UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

Höstterminen 2006

Linjär algebra för

F1, Q1, W1

Kurslitteratur

Eriksson–Lind–Persson–Tengstrand, Algebra för universitet och högskolor, Band II (Linjär Algebra), Linköping 1994. Följande avsnitt läses: 8.1-8.5, 8.7-8.8, 9.1-9.4, 10.1-10.6, 11.1-11.5, 12.1-12.5, 13.1-13.5.
Drangert–Eriksson–Gustavsson, övningsbok, del 2 (Linjär algebra), till ovanstående lärobok.

Som kompletterande läsning kan man använda boken **K.G.Andersson**, Linjär algebra, Studentlitteratur, Lund 2000 (men denna bok är kompakt skriven).

Undervisning skär i form av föreläsningar (26 st) och lektioner (8 st). Ca. 6 av föreläsningarna kommer att ägnas åt räkneövningar med genomgång av problem och uppgifter.

Preliminär tidsplan

Föreläsning	Avsnitt	
1–2	8.1–8.5	Linjära ekvationssystem, matriser, matrisräkning
3	8.7–8.8	Matrisinvers
4		Räkneövning.
5	9.1–9.2	Determinanter av ordning 2 och 3
6	9.3–9.4	Determinanter av godtycklig ordning, Cramers regel
7		Räkneövning.
8–9	10.1–10.3	Linjära rum, underrum, linjärt hölje, linjärt beroende
10	10.4–10.5	Bas, basbyte
11		Räkneövning.
12–13	11.1–11.3	Linjära avbildningar. Matris för linjär avbildning. Basbyte.
14	11.4–11.5	Sammansatta avbildningar, invers avbildning. Värderum och nollrum.
15		Räkneövning.
16–17	12.1–12.3	Euklidiska rum och skalärprodukt. Ortogonalitet och ON-baser.
18–19	12.4–12.5	Euklidiska rum med ON-bas. Isometriska avbildningar.
20		Räkneövning.
21	13.1–13.2	Spektralteori, egenvärden och egenvektorer, sekularpolynomet, diagonaliserbarhet.
22	13.3	Diagonalisering i ON-bas, symmetriska avbildningar, spektralsatsen.
23		Räkneövning.
24–25	13.4–13.5	Kvadratiska former, diagonalisering av kvadratiska former i ON-bas och godtycklig bas, tröghetslagen.
26		Repetition och räkneövning.

V.g.v!

Inlämningsuppgifter

Under kursens gång kommer två uppsättningar av inlämningsuppgifter att delas ut. Om 40% resp. 60% av inlämningsuppgifterna är korrekt lösta får man 1 resp. 2 bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen den 21/12.

Examination

Under kursens gång kommer en dugga att äga rum. Duggan kommer att vara 2 timmar lång och bestå av två delar à två uppgifter. Uppgifterna rättas och poängsätts. För att klara varje del av duggan krävs det 7 av 10 möjliga poäng per del.

Sluttentamen består av 8 uppgifter. Uppgifterna 1 och 2 motsvarar den första resp. den andra delen av duggan. Student Y som har klarat del x av duggan får uppgift x på tentan godkänd med 5 poäng och får inte lösa denna uppgift på tentan.

På tentan krävs 18 poäng av 40 för betyget 3, 25 poäng för betyget 4 , 32 poäng för betyget 5.

Den skriftliga sluttentamen äger rum torsdagen den 21/12.

Resultatet från duggan samt bonuspoängen från inlämningsuppgifterna tillgodoräknas enbart vid detta tentamenstillfälle.

Uppsala, den 24 oktober 2005.

Ryszard Rubinsztein
Isac Hedén
Stefan Hellander
Anders Pelander

Inför lektion nr 1

Kapitel 8 i kursboken handlar om matrisräkning, linjära ekvationssystem och matrisinvers. En stor del av detta material blir en repetition för er.

I kursboken bör ni läsa avsnitten 8.1-8.5 och 8.7-8.8. I avsnitt 8.3 införs operationer på matriser: addition och multiplikation av matriser. Lägg speciellt märke till att den kommutativa lagen för matrismultiplikation **inte** gäller. Läs Anmärkning på sidan 185. Däremot gäller den associativa lagen – se del C av Sats 1 på sidan 183.

Lägg också märke till del 3 av Sats 2 på sidan 189 (transponering av matrisprodukt).

