Innehåll

Abstract

This is a thesis in applied mathematics devoted to cosmology. I start by deriving the Robertson-Walker metric for a homogeneous isotropic universe and give some useful applications of this metric.

As a first step in developing models of such a homogeneous isotropic universe I introduce the Friedmann equations. These equations are valid in a Robertson-Walker spacetime with zero cosmological constant in which energy is a conserved quantity. For simplicity I only consider the zero pressure case. This corresponds to a matter dominated universe in which random motions are neglected.

I introduce some fundamental cosmological parameters and show how a non-zero cosmological constant modifies the relations between some of these.

Finally I introduce the Friedmann-Lemaitre equations, of which the Friedmann equations are a special case with zero cosmological constant. I develop possible zero pressure models by solving these equations and by this I illustrate how the cosmological constant modifies the homogeneous isotropic universe as compared to the pure Friedmann case.

Inledning

Detta är ett examensarbete i tillämpad matematik som huvudsakligen behandlar kosmologiska modeller.

Jag behandlar här enbart homogena isotropa modeller och härleder en metrik, Robertson-Walker-metriken, som är tillämpbar på sådana universa. Jag tar även upp några viktiga tillämpningar på denna metrik.

Därefter introducerar jag några fundamentala kosmologiska parametrar och studerar hur införandet av den kosmologiska konstanten modifierar relationerna mellan dessa.

Kravet på homogenitet och isotropi tillsammans med kravet på energibevaring i universum leder till Friedmanns ekvationer. Dessa utgör ett specialfall av de mer allmänna Friedmann-Lemaitre-ekvationerna som är centrala i detta arbete.

Vid lösandet av dessa ekvationer utgår jag ifrån att trycket kan sättas till noll. Detta svarar mot att universum är materiedominerat och att denna materias slumpmässiga rörelser kan försummas. Sådana modeller kallas för nolltrycksmodeller.

Genom olika villkor på de i ekvationerna ingående parametrarana undersöker jag homogena isotropa nolltrycksmodeller för universum samt dessas utveckling i tiden.

Jag vill tacka min handledare, Nils Dencker, för stöd, uppmuntran, synpunkter och kritik på arbetets uppläggning och innehåll. Jag vill även tacka Isaiah Kantor för värdefulla synpunkter.

Symbollista

R, S: den kosmologiska skalfaktorn som anger universums expansion i tiden
σ: den dimensionslösa koordinaten som rör sig 'med expansionen'
ds: rumtidsavståndet
Λ: den kosmologiska konstanten
H: Hubbleparametern
q: decelerationsparametern
z: den kosmologiska rödförskjutningen (våglängduttöjningen) orsakad av den universella expansionen
K: rumtidkrökningen
k: krökningsindex - anger krökningens karaktär
λ: våglängd
ρ: materie-och/eller strålningstäthet
p: sammanlagt materie-och strålningstryck
Ω: densitetsparametern
G: den universella gravitationskonstanten
c: ljushastigheten
F: kraft
E: energi

1 ROBERTSON-WALKER-METRIKEN

Rumtidsintervallet ds mellan två händelser i $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ beräknas enligt

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$$

där c betecknar ljushastigheten, dt tidsintervallet mellan händelserna och dl den rumsliga separationen mellan händelserna. Denna formel kallas **separationsformeln**.

Med plan geometri i $\mathbf{R}^3$ ges rumsdelen av $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ varför rumtidsintervallet för denna sk plana Minkowski-metrik ges av

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Ett universum som är **homogent** och **isotropt** vad gäller materiedistributionen säges satisfiera **den kosmologiska principen**. Isotropi kring varje punkt innebär global homogenitet, och en homogen materiedistribution leder till ett rum med konstant krökning då det ju är materian (och en eventuell kosmologisk konstant, vilket jag kommer till senare) som kröker rummet.

