

Linjär algebra och geometri 1 för

GylärrMa1, K1, W1, KandKe1

Kurslitteratur

H.Anton, C.Rorres, *Elementary Linear Algebra (with Supplemental Applications)*, 10:e upplagan, Wiley, 2011. Kapitel 1-3 och avs.4.1, 4.3, 4.4, 4.9, 4.10, 5.1.

Kurshemsida: <http://www2.math.uu.se/staff/pages/index.php?uname=ryszard>

Här finner du aktuell information om kursen, exvis utdelade papper i pdf-format.

Undervisning

Undervisning sker i form av föreläsningar (20 st) och lektioner (10 st). Ca. 5 av föreläsningarna kommer att ägnas åt räkneövningar med genomgång av problem och uppgifter.

Preliminär tidsplan

Föreläsning	Avsnitt	
1	1.1–1.2	Linjära ekvationssystem, Gausselimination
2	1.1–1.2	Mer om linjära ekvationssystem
3	1.3	Matriser, matrISRäkning
4	1.4–1.6	Matrisinvers
5	1.1–1.7	Räkneövning
6-7	2.1–2.2	Determinanter: definition, räkneregler
8	2.3	Den adjungerade matrisen, Cramers regel
9	2.1–2.3	Räkneövning.
10	3.1	Vektorer
11	3.2–3.3	Skalärprodukt
12	3.5	Vektorprodukt
13	3.4	Linjer och plan i rummet
14	3.1-3.5	Räkneövning
15	3.1–3.2, 4.1	Det euklidiska rummet \mathbb{R}^n
16	4.3–4.4	Linjärt oberoende av vektorer, baser, koordinater
17	4.9	Linjära avbildningar från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m
18	4.10, 5.1	Linjära avbildningar (forts). Egenvärden och egenvektorer
19		Räkneövning
20		Repetition

Examination

Under kursens gång kommer en dugga att äga rum. Duggan kommer att vara 2 timmar lång

och bestå av fyra uppgifter. Uppgifterna rättas och poängsätts. För att klara duggan krävs det 12 av 20 möjliga poäng.

Sluttentamen består av 8 uppgifter. En student som har klarat duggan får den första uppgiften på tentan godkänd med 5 poäng och får inte lösa denna uppgift på tentan.

På tentan krävs 18 poäng av 40 för betyget 3, 25 poäng för betyget 4, 32 poäng för betyget 5.

Den skriftliga sluttentamen äger rum fredagen den 16/12.

Resultatet från duggan tillgodoräknas enbart vid detta tentamenstillfälle.

Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna lösa linjära ekvationssystem med Gausselimination och kunna redogöra för hur lösningen beror av koefficient- och totalmatrisernas ranger;
- kunna räkna med matriser, beräkna matrisinverser och determinanter;
- kunna redogöra för vektorbegreppet, känna till och kunna använda räknelagarna för vektorer, kunna avgöra om vektorer är linjärt oberoende, känna till begreppen bas och koordinat;
- kunna redogöra för begreppen skalärprodukt och vektorprodukt, samt kunna beräkna sådana produkter och tolka dem geometriskt;
- känna till linjens och planets ekvationer samt kunna använda dessa för att beräkna skärningar och avstånd;
- veta vad som menas med rotationer, speglingar och ortogonala projektioner i planet och i rummen, samt kunna beräkna matriserna för sådana avbildningar;
- kunna tolka en $m \times n$ -matris som en linjär avbildning från \mathbb{R}^n till \mathbb{R}^m ;
- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa matematiska problem.

Tips

- Inför lektionerna, gör så många uppgifter som möjligt (bland de som finns angivna på den utdelade listan) **före** lektionen. På själva lektionen kan du då be om hjälp med sådana uppgifter som du har fastnat på.
- Mattesupporten är schemalagd i sal P2145 måndagar - torsdagar kl.17.00 - 19.00. Där finns amanuenser att fråga om man behöver hjälp.

Uppsala, den 24 oktober 2011.

Ryszard Rubinsztein
Djalal Mirmohades
Jonatan Werpers

Inför lektion nr 1

Till lektion nr 1 bör ni förbereda (dvs lösa) följande uppgifter:

avs.1.1, s.9-10: uppgifterna 1, 3(b),(c),(d), 7(b),(d), 9, 11, 13, 15,

avs.1.2, s.22-25: uppgifterna 2, 3, 4(a),(c), 5-16, 21, 22, 27, 30, 31, 36, 37, 39.

Ytterligare ett par uppgifter:

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -ax + y + 2z = 3 \\ 2x + (a+2)y + z = 2 \\ (1-a)x + y + z = 2 \end{cases}$$

för alla värden på konstanten a .

2. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 1 \\ bx + y + z = 1+b \\ bx + 2by + b^2z = 1+b-b^2 \\ 2bx + (1+2b)y + 2z = b \end{cases}$$

för alla värden på konstanten b .