Materialet i avsnitt 8.4 (Linjära Ekvationssystem) bör ni känna väl från kursen Grundläggande Algebra. Avsnitt 8.5 systematiserar detta material och samlar det i Sats 5 (Huvudsats för linjära ekvationssystem). Lägg märke till begreppet "matrisens rang" (sidan 214).

I avsnitt 8.7 införs begreppet "matrisinvers" (sidan 226). Studera villkoren för existens av matrisinvers (Sats 6, sidan 229).

Övningsuppgifter

De allra flesta övningarna i kursboken samt A-uppgifterna i Övningsboken utgör ett lämpligt övningsmaterial. Observera att alla A-uppgifter är försedda med fullständiga lösningar (sidorna 152-243, Övningsboken). Övningarna i kursboken är ofta relativt enkla.

Till lektion nr 1 bör ni förbereda (dvs lösa) följande **C-uppgifter från Övningsboken: 805, 806, 808, 811, 818, 825, 826, 830, 832, 833, 834, 835(b), 836, 841.**

Ytterligare några uppgifter:

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Bestäm invers till:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Lös matrisekvationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Bestäm rangen hos matrisen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Beräkna:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Facit:

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3 + 3a + b, a, b, 4 - 5a)$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 13 & -8 & -11 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Rangen är 3.
5. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Inför lektion nr 2

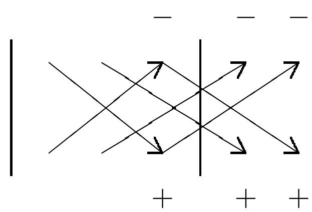
Kapitel 9 i kursboken handlar om determinanter. Ni bör läsa det i sin helhet.

Determinanter av ordning 2 och 3 infördes i kursen Algebra MN1, i ett geometriskt sammanhang, för att beskriva areor av parallellogramer i planet och volymer av parallepipeder i rymden. Deras egenskaper analyseras i avsnitt 9.2 i satsena 1-4.

I avsnitt 9.3 definieras determinanter av kvadratiska matriser av godtycklig ordning. Man kan betrakta dem som generalisering av lådans volym till högre dimensioner. Definitionen lämpar sig inte till en praktisk beräkning av determinanter av ordning högre än 3 (t.ex. en determinant av ordning 4 definieras som summa av $4! = 24$ termer, vid ordning 5 har man $5! = 120$ termer osv), men från denna definition härleder man räknelagar för determinanter som är precis samma som för determinanter av ordning 2 och 3 och som reducerar arbetet med beräkning av determinanter till helt rimliga proportioner.

Varning: observera att den så kallade "Sarrus regel" dvs

$\det(A) =$



inte gäller för determinanter av ordning skild från 3.

Lägg märke till sats 5 på sidan 255 (utveckling efter rad och kolonn) som visar hur determinanter av högre ordning kan uttryckas med hjälp av determinanter av lägre ordning.

Slutligen lägg märke till Cramers regel dvs en formel för en unik lösning till ett linjärt ekvationssystem (sats 7, sida 262) och en formel för matrisinvers (sats 8, samma sida), båda uttryckta med hjälp av determinanter.

Övningsuppgifter

Till lektion nr 2 bör ni förbereda följande **C-uppgifter från Övningsboken: 902, 903, 904, 906, 907 (c), 908 (a), 913 (a),(b),(e), 914, 915 (a),(b), 917, 919 (b), 921, 922, 931.**

Ytterligare några uppgifter:

1. Beräkna följande determinant D av ordning $n \geq 2$:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ b & b & b & \dots & b & x \end{vmatrix}.$$

Lös även ekvationen $D = 0$ i de fall då $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Beräkna följande determinant D av ordning $n + 1$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

är en determinant av ordning n. Visa att det finns ett enkelt samband mellan D_n, D_{n-1} och D_{n-2} och använd detta för att beräkna D_n.

Facit:

1. $D = x^{n-2}(x^2 - ab)$, $D = 0$ har rötterna $\pm\sqrt{ab}$ och 0 (om $n \geq 3$).

2. $D_{n+1} = (1 - a)^n$.

3. Sambandet $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Determinanten $D_n = n + 1$.

Inför lektion nr 3

I Kapitel 10 införs ett nytt grundläggande begrepp: **linjärt rum**. Studera noggrant definitionen på sidan 264 och exemplen 1-4 på sidan 265-266. Vidare exempel av linjära rum finner ni på sidorna 268-271 i samband med definitionen av **delrum** (= underrum).