Krökningen är alltså både läges-och riktningsoberoende varför ett sådant universum ser likadant ut för alla observatörer och i alla riktningar. Pga denna rotationssymmetri kan metriken uttryckas som $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$ där dl betecknar rumsdelen av metriken i ett homogent isotropt rum. Pga kravet på isotropi kring varje punkt finns inte heller någon previligierad punkt - därför saknar ett sådant universum, om det exempelvis expanderar, ett expansionscentrum.

Jag börjar för enkelhetens skull med att betrakta 2-dimensionella homogena ytor i $\mathbf{R}^3$. En 2-sfär är en homogen yta då alla punkter på den är ekvivalenta.

Proposition:
Metriken för den 2-dimensionella sfären S^2 med radie R i $\mathbf{R}^3$ ges av

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)} = R^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2).$$

Bevis:
För den 2-dimensionella sfären S^2 i $\mathbf{R}^3$ med $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gäller

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{xdx + ydy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$$

varför

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2|_{TS^2} = \\ &= dx^2 + dy^2 + \frac{(xdx + ydy)^2}{R^2 - (x^2 + y^2)} \ . \end{aligned}$$

Vidare gäller följande samband i $\mathbf{R}^3$ mellan rätvinkliga och sfäriskt polära koordinater

$$\begin{cases} x = R \cdot sin\theta cos\phi \\ y = R \cdot sin\theta sin\phi \\ z = R \cdot cos\theta \end{cases}$$

och differentiering med R konstant ger

$$\begin{cases} dx = R \cdot (cos\theta cos\phi d\theta - sin\theta sin\phi d\phi) \\ dy = R \cdot (cos\theta sin\phi d\theta + sin\theta cos\phi d\phi) \\ dz = -R \cdot sin\theta d\theta \end{cases}$$

varför

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2|_{TS^2} = R^2 d\theta^2 + R^2 sin^2\theta d\phi^2 = \\ = R^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2).$$

□

För en expanderande homogen yta gäller följande samband mellan **rumtidkrökningen** $K(t)$, **krökningsindex** k och **skalfaktorn** $R(t)$ som beskriver universums expansion i tiden:

$$K(t) = \frac{k}{R^2(t)}; \quad k = \begin{cases} +1 & \text{(sfär)} \\ 0 & \text{(plan)} \\ -1 & \text{(hyperboliskt plan)} \end{cases}$$

så vid en given tidpunkt t är krökningen konstant lika med $k/R^2(t)$ på hela den homogena ytan. $K(t)$ betecknar krökningens storlek vid en given tidpunkt t och varierar i tiden om ytan expanderar eller kontraherar. Krökningsindex k är däremot konstant under alla tider för en given yta eftersom den betecknar krökningens karaktär.

Metriken i det allmäna fallet för en 2-dimensionell yta i $\mathbf{R}^3$ med konstant krökning ges av

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + k\frac{(xdx + ydy)^2}{R^2 - k(x^2 + y^2)}$$

där den sista termen betecknar avvikelsen från planhet, k är krökningsindex och antar något av värdena $+1, 0, -1$ beroende på krökningens karaktär.

Flertalet astronomer är idag överens om att vi lever i ett expanderande universum. Expansionen innebär att rummet självt utvidgas så att det inbördes läget mellan de i universum innehållna objekten förblir oförändrat så länge objektens egenrörelse kan anses försumbar. Man betraktar det som att universum helt enkelt 'skalas upp'.

Definition:
I kosmologiska sammanhang definieras

$$\sigma = \frac{r(t)}{R(t)}$$

som en dimensionslös koordinat som 'följer med' i expansionen. Ett objekt som saknar egenrörelse i ett expanderande eller kontraherande universum kommer således att under alla tider ha ett och samma värde på sin positionskoordinat σ.