Facit:

- $a \neq \pm 1$: $(x, y, z) = (\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}, \frac{2-a}{1-a})$,
 $a = -1$: $(x, y, z) = (t, 1-3t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$,
 $a = 1$: inga lösningar.
- $b \neq -1$: inga lösningar,
 $b = -1$: $(x, y, z) = (\frac{1}{3} + t, \frac{1}{3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Inför lektion nr 2

Till lektion nr 2 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.1.3, s.35-38: 1(a)-(f), 4(f),(g), 5(a),(b),(d),(e), 11(b), 14(a), 27,

avs.1.4, s.49-51: 6, 16, 17, 18(f), 28, 30, 34, 51,

avs.1.5, s.58-60: 15, 19, 24, 27, 28.

Ytterligare en uppgift:

1. För vilka värden på den reella konstanten a är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm A^{-1} för dessa värden på a .

Facit: A inverterbar $\Leftrightarrow a \neq 0, \pm 1$. Om $a \neq 0, \pm 1$ är

$$A^{-1} = \frac{1}{a(1-a^2)} \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ a & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Inför lektion nr 3

Till lektion nr 3 bör ni förbereda följande uppgifter:

- avs.1.6, s.65-66: 8, 12, 15, 18, 19, 23,
avs.1.7, s.71-73: 33.
avs.2.2, s.105-106: 10, 12, 14, 16, 17, 20-30, 34.
avs.2.3, s.115-116: 10, 11, 12, 15, 17.

Inför lektion nr 4

Till lektion nr 4 bör ni förbereda följande uppgifter:

- avs.2.3, s.115-116: 20, 21, 27, 29, 30, 36,
avs.2.1, s.98-100: 4(a),(d), 11, 16, 22, 25,
avs.2.2, s.105-106: 19.

Ytterligare några uppgifter:

1. Beräkna följande determinant D av ordning $n \geq 2$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ b & b & b & \dots & b & x \end{vmatrix}.$$

Lös även ekvationen $D = 0$ i de fall då $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Beräkna följande determinant D av ordning $n + 1$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

är en determinant av ordning n . Visa att det finns ett enkelt samband mellan D_n , D_{n-1} och D_{n-2} och använd detta för att beräkna D_n .

Facit:

1. $D = x^{n-2}(x^2 - ab)$, $D = 0$ har rötterna $\pm\sqrt{ab}$ och 0 (om $n \geq 3$).
2. $D_{n+1} = (1 - a)^n$.
3. Sambandet $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Determinanten $D_n = n + 1$.

Inför lektion nr 5

Till lektion nr 5 bör ni förbereda följande uppgifter:

- avs.3.1, s.128-130: 1(a),(e), 3, 4(d), 7, 14(a),(b), 22, 28, 31, 33, 34,
avs.3.2, s.141-143: 1(a),(b), 3(a)-(c), 9(a), 11(a), 13(a), 15, 16, 22, 33,
avs.3.3, s.150-152: 1(b),(c), 3(c), 5, 6, 7, 21, 25, 41, 43, 44.

Inför lektion nr 6

Till lektion nr 6 bör ni förbereda följande uppgifter:

- avs.3.5, s.168-169: 1, 3, 7, 13, 15, 17, 19, 20, 23, 27-29, 31(a), 36,
avs.3.3, s.150-152: 9, 13-15, 17, 29, 33, 37,
avs.3.4, s.159-160: 4, 6, 9, 13, 16, 21, 23, 25, 27.

Inför lektion nr 7

Till lektion nr 7 bör ni förbereda följande uppgifter:

- avs.3.1, s.128-130: 19(a),(b), 21, 23, 24, 29, 30,
avs.3.2, s.141-143: 2(c), 8, 10, 12(c), 14(c), 17, 25(c),
avs.4.2, s.188-190: 7, 8, 11, 12, 20,
avs.4.3, s.199-200: 1(a),(b),(c), 3, 5, 19.

Inför lektion nr 8

Till lektion nr 8 bör ni förbereda följande uppgifter:

avs.4.4, s.207-208: 3, 5, 9, 12, 16,

avs.4.9, s.260-263: 2, 7, 11, 13(b), 18(a),(b), 19(b),

avs.4.10, s.271-273: 4, 5, 7, 9, 11, 14(a),(b), 15, 16(b), 17(b).

Inför lektion nr 9

Till lektion nr 9 bör ni förbereda uppgifterna:

avs.4.10, s.271-273: 22(b),(c), 23, 24, 25, 27,

avs.5.1, s.303-304: 1, 6(a),(d),(e), 7(a),(d),(e), 8(a),(d),(e), 9(b), 10(b), 11(b), 12(b),(c), 13.