I avsnitt 10.3 införs begreppen **linjärt hölje** samt **linjärt oberoende** av en uppsättning av vektorer. Studera noggrant exempel 22, sid 278-279.

I avsnitt 10.4 införs det grundläggande begreppet **bas** i ett linjärt rum. Studera noggrant den viktiga sats 6 (Huvudsatsen för baser i ändligt genererade rum). Därefter inför man begreppet **dimension** av ett linjärt rum (sida 286). Läs exemplen 24 och 26.

Avsnittet "Dimension och rang" (sidorna 288-294) beskriver en enkel, praktisk metod för att finna en bas och bestämma dimension av ett linjärt hölje av vektorer i $\mathbb{R}^n$. (Metoden fungerar också mer generellt.) Studera noggrant exemplen 27, 28 och 29.

I ett linjärt rum finns det många olika baser. Ofta, för att lösa en uppgift, måste man byta från en bas till en annan. Hur detta går till beskrivs i avsnitt 10.5. Lägg märke till hur transformationsmatrisen för ett basbyte definieras (sida 296) och hur vektorers koordinater förändras (sats 9, sida 297).

Övningsuppgifter

Till lektion nr 3 bör ni förbereda följande **C-uppgifter i Övningsboken: 1001, 1002, 1004, 1007, 1012, 1013, 1015, 1016, 1020, 1021, 1023-1028, 1032, 1034 - 1036** .

Ytterligare några uppgifter:

1. N är det delrum till $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, 1, 1)$ och $u_3 = (1, -1, 2, 1)$, d.v.s. $N = [u_1, u_2, u_3]$.

(a) Avgör om vektorerna $v = (0, -2, 2, -11)$ och $w = (2, 1, 2, 1)$ tillhör N.

(b) För vilka värden av den reella konstanten a tillhör vektorn $u = (2 - a, 1 - 2a, 2, 1)$ det linjära höljet N?

(c) Beskriv det linjära höljet N som en lösningsmängd till ett homogent linjärt ekvationssystem i 4 obekanta.

(**Obs:** om ni föredrar det, kan ni först lösa del (c) och därefter delarna (a) och (b) av uppgiften.)

2. För vilka värden på den reella konstanten b är vektorerna $v_1 = (1, 0, 1, -1)$ $v_2 = (2, 1, 1, 1)$ och $v_3 = (1, 2 + b, -1 - b, 2)$ i $\mathbb{R}^4$ linjärt oberoende ?

3. M är ett delrum till $\mathbb{R}^4$,

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \text{ och } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Finn en bas i M.

4. L är ett linjärt rum, u, v, w är tre linjärt oberoende vektorer i L. Låt a vara en reell konstant. M är det delrum till L som spänns upp av vektorerna $g_1 = u + (a + 1)v + w$ $g_2 = u + (3 - a)v + aw$ och $g_3 = au + 2v + (2 - a)w$, $M = [g_1, g_2, g_3]$. Bestäm $\dim M$ för varje värde av den reella konstanten a.

5. Bestäm en bas i det linjära höljet $M = [v_1 = (1, 1, 2, -1),\ v_2 = (-1, -1, -2, 1),\ v_3 = (2, 1, 0, 1),\ v_4 = (3, 2, 2, 0),\ v_5 = (1, 0, -2, 2),\ v_6 = (0, 1, 4, -3)]$ och ange koordinaterna av dem givna vektorerna i denna bas.

Facit:

1. (a) $v \in N, w \notin N$, (b) $a = 1$, (c) $N = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 - y_2 - y_3 = 0\}$

2. $b \neq -1$.

3. $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (-2, -3, 0, 1)$ (t.ex.)

4. $\dim M = 3$ om $a \neq -6, 1$, $\dim M = 2$ om $a = -6$ och $\dim M = 1$ om $a = 1$.

5. T.ex. $\{v_1, v_3\}$ är en bas i M och $v_2 = -v_1$; $v_4 = v_1 + v_3$; $v_5 = v_3 - v_1$; $v_6 = 2v_1 - v_3$.

Inför lektion nr 4

I kapitel 11 införs ett nytt grundläggande begrepp: **linjär avbildning**. Studera noggrant definitionen på sidan 302 och exemplen 1-4 på sidorna 302-305.