Proposition:
Generalisering till fyra dimensioner ger följande för rumsdelen av metriken på en 3-dimensionell homogen yta i $\mathbf{R}^4$:

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1-Kr^2} = R^2\left[\sigma^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2}\right].$$

Bevis:
Utökning med en dimension och samma tillvägagångssätt som i härledningen av den 2-dimensionella ytans metrik fast med $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ och $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$ ger

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dv^2 =$$

$$= dx^2 + dy^2 + dz^2 + k\frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{R^2 - k(x^2 + y^2 + z^2)} =$$

$$= dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + k\frac{r^2dr^2}{R^2 - kr^2} =$$

$$= r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dr^2(R^2 - kr^2) + kr^2dr^2}{R^2 - kr^2} =$$

$$= r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{R^2dr^2}{R^2 - kr^2}$$

$$= r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R^2}} =$$

$$= r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{dr^2}{1 - Kr^2}\ .$$

Insättning av $\sigma = r/R$ och $dr = Rd\sigma$ (eftersom R är konstant vid den givna tidpunkten vid vilken vi betraktar ytan) i ovanstående uttryck resulterar i

$$dl^2 = R^2\left[\sigma^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2}\right]\ .$$

□

Genom insättning av detta uttryck i separationformeln $dl^2 = c^2dt^2 - dl^2$ erhålls den metrik astronomerna brukar arbeta med.

Definition:
Den separationsformel astronomerna använder för att beskriva metriken i ett homogent isotropt rum kallas för **Robertson-Walker-metriken** och har följande utseende:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - R^2\left[\sigma^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2}\right]\ .$$

Proposition:
Följande uttryck för Robertson-Walker-metriken är ekvivalenta:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - R^2\left[\sigma^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - R^2\left[\sigma^2(w)(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) + dw^2\right]$$

där

$$dw = \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sigma(w) = \begin{cases} sin(w) & k=+1 \\ w & k=0 \\ sinh(w) & k=-1\ . \end{cases}$$

Bevis:
Insättning av dl^2 från föregående proposition i $ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$ leder till det första uttrycket. Det andra metriska uttrycket skiljer sig åt från det första endast i den sista termen och enligt definitionen på w gäller att

$$\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} = dw^2$$

för alla k, eftersom

$$k=+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dw} = \frac{d(sinw)}{dw} = cosw \quad och \quad 1-k\sigma^2 = 1-sin^2w = cos^2w \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} = \frac{cos^2w \cdot dw^2}{cos^2w} = dw^2$$

$$k=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dw} = \frac{d(sinhw)}{dw} = coshw \quad och \quad 1-k\sigma^2 = 1+sinh^2w = cosh^2w \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} = \frac{cosh^2w \cdot dw^2}{cosh^2w} = dw^2$$
$$k=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dw} = \frac{dw}{dw} = 1 \quad och \quad 1-k\sigma^2 = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} = dw^2.$$

□

Jag har hittills visat att Robertson-Walker-metriken har det angivna utseendet endast i fallet $k=+1$. Att metriken har det angivna utseendet för alla tre typerna av konstant krökning inses genom att härleda metriken med hjälp av Gauss krökningsformel, och detta är vad jag kommer att göra nu.

I ett krökt rotationssymmetriskt rum kan den allmäna metriken skrivas

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - f(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

där $f(r)$ anger hur ett på ytan uppmätt avstånd från origo avviker från motsvarande Euklidiska avstånd dr. Uppmätt av en invånare på ytan ges det 'egentliga' avståndet mellan två punkter (r, θ, ϕ) och $(r + dr, \theta, \phi)$ av $\sqrt{f(r)}dr$.

För ytor med konstant krökning kan man för enkelhetens skull välja att arbeta med ekvatorialytan $\theta = \frac{\pi}{2}$ varför rumsdelen av metriken reduceras till

$$dl^2|_{\theta=\pi/2} = f(r)dr^2 + r^2d\phi^2.$$

Lemma:
Gausskrökningen K för en yta med den rotationssymmetriska metriken $dl^2 = f(r)dr^2 + r^2d\phi^2$ ges av

$$K = \frac{df(r)/dr}{2f(r)^2r} .$$

Bevis:
Genom att använda följande kända formel för Gausskrökningen med $E = f(r)$, $G = r^2$, $u = r$ och $v = \phi$ erhålls

