60x - 2x^2)\sin\theta + x^2\cos 2\theta.
\end{aligned}$$

Om $\cos\theta = 0$ är θ en rät vinkel, och då blir $A = 0$, ej max. Alltså måste $\partial A/\partial x = 0$ betyda att

$$\sin\theta = \frac{4x - 60}{2x} = \frac{2x - 30}{x}.$$

Använd $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, och sätt in i $\partial A/\partial\theta$:

$$\begin{aligned}
0 &= (2x^2 - 60)\frac{2x - 30}{x} + x^2\Big(1 - 2\,\frac{(2x - 30)^2}{x^2}\Big) = (2x - 60)(2x - 30) + x^2 - 2(2x - 30)^2\\
&= 4x^2 - 180x + 1800 + x^2 - 8x^2 + 240x - 1800 = -3x^2 + 60x = -3x(x - 20).
\end{aligned}$$

För $x = 0$ blir det åter en ointressant »ränna«, så $x = 20$ bör vara det vi söker. Då blir

$$\sin\theta = \frac{40 - 20}{20} = \tfrac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Arean blir då $A = 300\sqrt{3}$ (cm^2).

Punkter på randen till definitionsmängden kan inte konkurrera, vilket man bör fundera en liten stund på.

Till räkneövning nr 10

Problemet gäller att ta bort beloppet. Vi undersöker var $g(x, y) = xy - x - y$ är noll:

$$xy - x - y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(y - 1) = y \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{y}{y - 1}.$$

Denna kurva skär igenom D som delas i en del D_1 till vänster och en del D_2 till höger. (Rita figur!) I D_1 är $g(x,y) < 0$, i D_2 är $g(x,y) > 0$. Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x+y-xy)\,dA + \iint_{D_2} (xy-x-y)\,dA \\ &= \int_2^4 dy \int_0^{y/(y-1)} (x+y-xy)\,dx + \int_2^4 dy \int_{y/(y-1)}^3 (xy-x-y)\,dx. \end{aligned}$$

Lustigt nog råkar de båda termerna ha samma värde, var och en är $4 + \frac{1}{2}\ln 3$, så svaret blir $8 + \ln 3$.

Till räkneövning nr 15

Bestäm arean av den sfäriska zonen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $b \leqslant z \leqslant c$.
Lösning: Med vanliga sfäriska koordinater beskrivs ytan av

$$\rho = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad b \leqslant a\cos\phi \leqslant c.$$

Den sista formeln kan skrivas $\arccos(c/a) \leqslant \phi \leqslant \arccos(b/a)$ (observera att cos är avtagande på intervallet $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$). Man har som överst på sid. 915 areaelementet $dS = a^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta$, och arean blir

$$\begin{aligned} \iint dS &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\arccos(c/a)}^{\arccos(b/a)} \sin\phi\, d\phi = 2\pi a^2 \Big[-\cos\phi\Big]_{\arccos(c/a)}^{\arccos(b/a)} \\ &= 2\pi a^2 \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\right) = 2\pi a(c-b). \end{aligned}$$

Det som kanske förbluffar i denna formel är att arean beror av »klotskivans« tjocklek $(b-a)$, men inte i och för sig av mellan vilka latituder den ligger.