Inför lektion 4 skall ni studera materialet som beskrivs i avsnitten 11.1-11.4. Av särskild betydelse här är satserna 3 och 4 (sida 308 resp. 311) som beskriver linjära avbildningar med hjälp av matriser. Lägg märke till att enligt sats 3 ger avbildningens matris samband mellan koordinater för en vektor och koordinater för dess bild. Studera noggrant exemplen 7-9 (sida 309-310).

Matrisen för en linjär avbildning $F : L \longrightarrow M$ beror på val av baser i L och i M. Vad som händer med matrisen om man byter baserna beskrivs (delvis) i sats 5 (som betraktar enbart fallet då $L = M$). Studera exempel 10 (s.314).

Lägg märke till Anmärkningen på sidan 315.

Avsnitt 11.4 handlar om **sammansättning** av linjära avbildningar och om **inverser** till linjära avbildningar. Detta är viktigt eftersom det ofta händer att en linjär avbildning framställs som en sammansättning av flera enklare avbildningar. Det gäller då att kunna beskriva sammansättningen utifrån det man vet om dessa enklare avbildningar. Studera exemplen 11 och 12.

Övningsuppgifter

Till lektion nr 4 bör ni förbereda (dvs lösa) följande **C-uppgifter i Övningsboken: 1101-1103, 1107, 1109-1112, 1114 - 1116, 1118, 1121, 1123, 1126.**

Inför lektion nr 5

Inför lektion 5 bör ni studera materialet som beskrivs dels i avsnitt 11.5 och dels i avsnitten 12.1-12.3 i kapitel 12.

I avsnitt 11.5 definieras **nollrum** och **värderum** till en linjär avbildning. Det centrala resultatet här är **Dimensionssatsen** (sats 10). Viktiga är även Dimensionssatsens följder (Följdsatser 1 och 2, s.324-325)

Övningarna 11.12, 11.13 och 11.15 i kursboken rekommenderas.

I kapitel 12 inför man en ny struktur i allmänna linjära rum: **skalärprodukt**. Observera: linjära rum i sig har inga skalärprodukter. De kan utrustas med en skalärprodukt – **på många olika sätt**.

Skalärprodukt definieras i avsnitt 12.2. Studera noggrant definitionen på sidan 330 och efterföljande anmärkningar. Studera exemplen 1-4. Lägg märke till att i exempel 4 beskriver man en skalärprodukt i ett ∞-dimensionellt rum. Möjligheten att göra detta visar sig vara av särskild vikt eftersom man inte kan arbeta i sådana rum med koordinater på det vanliga sättet.

Linjära rum utrustade med en skalärprodukt kallas för **euklidiska rum**. I sådana rum inför man begreppet **längd av en vektor** (s.335). De viktigaste resultaten här är Cauchy-Schwarz´ olikhet och Triangelolikheten (satserna 1 och 2). Studera exemplen 5 och 6.

I avsnitt 12.3 definierar man begreppen **ortogonala vektorer** och **en ortonormerad bas**. Det grundläggande resultatet här säger att i varje ändligtdimensionellt euklidiskt rum finns det någon ON-bas (sats 4). Lägg märke till att beviset för denna sats också ger en praktisk metod för att konstruera ON-baser (Gram-Schmids ortogonaliseringsmetod). Studera noggrant exemplen 9 och 10.

Övningsuppgifter

Till lektion nr 5 bör ni lösa **C-uppgifter: 1127, 1129, 1133, 1137, 1141, 1142, 1201, 1202, 1206, 1207, 1209, 1214, 1215, 1219**.

Ytterligare några uppgifter:

1. Använd Gram-Schmids metod för att ortogonalisera: $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(-1, 2, 1)$ i $\mathbb{E}^3$.

2. Bestäm en ON-bas i $M = [(2, 1, 1, 1),\ (2, 2, 0, 3),\ (0, 1, -1, 2),\ (1, 0, 0, 1)]$ som ett delrum i $\mathbb{E}^4$.

Facit:

1. $(1, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(-\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$.

2. T. ex. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$, $\frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$, $\frac{1}{6}(1, 5, 3, -1)$.

Inför lektion nr 6

Inför lektion 6 bör ni studera dels avsnitten 12.4 och 12.5 i kursboken och dels materialet som handlar om **ortogonala komplement** och **ortogonala projektioner.** Detta material finns inte i kursboken, det tas upp i sin helhet på föreläsningarna.

