UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Volodymyr Mazorchuk 471-3284
Ryszard Rubinsztein 471-3226

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
F, K, IT, Q, W, X
Enstaka kurs
LINJÄR ALGEBRA
2002–12–16

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Låt $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara den linjär avbildning som definieras genom

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4, 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 6x_4, \\ -x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4).$$

Bestäm en bas i F :s nollrum och en bas i F :s värderum. För vilka värden på den reella konstanten a tillhör vektorn $w = (5 + 2a, -17 - 7a, 2 + a, -a)$ F:s värderum?

2. a) Ge definitionen av en bas i ett linjärt rum.

b) Avgör om vektorerna $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, -1, -1)$, $u_3 = (2, 1, 2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Bevisa ditt påstående.

c) Avgör om polynomen $p_1(x) = 1 - x + x^2$, $p_2(x) = 1 + x$, $p_3(x) = x + x^2$ utgör en bas i rummet $\mathcal{P}_2 = \mathbb{R}[x]_2$ av alla reella polynom av grad högst 2. Bevisa ditt påstående.

3. $S : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ är den linjära avbildning som geometriskt betyder speglingen i planet $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Bestäm S :s matris i standardbasen och visa att avbildningen S är symmetrisk.

4. M är ett delrum av $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, 1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 2, 0, -2)$, $u_3 = (2, 3, 1, -1)$, $u_4 = (0, 1, 1, 1)$, $u_5 = (1, 2, 1, 0)$.

a) Finn en ON-bas i det ortogonala komplementet $M^\perp$.

b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $w = (2, -4, 3, 1)$ på M.

c) Bestäm avståndet från w till M.

V.g.v.!

5. Visa att den andragradsyta i $\mathbb{E}^3$ som ges av $3z^2+2xy+4xz+4yz=1$ är en rotationsyta. Bestäm ytans typ, dess rotationsaxel och det minsta avståndet från ytan till origo.

6. Avgör om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar eller inte. Om den inte är diagonaliserbar, bevisa detta. Om den är diagonaliserbar, bestäm den diagonala matrisen och transformationsmatrisen till motsvarande bas av egenvektorer. Avgör om matrisen A är inverterbar eller inte. (Observera att det inte behövs att bestämma A:s invers ifall den existerar.)

7. Låt $V=\mathcal{P}_2=\mathbb{R}[x]_2$ vara det euklidiska rum som består av alla reella polynom $p(x)$ av grad högst 2 med skalärprodukten

$$(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Låt N vara den delmängd av V som definieras genom

$$N = \{p(x) \in V : \int_0^1 (x^2-1)p(x)dx = 0\}.$$

Visa att N är ett delrum till V och finn den ortogonala projektionen av polynomet $q(x)=x$ på N.

8. Låt E vara ett ändligtdimensionellt euklidiskt rum och $F: E \to E$ vara en *symmetrisk* avbildning.

a) Visa att F :s nollrum och F :s värderum är varandras ortogonala komplement.

b) Visa att om $F^{2002}=0$, så är $F=0$.

c) Finn ett exempel av en *icke-symmetrisk* linjär avbildning, G, från något linjärt rum till sig själv, sådan att $G \neq 0$ men $G^{2002}=0$.

GOD JUL och GOTT NYTT ÅR!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA 2002–12–16

1.
- Vektorerna $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ och $v_2 = (2, -1, -1, 3)$ utgör en bas i F :s värderum.
- Vektorerna $u_1 = (1, -2, 1, 0)$ och $u_2 = (2, -2, 0, 1)$ utgör en bas i F :s nollrum.
- För $a = -2$.

2. (b) Nej.

(c) Ja.

3.

$$A = [F] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. (a) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1, 0)$ och $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1)$ (t.ex.).

(b) $pr_M(w) = (-1, -1, 0, 1)$

(c) $3\sqrt{3}$.

5. Tvåmantlad (rotations-) hyperboloid. Avståndet är $1/\sqrt{5}$. Rot. axeln är $\{t(1, 1, 2) | t \in \mathbb{R}\}$.

6. Matrisen är diagonaliserbar. Diagonalformen D och transformationsmatrisen S är:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ (t.ex.).}$$

A är inverterbar.

7. $x + \frac{15}{32}(x^2 - 1)$

8. c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$