Ytterligare en uppgift:

1. Finn alla egenvärden och alla egenvektorer till matrisen

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Facit:

1. (a) Egenvärden: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 4$. Egenvektorer: $\vec{u} = t(-5, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, (med $\lambda = -1$), $\vec{v} = s(1, 0, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, (med $\lambda = 1$) och $\vec{w} = q(-5, 3, 1)$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, (med $\lambda = 4$).

(b) Egenvärden: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 3$. Egenvektorer: $\vec{u} = t(-1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, (med $\lambda = 1$) och $\vec{v} = s(-1, -1, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, (med $\lambda = 3$).

(c) Egenvärden: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 3$. Egenvektorer: $\vec{u} = (s, 0, t) = s(1, 0, 0) + t(0, 0, 1)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $(s, t) \neq (0, 0)$ (med $\lambda = 1$) och $\vec{v} = q(-1, -1, 1)$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, (med $\lambda = 3$).

Inför lektion nr 10

Till lektion nr 10 bör ni förbereda dessa uppgifter från denna lista som ni inte hann med tidigare. Större delen av lektionen kommer att ägnas åt repetition.

Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$, $\vec{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$ vara vektorer i \mathbb{R}^4 .

(a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna $\vec{v} = (1, 3, -1, 4)$ och $\vec{w} = (2, -1, 1, 2)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Om vektorn \vec{v} resp. \vec{w} tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

2. För vilka värden av konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\vec{v} = (1, a, 4, 1 - a)$ det linjära höljet av vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$ och $\vec{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$ i \mathbb{R}^4 ?

3. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -2, 0)$ i \mathbb{R}^3 är linjärt beroende eller oberoende. I fall de inte är det, finn bland $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

4. Visa att vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$ är linjärt beroende. Uttryck en av dem som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av **linjärt oberoende** vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

5. Låt $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$ vara två vektorer i \mathbb{R}^3 . Finn en ekvation som komponenterna x_1, x_2, x_3 måste uppfylla för att vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ skall tillhöra det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Tolka resultatet geometriskt. För vektorer \vec{v} som uppfyller ekvationen finn en framställning av \vec{v} som en linjärkombination av \vec{u}_1 och \vec{u}_2 .

6. (a) Avgör om vektorerna $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, -1)$ utgör en bas i \mathbb{R}^2 . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas \underline{v} för vektorn $\vec{F} = (1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2)$.

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1)$ i komponenter parallella med vektorerna \vec{v}_1 och \vec{v}_2 (dvs. finn \vec{F}_1, \vec{F}_2 sådana att $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ med $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$ och $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$).

7. (a) Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ utgör en bas i \mathbb{R}^3 . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas \underline{u} för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$.

(b) Vektorerna $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$ spänner upp ett plan π genom origo i \mathbb{R}^3 . Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn $\vec{F} = (1, 1, 1)$ som summa av två komponenter \vec{F}_1 och \vec{F}_2 , $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, där komponenten \vec{F}_1 är parallell med vektorn $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ och komponenten \vec{F}_2 är parallell med planet π .

8. Avgör om vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$, $\vec{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$ utgör en bas i \mathbb{R}^4 . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas \underline{u} för vektorn $\vec{F} = (1, 1, 2, 1)$ och för vektorn $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Facit:

1. (a) Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ är linjärt beroende.
 (b) $\vec{v} \in \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$, (t.ex.)
 $\vec{w} \notin \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$.
2. $a = 2$.
3. Vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ är linjärt beroende. Vidare är t.ex. $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ och \vec{u}_1, \vec{u}_2 är linjärt oberoende.
4. T.ex. $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.
5. Ekvationen är $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Geometrisk tolkning: vektorerna \vec{u}_1, \vec{u}_2 spänner upp ett plan π genom origo i \mathbb{R}^3 . Planet π har ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Vektorn $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ tillhör det linjära höljet $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ om \vec{v} ligger (= är parallell) i detta plan.
 Om $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$ med $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ blir $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ med $c_1 = \frac{1}{2}x_2$, $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$.
6. (a) Ja, $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ utgör en bas i \mathbb{R}^2 .
 $\vec{F} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})_{\underline{\mathbf{v}}}$.
 $\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)_{\underline{\mathbf{v}}}$.
 (b) $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1, 2)$ och $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2, -1)$.
7. (a) Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ utgör en bas i \mathbb{R}^3 .
 $\vec{F} = (-2, 1, 1)_{\underline{\mathbf{u}}}$.
 $\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)_{\underline{\mathbf{u}}}$.
 (b) $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$ och $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$.
8. Ja, $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ utgör en bas i \mathbb{R}^4 ,
 $\vec{F} = (5, -1, -1, -1)_{\underline{\mathbf{u}}}$,
 $\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4, -x_3 + x_4, x_1 - x_2 - x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)_{\underline{\mathbf{u}}}$.