Avsnitt 12.4 handlar om egenskaper hos ortonormerade baser. Med hjälp av koordinater i en ON-bas beskrivs skalärprodukten på ett särskilt enkelt sätt (detta resultat finner ni i sats 5 på sidan 347). Också tvärtom: koordinater i en ON-bas har en enkel tolkning med hjälp av skalärprodukten (se sats 6).

På sidan 351 införs begreppet **ortogonal matris**. Det är just sådana matriser som förmedlar basbyte mellan två ON-baser.

I avsnitt 12.5 inför man begreppet **isometriska avbildningar**. Det är avbildningar som behåller längderna av vektorer (och, som det visar sig, också vinklarna mellan dem). Dessa avbildningar representeras i ON-baser just av ortogonala matriser (sats 8). Läs exempel 12.

Lägg märke till övning 12.15 i kursboken. Den beskriver **alla** isometriska avbildningar från det euklidiska planet $\mathbb{E}^2$ till $\mathbb{E}^2$.

Övningsuppgifter

Till lektion nr 6 bör ni lösa **C-uppgifter: 1203, 1223, 1225, 1226, 1228, 1229, 1231, 1232, 1234-1237, 1245, 1246**

Ytterligare några uppgifter:

1. M är ett delrum till $\mathbb{E}^4$ som definieras genom

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_4 = 0 \text{ och } x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

(a) Finn en ON-bas i M.
(b) Finn en ON-bas i det ortogonala komplementet $M^\perp$.
(c) Skriv vektorn $u = (1, 1, 2, 0) \in \mathbb{E}^4$ som en summa $u = u_1 + u_2$ med $u_1 \in M$ och $u_2 \in M^\perp$.

(d) $P : \mathbb{E}^4 \longrightarrow \mathbb{E}^4$ är den **ortogonala** projektionen av $\mathbb{E}^4$ på M. Finn P:s matris i standardbasen i $\mathbb{E}^4$.
Obs: Kunde du först lösa del (d) och därefter, med hjälp av denna lösning, del (c) av uppgiften?

2. Bestäm den ortogonala projektionen av $u = (1, 1, 2)$ på linjära höljet $M = [(2, -1, 0), (1, -1, 2), (1, 0, -2)]$ och använd den för att finna avståndet från u till M.

Facit:

1.(a). $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, -2, 1)$. (t.ex.)

1.(b). $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)$. (t.ex.)

1.(c). $u = u_1 + u_2$ med $u_1 = (1, 0, 1, -1) \in M$ och $u_2 = (0, 1, 1, 1) \in M^\perp$.

1.(d). $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Projektionen är $\frac{1}{21}(5, -11, 34)$ och avståndet är $8/\sqrt{21}$.

Inför lektion nr 7

I kapitel 13 inför man nya begrepp: **egenvärden** och **egenvektorer** till en linjär operator. Studera noggrant definitionen på sidan 359 och exemplen 1 och 2 på sidan 359-360.

Materialet som ni skall studera inför lektion 7 beskrivs i avsnitten 13.1-13.3. Lägg märke till sats 1 (sida 361) som ger ett enkelt sätt att finna alla egenvärden till en linjär operator på ett ändligtdimensionellt linjärt rum. För detta ändamål inför man s.k. **sekularpolynom** till en linjär operator (se definitionen på sidan 362). Nollställen till detta polynom är egenvärden till operatorn. Studera noggrant exemplen 5 och 6 på sidan 363-364.

Lägg märke till sats 2 (sida 365) som säger att egenvektorer med olika egenvärden är linjärt oberoende.

Lägg också märke till begreppet **diagonaliserbar linjär avbildning** (sida 365).

I avsnitt 13.3 inför man ett nytt begrepp: **symmetriska avbildningar**. Det är en mycket viktig klass av linjära avbildningar, både i geometriska sammanhang (vi kommer i ett senare avsnitt att analysera geometriska egenskaper av ytor med hjälp av symmetriska avbildningar), i analytiska sammanhang och, inte minst, inom fysik (klassisk mekanik, kvantmekanik m.m.). Studera noggrant definitionen på sidan 369 med tillhörande sats 3 som säger att symmetriska avbildningar är de som i ortonormerade baser representeras av symmetriska matriser. Läs exempel 8.

Som ni kommer ihåg är inte alla linjära operatörer diagonaliserbara. Med symmetriska avbildningar förhåller det sig däremot annorlunda.