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{f(r)r^2}}\left[\left(\frac{d_\phi f(r)}{\sqrt{f(r)r^2}}\right)_\phi + \left(\frac{2r}{\sqrt{f(r)r^2}}\right)_r\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{f(r)r^2}}\frac{d}{dr}\left(\frac{2r}{\sqrt{f(r)r^2}}\right) = -\frac{1}{r\sqrt{f(r)}}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}}\right) = \frac{1}{r\sqrt{f(r)}}\frac{1}{2}f(r)^{-3/2}\frac{df(r)}{dr} =$$

$$= \frac{df(r)/dr}{2rf^2(r)} .$$

□

Proposition:
Funktionen $f(r)$ har följande utseende i det givna metriska uttrycket $dl^2|_{\theta=\pi/2} = f(r)dr^2 + r^2d\phi^2$:

$$f(r) = \frac{1}{1 - Kr^2}$$

varför metriken kan skrivas

$$dl^2 = \frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2).$$

Bevis:
Rumsdelen av metriken kan uttryckas som $dl^2 = g_{12}dx^1dx^2$ där tensormatrisen g_{12} har följande utseende

$$g_{12} = \begin{pmatrix} f(x^1) & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

med $x^1 = r$ och $x^2 = \phi$.
Gauss krökningsformel ger då enligt lemmat

$$K = \frac{df(x^1)/dx^1}{2f^2(x^1)x^1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2Kx^1 = \frac{df(x^1)/dx^1}{f^2(x^1)} = -\frac{d}{dx^1}\left(\frac{1}{f(x^1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1/f(x^1) = C - K(x^1)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(x^1) = 1/\big(C - K(x^1)^2\big)$$

där C fås ur begynnelsevillkoret $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ vilket medför att $r = x^1$ reduceras till den vanliga radiella koordinaten i det plana fallet. Den sökta funktionen är därför

$$f(r) = \frac{1}{(1 - Kr^2)}$$

varför metriken kan skrivas

$$dl^2 = \frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2).$$

$\square$

Sambandet mellan det radiella avståndet r och det geodetiska avståndet a på 2-sfären i $\mathbf{R}^3$ med $r^2 = x^2 + y^2$ och $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ges av

$$a = R \cdot \theta = R \cdot arcsin(r/R) = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot arcsin(r\sqrt{K})$$

eftersom sfärens krökning K ges av $K = 1/R^2 \Leftrightarrow R = 1/\sqrt{K}$. Detta inses lätt genom att betrakta nedanstående bild.
Illustration:

Proposition:
För en cirkel på 3-sfären i $\mathbf{R}^4$ gäller för denna cirkels geodetiska radie a, omkrets C och för hela sfärens area A följande:

$$a = \frac{1}{\sqrt{K}} arcsin(r\sqrt{K}) \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{K}} sin(a\sqrt{K})$$

$$C = 2\pi r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} sin(a\sqrt{K})$$

$$A = 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{K} sin^2(a\sqrt{K}).$$

Bevis:
Med hjälp av det metriska uttrycket

$$dl^2 = f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

erhålls a genom att integrera över dl längs r:

$$a = \int_{d\theta = d\phi = 0} dl = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - K^2}} = \frac{1}{\sqrt{K}} arcsin(r\sqrt{K})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{K}} sin(a\sqrt{K})$$

varför omkretsen C ges av

$$C = r\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} sin(a\sqrt{K}).$$

Arean A av sfären uttryckt i a ges av

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta d\phi = \frac{4\pi}{K} sin^2(a\sqrt{K}).$$

$\square$

Proposition:
För en positivt krökt 3-dimensionell homogen yta i $\mathbf{R}^4$ med rumsdelen av metriken given av

