UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein
Robin Kastberg
Justin Pati
Erik Raab
Emil Thalin

Höstterminen 2012

Linjär algebra och geometri 1 för

K1, W1, KandKe1

Kurslitteratur

H.Anton, C.Rorres, *Elementary Linear Algebra (with Supplemental Applications)*, 10:e upplagan, Wiley, 2011. Kapitel 1-3 och avs.4.1, 4.3, 4.4, 4.9, 4.10, 5.1.

Kurshemsida: http://www2.math.uu.se/~ryszard/

Här finner du aktuell information om kursen, exvis utdelade papper i pdf-format.

Undervisning

Undervisning sker i form av föreläsningar (20 st) och lektioner (10 st). Ca. 5 av föreläsningarna kommer att ägnas åt räkneövningar med genomgång av problem och uppgifter.

Preliminär tidsplan

Föreläsning	Avsnitt	
1	1.1–1.2	Linjära ekvationssystem, Gausselimination
2	1.1–1.2	Mer om linjära ekvationssystem
3	1.3	Matriser, matrisräkning
4	1.4–1.6	Matrisinvers
5	1.1–1.7	Räkneövning
6-7	2.1–2.2	Determinanter: definition, räkneregler
8	2.3	Den adjungerade matrisen, Cramers regel
9	2.1–2.3	Räkneövning.
10	3.1	Vektorer
11	3.2–3.3	Skalärprodukt
12	3.5	Vektorprodukt
13	3.4	Linjer och plan i rymden
14	3.1-3.5	Räkneövning
15	3.1–3.2, 4.1	Det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$
16	4.3–4.4	Linjärt oberoende av vektorer, baser, koordinater
17	4.9	Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$
18	4.10, 5.1	Linjära avbildningar (forts). Egenvärden och egenvektorer
19		Räkneövning
20		Repetition

Examination

Under kursens gång kommer en dugga att äga rum. Duggan kommer att vara 2 timmar lång och bestå av fyra uppgifter. Uppgifterna rättas och poängsätts. För att klara duggan krävs det 12 av 20 möjliga poäng.

Sluttentamen består av 8 uppgifter. En student som har klarat duggan får den första uppgiften på tentan godkänd med 5 poäng och får inte lösa denna uppgift på tentan.

På tentan krävs 18 poäng av 40 för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 , 32 poäng för betyget 5.

Den skriftliga sluttentamen äger rum onsdagen den 19/12.

Resultatet från duggan tillgodoräknas enbart vid detta tentamenstillfälle.

Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna lösa linjära ekvationssystem med Gausselimination och kunna redogöra för hur lösningen beror av koefficient- och totalmatrisernas ranger;
- kunna räkna med matriser, beräkna matrisinverser och determinanter;
- kunna redogöra för vektorbegreppet, känna till och kunna använda räknelagarna för vektorer, kunna avgöra om vektorer är linjärt oberoende, känna till begreppen bas och koordinat;
- kunna redogöra för begreppen skalärprodukt och vektorprodukt, samt kunna beräkna sådana produkter och tolka dem geometriskt;
- känna till linjens och planets ekvationer samt kunna använda dessa för att beräkna skärningar och avstånd;
- veta vad som menas med rotationer, speglingar och ortogonala projektioner i planet och i rymden, samt kunna beräkna matriserna för sådana avbildningar;
- kunna tolka en $m \times n$- matris som en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$;
- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa matematiska problem.

Tips

- Inför lektionerna, gör så många uppgifter som möjligt (bland de som finns angivna på den utdelade listan) **före** lektionen. På själva lektionen kan du då be om hjälp med sådana uppgifter som du har fastnat på.
- Mattesupporten är schemalagd i sal P2145 måndagar - torsdagar kl.17.00 - 19.00. Där finns amanuenser att fråga om man behöver hjälp.

Uppsala, den 19 oktober 2012.

Ryszard Rubinsztein
Robin Kastberg
Justin Pati
Erik Raab
Emil Thalin

Anvisningar till lektioner

Lektion 1

Till lektion nr 1 bör ni förbereda (dvs lösa) följande uppgifter:
avs.1.1, s.9-10: uppgifterna 1, 3(b)(c)(d), 7(b)(d), 9, 11, 13, 15,
avs.1.2, s.22-25: uppgifterna 2, 3, 4(a)(c), 5-16, 21, 22, 27, 30, 31, 36, 37, 39.

Ytterligare ett par uppgifter:

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -ax & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & (a+2)y & + & z & = & 2 \\ (1-a)x & + & y & + & z & = & 2 \end{cases}$$

för alla värden på konstanten a.

2. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x & + & 2y & + & bz & = & 1 \\ bx & + & y & + & z & = & 1+b \\ bx & + & 2by & + & b^2z & = & 1+b-b^2 \\ 2bx & + & (1+2b)y & + & 2z & = & b \end{cases}$$

för alla värden på konstanten b.

Facit:

1. $a \neq \pm 1:$ $(x,y,z) = (\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}, \frac{2-a}{1-a})$,
   $a = -1:$ $(x,y,z) = (t,\, 1-3t,\, 1+t),\ t \in \mathbb{R}$,
   $a = 1:$ inga lösningar.

2. $b \neq -1:$ inga lösningar,
   $b = -1:$ $(x,y,z) = (\frac{1}{3}+t,\, \frac{1}{3},\, t),\ t \in \mathbb{R}$.

Lektion 2

avs.1.3, s.35-38: 1(a)-(f), 4(f)(g), 5(a)(b)(d)(e), 11(b), 14(a), 27,
avs.1.4, s.49-51: 6, 16, 17, 18(f), 28, 30, 34, 51,
avs.1.5, s.58-60: 15, 19, 24, 27, 28.

Ytterligare en uppgift:

1. För vilka värden på den reella konstanten a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm A^{-1} för dessa värden på a.

Facit: A inverterbar $\Leftrightarrow a \neq 0, \pm 1$. Om $a \neq 0, \pm 1$ är

$$A^{-1} = \frac{1}{a(1-a^2)} \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ a & 0 & -a^2 \end{pmatrix} .$$

Lektion 3

avs.1.6, s.65-66:	**8, 12, 15, 18, 19, 23,**
avs.1.7, s.71-73:	**33.**
avs.2.2, s.105-106:	**10, 12, 14, 16, 17, 20-30, 34.**
avs.2.3, s.115-116:	**10, 11, 12, 15, 17.**

Lektion 4

avs.2.3, s.115-116:	**20, 21, 27, 29, 30, 36,**
avs.2.1, s.98-100:	**4(a)(d), 11, 16, 22, 25,**
avs.2.2, s.105-106:	**19.**

Ytterligare några uppgifter:

1. Beräkna följande determinant D av ordning $n \geq 2$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ b & b & b & \dots & b & x \end{vmatrix} .$$

Lös även ekvationen $D = 0$ i de fall då $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Beräkna följande determinant D av ordning $n+1$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

3.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

är en determinant av ordning n. Visa att det finns ett enkelt samband mellan D_n, D_{n-1} och D_{n-2} och använd detta för att beräkna D_n.

Facit:

1. $D = x^{n-2}(x^2 - ab)$, $D = 0$ har rötterna $\pm\sqrt{ab}$ och 0 (om $n \geq 3$).

2. $D_{n+1} = (1-a)^n$.

3. Sambandet $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Determinanten $D_n = n + 1$.

Lektion 5

avs.3.1, s.128-130:	**1(a)(e), 3, 4(d), 7, 14(a)(b), 22, 28, 31, 33, 34,**
avs.3.2, s.141-143:	**1(a)(b), 3(a)-(c), 9(a), 11(a), 13(a), 15, 16, 22, 33,**
avs.3.3, s.150-152:	**1(b)(c), 3(c), 5, 6, 7, 21, 25, 41, 43, 44.**

Lektion 6

avs.3.5, s.168-169:	**1, 3, 7, 13, 15, 17, 19, 20, 23, 27-29, 31(a), 36,**
avs.3.3, s.150-152:	**9, 13-15, 17, 29, 33, 37,**
avs.3.4, s.159-160:	**4, 6, 9, 13, 16, 21, 23, 25, 27.**

Lektion 7

avs.3.1, s.128-130:	**19(a)(b), 21, 23, 24, 29, 30,**
avs.3.2, s.141-143:	**2(c), 8, 10, 12(c), 14(c), 17, 23(d), 25(c),**
avs.4.2, s.188-190:	**7, 8, 11, 12, 20.**

Lektion 8

avs.4.3, s.199-200:	**1(a)(b)(c), 3, 5, 19,**
avs.4.4, s.207-208:	**3, 5, 9, 12, 16,**
avs.4.9, s.260-263:	**2, 7, 11, 13(b), 18(a)(b), 19(b),**
avs.4.10, s.271-273:	**4, 5, 7, 9, 11, 16(b), 17(b), 22(b)(c), 23, 24.**

