UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I
för K1, W1, Kemikand1

Höstterminen 2012

Tentamensförberedande uppgift 2

Obs: I alla uppgifter nedan förutsätter man ett ON-koordinatsystem.

1. En av diagonalerna i en parallellogram har ändpunkterna $Q = (3, -1, 3)$ och $S = (3, 3, -4)$. Det ena av de återstående hörnen är i punkten $P = (1, 1, 2)$.
(a) Finn det återstående hörnet.
(b) Bestäm på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ ekvationen för det plan som innehåller parallellogrammen.
(c) Bestäm arean av parallellogrammen.
(d) Bestäm vinkeln mellan sidorna PQ och PS.

2. Låt l_1 vara linjen $(x, y, z) = (2 + 2t,\ 2 - t,\ 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt l_2 vara skärningslinjen mellan planen $x + 2y - z = 0$ och $2x + y + z = 0$.
(a) Bestäm ekvationen på parameterform för linjen l_2.
(b) Bestäm på formen Ax+By+Cz+D=0 ekvationerna för de två parallella plan som innehåller l_1 respektive l_2.

3. Låt l_1 och l_2 vara de två linjerna i uppgift 2.
(a) Bestäm ekvationen på parameterform för den linje som skär både l_1 och l_2 vinkelrätt.
(b) Bestäm avståndet mellan l_1 och l_2. Finn även de punkter A och B på linjerna l_1 resp. l_2 i vilka detta avstånd antas.

4. Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 1, 3)$ till planet $x - 2y - z = 5$. Finn även den punkten i planet som ligger närmast punkten P.

5. Den räta linjen $l : (x, y, z) = (2 + t,\ 1 + 3t,\ 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, projiceras ortogonalt på planet $x - 2y - z = 5$. Bestäm ekvationen på parameterform för den linje som utgör bilden av l under projektionen.

6. Visa att varje plan i rummet skär minst en av linjerna $l_1 : (x, y, z) = (1+t,\ 2+2t,\ 3+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, $l_2 : (x, y, z) = (-1-s,\ 1+s,\ 2+2s)$, $s \in \mathbb{R}$, och $l_3 : (x, y, z) = (3r,\ 2+2r,\ -1-r)$, $r \in \mathbb{R}$.

7. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ betyder geometriskt vridning med vinkeln $\frac{\pi}{2}$ moturs sett från spetsen av vektorn $(0, 1, 1)$ kring rotationsaxeln $l : (x, y, z) = (0, t, t)$ $t \in \mathbb{R}$. Bestäm standardmatrisen för F.

8. (a) Givna är vektorer $\vec{u}_1 = (2, -1, 3, 1)$, $\vec{u}_2 = (-3, 2, -5, -1)$, $\vec{u}_3 = (-4, 3, -7, -1)$, $\vec{u}_4 = (-5, 3, -8, -2)$ och $\vec{u}_5 = (2, -1, 1, 2)$ i $\mathbb{R}^4$. Vilka villkor måste vektorn $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ uppfylla för att tillhöra det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ och $\vec{u}_5$?

(b) Skriv vektorn $\vec{w} = (1, 2, 1, 2)$ som en linjär kombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ och $\vec{u}_5$.

Facit:

1. (a) $R = (5, 1, -3)$.
(b) $\pi: \ 5x + 7y + 4z - 20 = 0$.
(c) Area $= 6\sqrt{10}$.
(d) $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

2. (a) $l_2: \ (x, y, z) = (-s, s, s), \ s \in \mathbb{R}$.
(b) $\pi_1: \ -2x - 3y + z + 7 = 0$ (planet som innehåller l_1),
$\pi_2: \ -2x - 3y + z = 0$ (planet som innehåller l_2).

3. (a) $k: \ (x, y, z) = (-2 + 2q, \ 2 + 3q, \ 2 - q), \ q \in \mathbb{R}$.
(b) Avståndet $= \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

4. Punkten i planet är $S = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Avståndet $= \frac{8}{\sqrt{6}}$.

5. $l': \ (x, y, z) = (s, \ -5 + s, \ 5 - s), \ s \in \mathbb{R}$.

7.

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. (a) Vektorn $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ måste tillhöra lösningsmängden till den homogena linjära ekvationen

$$3b_1 + b_2 - b_3 - 2b_4 = 0.$$

(b) T.ex. $\vec{w} = 9\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - \vec{u}_5$.
(Jämför med Tentamensförberedande uppgift 1.1.)