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)$$

kan krökningen K bestämmas med hjälp av en cirkel på denna yta genom att mäta denna cirkelns omkrets C och geodetiska radie a eftersom följande relation råder mellan dessa:

$$K = \frac{3}{\pi} lim_{a\to 0} \frac{2\pi a - C}{a^3} \ .$$

Bevis:
Då $a \to 0$ eller då $K \to 0$ är $a\sqrt{K} = a/\sqrt{R}$ litet och Taylorutveckling av omkretsen C ger

$$C = 2\pi r = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} sin(a\sqrt{K}) = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}\left(a\sqrt{K} - \frac{1}{6}(a\sqrt{K})^3 + ...\right) = 2\pi a - \frac{\pi}{3}a^3K + ...$$

varur krökningen K erhålls som

$$K = \frac{3}{\pi} lim_{a\to 0} \frac{2\pi a - C}{a^3} \ .$$

$\square$

För ett objekt med det konstanta värdet $(\sigma, \theta, \phi) = (\sigma, 0, 0)$ på sin positionskoordinat och med $\sigma = r/R$ konstant i tiden erhålls genom insättning i Robertson-Walker-metriken av $dt = d\theta = d\phi = 0$ (pga rotationssymmetrin) följande för avståndet ut till detta objekt i σ vid en given tidpunkt t då $R(t) = R$:

$$dl = R \cdot \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}} \Rightarrow l = R \cdot \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}} \ .$$

Integration i de tre fallen av krökning ger med $w = l/R$

$$l = \begin{cases} R \cdot \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = R \cdot arcsin(\sigma) & k = +1 \\ R \cdot \int_0^{\sigma} d\sigma = R \cdot \sigma & k = 0 \\ R \cdot \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} = R \cdot arcsinh(\sigma) & k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sigma = \begin{cases} sin(l/R) = sin(w) & k = +1 \\ l/R = w & k = 0 \qquad (*) \\ sinh(l/R) = sinh(w) & k = -1 \ . \end{cases}$$

Man konstaterar här att ett positivt krökt universum måste vara rumsligt begränsat eftersom man återkommer till utgångspunkten efter att ha färdats sträckan $l = \pi R$. Den dimensionslösa koordinaten σ går från 0 till 1 då l går från 0 till $\frac{1}{2}\pi R$ och med motsvarande fortsättning gäller att σ går från 1 till 0 då l går från $\frac{1}{2}\pi R$ till πR. Skillnaden mellan vad astronomerna kallar en sfärisk respektive elliptisk geometri består i att $l/R = \pi$ och $l/R = 0$ i den sfäriska geometrin betraktas som antipodala punkter medan de i den elliptiska geometrin betraktas som en och samma punkt.

Förhållandet mellan omkretsen C av en cirkel på ytan och denna cirkels radie w avspeglar ytans krökningskaraktär. En avvikelse från 2π tyder på att ytans geometri inte är plan.

För en cirkels 'koordinatomkrets', dvs omkretsen uttryckt i den dimensionslösa koordinaten σ, gäller

$$C = 2\pi\sigma_k(w) = \begin{cases} 2\pi sin(w) & k = +1 \\ 2\pi w & k = 0 \\ 2\pi sinh(w) & k = -1 \end{cases}$$

varför förhållandet mellan cirkelns omkrets och radie ges av

$$\frac{2\pi\sigma(w)}{w} \begin{cases} < 2\pi & k = +1 \\ = 2\pi & k = 0 \\ > 2\pi & k = -1\ . \end{cases}$$

För den sfäriska ytans area A uttryckt i w erhålls

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi R^2 \sigma_k^2(w) = \begin{cases} 4\pi R^2 sin^2 w & k = +1 \\ 4\pi R^2 w^2 & k = 0 \\ 4\pi R^2 sinh^2 w & k = -1 \end{cases}$$

Motsvarande 'koordinatarea' ges av $A = 4\pi\sigma_k(w)$. För den inneslutna volymen erhålls

$$V = \iiint d^3 r = \iiint \frac{r^2 sin\theta}{\sqrt{1 - Kr^2}} \cdot dr d\theta d\phi.$$