Lektion 9

avs.4.10, s.271-273:	**14(a)(b), 15, 22(b)(c), 23, 24, 25, 27,**
avs.5.1, s.303-304:	**1, 6(a)(d)(e), 7(a)(d)(e), 8(a)(d)(e), 9(b), 10(b), 11(b), 12(b)(c), 13.**

Ytterligare en uppgift:

1. Finn alla egenvärden och alla egenvektorer till matrisen

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad (b)\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad (c)\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Facit:

1. (a) Egenvärden: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ och $\lambda_3=4$. Egenvektorer: $\vec{u}=t(-5,-2,1)$, $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$, (med $\lambda=-1$), $\vec{v}=s(1,0,1)$, $s\in\mathbb{R}$, $s\neq 0$, (med $\lambda=1$) och $\vec{w}=q(-5,3,1)$, $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 0$, (med $\lambda=4$).

(b) Egenvärden: $\lambda_1=\lambda_2=1$ och $\lambda_3=3$. Egenvektorer: $\vec{u}=t(-1,0,1)$, $t\in\mathbb{R}$, $t\neq 0$, (med $\lambda=1$) och $\vec{v}=s(-1,-1,1)$, $s\in\mathbb{R}$, $s\neq 0$, (med $\lambda=3$).

(c) Egenvärden: $\lambda_1=\lambda_2=1$ och $\lambda_3=3$. Egenvektorer: $\vec{u}=(s,0,t)=s(1,0,0)+t(0,0,1)$, $s,t\in\mathbb{R}$, $(s,t)\neq(0,0)$ (med $\lambda=1$) och $\vec{v}=q(-1,-1,1)$, $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 0$, (med $\lambda=3$).

Lektion 10

Till lektion 10 bör ni förbereda dessa uppgifter från denna lista som ni inte hann med tidigare. En del av lektionen kommer att ägnas åt repetition.

Blandade övningar i Linjär Algebara: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$, $\vec{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$.

(a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna $\vec{v} = (1, 3, -1, 4)$ och $\vec{w} = (2, -1, 1, 2)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Om vektorn $\vec{v}$ resp. $\vec{w}$ tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$.

2. För vilka värden av konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1, a, 4, 1 - a)$ det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$ och $\vec{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$?

3. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -2, 0)$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende eller oberoende. I fall de inte är det, finn bland $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

4. Visa att vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$ är linjärt beroende. Uttryck en av dem som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$.

5. Låt $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Finn en ekvation som komponenterna x_1, x_2, x_3 måste uppfylla för att vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ skall tillhöra det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Tolka resultatet geometriskt. För vektorer $\vec{v}$ som uppfyller ekvationen finn en framstälning av $\vec{v}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.

6. (a) Avgör om vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, -1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{\mathbf{v}}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2)$.

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$ i komposanter parallella med vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ (dvs. finn $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ sådana att $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ med $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$ och $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$).

7. (a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{\mathbf{u}}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$.

(b) Vektorerna $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ som summa av två komposanter $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, där komposanten $\vec{F}_1$ är parallell med vektorn $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ och komposanten $\vec{F}_2$ är parallell med planet π.

8. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{\mathbf{u}}$ för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 2, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Facit:

1. (a) Vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4$ är linjärt beroende.

(b) $\vec{v} \in \text{span}(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4)$, $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$, (t.ex.)

$\vec{w} \notin \text{span}(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4)$.

2. $a = 2$.

3. Vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ är linjärt beroende. Vidare är t.ex. $\text{span}(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3) = \text{span}(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ och $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ är linjärt oberoende.

4. T.ex. $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. $\quad \text{span}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_4) = \text{span}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4)$.

5. Ekvationen är $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Geometrisk tolkning: vektorerna $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Planet π har ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ omm $\vec{v}$ ligger (= är parallell) i detta plan.

Om $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ med $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ blir $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1 = \frac{1}{2}x_2$, $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$.

6. (a) Ja, $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.

$\vec{F} = (\frac{3}{5}\ ,\ \frac{1}{5})_{\underline{\mathbf{v}}}$.

$\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2,\ \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)_{\underline{\mathbf{v}}}$.

(b) $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1,2)$ och $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2,-1)$.

7. (a) Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$.

$\vec{F} = (-2,\ 1,\ 1)_{\underline{\mathbf{u}}}$.

$\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3,\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)_{\underline{\mathbf{u}}}$.

(b) $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$ och $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$.

8. Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$,

$\vec{F} = (5,\ -1,\ -1,\ -1)_{\underline{\mathbf{u}}}$,

$\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4,\ -x_3 + x_4,\ x_1 - x_2 - x_4,\ -x_1 - x_3 + 2x_4)_{\underline{\mathbf{u}}}$.