Det centrala resultatet för symmetriska avbildningar ges av **Spektralsatsen** (sats 4, sida 371) som säger att **varje symmetrisk avbildning** på ett ändligtdimensionellt euklidiskt rum **är diagonaliserbar**.

Läs exemplen 9 och 10 och läg märke till sats 5.

Övningarna 13.6 och 13.7 i kursboken rekommenderas.

Övningsuppgifter

Till lektion nr 7 bör ni förbereda (dvs lösa) följande **C-uppgifter i Övningsboken: 1301, 1303, 1305, 1306, 1308, 1309, 1314, 1318 (a), 1319 (antag här att** $\dim L < \infty$**), 1322, 1323, 1324, 1327, 1331 - 1336, 1338** .

Ytterligare några uppgifter:

1. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ har i standardbasen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & a-3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

där a är en reell konstant. För vilka värden på konstanten a är avbildningen F diagonaliserbar? För varje sådan a bestäm en bas i $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till F.

2. Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Facit:

1. F är diagonaliserbar omm $a = 1$. Om $a = 1$: en bas av egenvektorer till F : $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (2, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1)$. (t.ex.)

2. Egenvärden: 0, 4. Egenvektorer för 0: $(1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$, $(o, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1)$; egenvektorer för 4: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$.

Inför lektion nr 8

Inför lektion 8 skall ni studera materialet som beskrivs i avsnitten 13.4 och 13.5. I avsnitt 13.4 inför man och studerar ett nytt begrepp: **kvadratisk form**. Lägg märke till att ni redan har sett och arbetat med kvadratiska former i ett analytiskt sammanhang: andragradsdelen av Taylorpolynomet av en funktion av flera variabler är en kvadratisk form. Kvadratiska former beskrivs med hjälp av symmetriska matriser (sats 6) eller med hjälp av symmetriska avbildningar (sats 7). Båda sätten är två formuleringar av en och samma observation. Läs exemplen 11 och 12.

Kvadratiska former kan **diagonaliseras** i ortonormerade baser (sats 8). Detta leder till mycket enkla uttryck för kvadratiska former med hjälp av koordinater i en sådan bas och underlättar på ett väsentligt sätt analys av den kvadratiska formens geometriska egenskaper (som ni kommer att studera i nästa avsnitt). Läs exemplen 13 och 14.

Kvadratiska former kan även diagonaliseras i baser som inte nödvändigtvis är ortonormerade (sats 9). Detta leder till ännu enklare uttryck för formen (men en del geometrisk information går förlorad). Lägg märke till den viktiga Tröghetslagen (sats 10).

Den kvadratiska formens typ kan bestämmas med hjälp av egenvärden av den tillhörande symmetriska matrisen eller med hjälp av kvadratkomplettering. Studera noggrant exemplen 15, 16 och 17.

Avsnitt 13.5 handlar om andragradskurvor i $\mathbb{E}^2$ och andragradsytor i $\mathbb{E}^3$. Dessa beskrivs med hjälp av kvadratiska former (en andragradsyta i $\mathbb{E}^3$ är lösningsmängden till ekvationen $h(u) = 1$, där h är en kvadratisk form på $\mathbb{E}^3$). Vårt tidigare arbete med diagonalisering av kvadratiska former och symmetriska avbildningar kommer nu att användas till analys av geometriska egenskaper av kurvor och ytor.

Övningsuppgifter

Till lektion nr 8 bör ni förbereda följande **C-uppgifter i Övningsboken: 1340, 1342-1344, 1346-1350, 1353, 1354, 1356.**

Ytterligare några uppgifter:

1. Visa att

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz = 4$$

är ekvationen för en rotationsyta i $\mathbb{E}^3$l. Bestäm ytans typ, rotationsaxelns riktning samt det minsta avståndet från ytan till origo. Rita figur!

2. Bestäm, för varje värde på $a \in \mathbb{R}$, vilken typ av yta i $\mathbb{E}^3$ som ges av ekvationen

$$(5-3a)x^2 + (5-a)y^2 + z^2 + 4axy + 2xz + 4yz = a.$$

Facit:

1. En enmantlad (rotations-)hyperboloid. Avståndet till origo $= \sqrt{2}$. Rotationsaxelns riktningsvektor: $u = (1, 1.2)$.

2. $a < 0$: en tvåmantlad hyperboloid; $a = 0$: en linje; $0 < a < 1$: en ellipsoid; $a = 1$: en elliptisk cylinder; $1 < a$: en enmantlad hyperboloid.