Då en sfärisk rymd ($k = +1$) är begränsad erhålls volymen med $r \in [0, R]$ dvs $\sigma \in [0, 1]$ som

$$V_{k=+1} = \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi} sin\theta \cdot 2\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^{\pi} sin\theta \cdot 2R^3 \int_0^1 \frac{\sigma^2}{\sqrt{1 - \sigma^2}} d\sigma = 2\pi^2 R^3$$

och den sfäriska koordinatvolymen, dvs volymen uttryckt i den dimensionslösa koordinaten σ, ges av

$$V_{k=+1} = \int_0^{\pi} 4\pi\sigma^2_{(k=+1)}(w) dw = \int_0^{\pi} 4\pi sin^2 w dw = 2\pi^2.$$

Tvåan i den första beräkningen kommer från det att $\sigma \in [0,1]$ för första halvan av sfären och $\sigma \in [1,0]$ för den andra halvan. I elliptisk geometri täcks däremot hela volymen då σ genomlöper det första intervallet $[0,1]$ så att volymen i det elliptiska fallet istället ges av $\pi^2 R^3$ och motsvarande koordinatvolym av π^2. Volymerna $2\pi^2$ och π^2 används omväxlande för en positivt krökt rymd av astronomerna, beroende på om de använder sfärisk eller elliptisk geometri, vilket ofta inte framgår.

1.1 HUBBLES LAG

Hubbles lag anger den hastigheten $v(t)$ med vilken ett objekt förefaller avlägsna sig från observatören pga den universella expansionen i ett homogent isotropt universum. Den endimensionella analogi som brukar användas för ett expanderande universum är ett gummiband som töjs ut. Det är uppenbart att den hastighet med vilken en punkt på gummibandet avlägsnar sig från en observatör i en given punkt är proportionell mot punktens avståndet från observatören. Vidare är det uppenbart att varje punkt på gummibandet kan betraktas som expansionens centrum.

Hubbles lag har samma utseende för alla observatörer och innebär att den kosmologiska principen är sann vid varje given tidpunkt.

I kosmologiska sammanhang definieras **Hubbleparametern** som

$$H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$$

där $\dot{R}(t)$ betecknar tidsderivatan av skalfaktorn.

Proposition:
I Robertson-Walker-modellerna av universum har **Hubbles lag** följande utseende:

$$v_k(t) = H(t) \cdot \begin{cases} R(t) \cdot arcsin(\sigma) & k = +1 \\ R(t) \cdot \sigma & k = 0 \\ R(t) \cdot arcsinh(\sigma) & k = -1 \end{cases}$$

där σ som vanligt betecknar den dimensionslösa koordinaten för ett objekt som 'följer med' i expansionen.

Bevis:
Då ljus färdas längs nollgeodeter och rummet antas vara rotationssymmetriskt erhålls genom att sätta $ds = d\theta = d\phi = 0$ det geodetiska avståndet $D(t)$ vid tidpunkten t mellan en observatör i origo ($\sigma = 0$) och ett objekt i σ som

$$D_k(t) = R(t) \cdot \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = \begin{cases} R(t) \cdot arcsin(\sigma) & k = +1 \\ R(t) \cdot \sigma & k = 0 \\ R(t) \cdot arcsinh(\sigma) & k = -1\ . \end{cases}$$

För objektets hastighet erhålls med ovanstående uttryck tillsammans med $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$ för Hubbleparametern Hubbles lag:

$$v_k(t) = \dot{D}_k(t) = \dot{R}(t) \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = \dot{R}(t) \cdot \frac{D(t)}{R(t)} = H(t) \cdot D_k(t) =$$

$$= H(t) \cdot \begin{cases} R(t) \cdot arcsin(\sigma) & k = +1 \\ R(t) \cdot \sigma = r(t) & k = 0 \\ R(t) \cdot arcsinh(\sigma) & k = -1\ . \end{cases}$$

□

I de flest böker i kosmologi anges Hubbles lag som $v(t) = H(t) \cdot D(t)$ där alltså $D(t)$ skall uppfattas som ett vanliga Euklidiskt avstånd endast i fallet $k = 0$.

1.2 OBJEKT-OCH HÄNDELSEHORISONTER

Astronomerna brukar beteckna tidpunkten för en observation med t_0, och t_{min} brukar anges som den tidpunkt vid vilken det studerade objektet börjat sända ut ljus. Med $t_{min} = 0$ studeras objekt som börjat sända ut strålning sedan universums skapelse i $t = 0$. Med $t_{min} = -\infty$ studeras objekt i ett universum som saknar begynnelse i tiden. Jag avstår emellertid från att göra detta här eftersom jag stödjer Big Bang-teorin som bla innebär att universum är ändligt gammalt.

Definition:
Det mest avlägsna objekt vi kan observera idag (vid tidpunkten $= t_0$) säges ligga på **objekthorisonten** på ett koordinatavstånd σ_{oh} ifrån oss i $\sigma = 0$ (origo).

Proposition:
Objekthorisonten ges av

$$\sigma_{oh} = \begin{cases} sin\left(c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t)\right) & k = +1 \\ c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t) & k = 0 \\ sinh\left(c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t)\right) & k = -1\ . \end{cases}$$

Bevis:
Då ljus färdas i ett rotationssymmetrisk rum kan man sätta $ds = d\theta = d\phi = 0$ i Robertson-Walker-metriken, varför

$$0 = c^2dt^2 - R^2(t)\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c}\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}\ .$$

Integration med t_{em} som tidpunkten för emission och t_{obs} som tidpunkten för observation ger

$$\int_{t_{em}}^{t_{obs}} dt/R(t) = \frac{1}{c}\int_0^{\sigma_{em}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}\ .$$

Med $t_{obs} = t_0$ och $t_{em} = t_{min}$ erhålls för en observatör i origo objekthorisonten σ_{oh} som övre integrationsgräns varför

$$l(t)/R(t) = c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t) = \int_0^{\sigma_{oh}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}\ .$$

Insättning av detta i det tidigare härledda uttrycket $(*)$ på sid. 12 för σ

$$\sigma = \begin{cases} sin(l/R) & k = +1 \\ l/R & k = 0 \\ sinh(l/R) & k = -1 \end{cases}$$

ger då

$$\sigma_{oh} = \begin{cases} sin\left(c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t)\right) & k = +1 \\ c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t) & k = 0 \\ sinh\left(c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t)\right) & k = -1 \; . \end{cases}$$

□

Koordinatavståndet ut till det mest avlägsna objekt vi kan observera beror således på rummets geometri k samt på expansionens utseende som beskrivs av skalfaktorn $R(t)$.

Att objekthorisont saknas anges med $\sigma_{oh} = \infty$. Detta innebär att man kan skåda alla vid tiden t_{min} och därefter existerande objekt i detta universum. Detta är exempelvis fallet då $k = 0, -1$ och $c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t) = \infty$ eller då $k = +1$ och $c\int_{t_{min}}^{t_0} dt/R(t) \geq \pi$. Det sista fallet svarar nämligen mot att en observatör i $\sigma = 0$ kan se förbi den motsatta polen i $\sigma = 1$.

På samma sätt kan man definiera en **händelsehorisont** som det maximala koordinatavstånd σ_{eh} (mätt från origo) i vilket en händelse som inträffar idag (t_0) kommer att kunna observeras någon gång i framtiden av en observatör i origo. Man erhåller samma formler som för σ_{oh} fast med undre integrationsgräns t_0 = tiden för observation och övre integrationsgräns t_{max} = det givna universats maximala ålder. Händelser som inträffar vid tidpunkten t_0 *bortom* σ_{eh} kommer aldrig att kunna observeras av en observatör i origo och en sådan händelse kommer heller aldrig att kunna påverka denna observatörs framtida observerbara universum. I ett universum med $\sigma_{eh} = \infty$ kommer alla händelser att bli observerbara för alla observatörer bara han eller hon väntar tillräckligt länge. Detta gäller exempelvis i fallen med $k = 0, -1$ då $c\int_{t_0}^{\infty} dt/R(t) = \infty$ eller för $k = +1$ då $c\int_{t_0}^{t_{max}} dt/R(t) \geq \pi$. Om ett universum *har* en händelsehorisont kan man välja att extrapolera utanför denna gräns endast om man är beredd på att göra vissa antaganden som av naturliga skäl aldrig kommer att kunna verifieras experimentellt.

1.3 OLBERS PARADOX

Om universum är oändligt i utsträckning kommer man i varje synlinjes riktning förr eller senare att träffa på någon form av ljuskälla, exempelvis en galax. Andelen strålning från en galax på avståndet r som når en observatör i origo är omvänt proportionell mot r^2. Ljusstyrkan är alltså omvänt proportionell mot avståndet till ljuskällan i kvadrat.

Om L betecknar den **absoluta luminositeten** (utstrålad energi per tidsenhet) och l den **skenbara (apparenta) luminositeten** (emottagen energi per tids-och areaenhet) gäller följande samband mellan dessa — **luminositetslagen:**

$$l = \frac{L}{4\pi r^2} \; .$$

Om man antar en homogen galaxfördelning gäller att antalet galaxer på ytan $A = 4\pi r^2$ *ökar* som kvadraten på ytans radie (avståndet från origo)r samtidigt som andelen strålning från varje galax *avtar* som kvadraten på detta avstånd r. Dessa två effekter tar därför ut varandra.

Om galaxtätheten antas vara konstant i tid och rum och betecknas med n och varje galax antas ha en absolut luminositet L kommer den sammanlagda skenbara ljusstyrkan dl från ett skal med tjockleken dr på avståndet r att vara

$$dl = \frac{L}{4\pi r^2} n 4\pi r^2 dr = nLdr.$$

Luminositetsbidraget är alltså lika stort från alla skal oberoende av deras avstånd ifrån observatören. Rymden bör därför se lika ljusstark ut som solen i varje riktning, dag som natt. Detta är vad som menas med **Olbers paradox**. 'Paradoxen' visar sig emellertid ha minst en naturlig förklaring och är därför egentligen inte alls någon paradox.

Den totala ljusstyrkan l_{tot} erhålls genom att integrera över alla skal från en observatör i origo ut till ett givet avstånd R (där R alltså *inte* betecknar skalfaktorn):

$$l_{tot} = \int_0^R dl = \int_0^R nLdr = nLR.$$

Då n och L enligt antagandet är konstanta måste gälla att $R < \infty$ för att erhålla konvergens av integralen och därmed en ändlig skenbar luminositet l_{tot}. Detta innebär att universum måste vara begränsat i utsträckning om man ska kunna undvika Olbers paradox.

Strålningen förlorar emellertid också energi pga den våglängdsuttöjning som orsakas av den universella expansionen, samtidigt som antalet anländande fotoner också reduceras pga expansionen. Därför måste luminositetslagen modifieras, och den **modifierade luminositetslagen** ges av

$$l = \frac{L(t_e)R^2(t_e)}{4\pi\sigma_e^2 R^4(t_0)}$$

där
l=apparent luminositet,
L=absolut luminositet,
t_e= tiden för emission från ljuskällan och $R(t_e)$ är skalfaktorn vid denna tidpunkt,
t_0=tiden för observation av detta ljus och $R(t_0)$ skalfaktorn vid denna tidpunkt,
σ_e=den koordinat ljuskällan hade vid tiden t_e (σ_e är konstant så länge ljuskällan saknar egenrörelse).

Vidare antas L framöver vara en funktion av tiden i enlighet med den kosmiska evolutionen (här luminositetsutveckling i galaxerna) som här för enkelhetens skull antas ske på samma sätt för alla typer av galaxer.

Det gäller alltså att ersätta

$$l = \frac{L}{4\pi r^2(t_0)} \qquad med \qquad l = \frac{L(t_e)R^2(t_e)}{4\pi\sigma_e^2 R^4(t_0)} \ .$$

Den modifierade lagen skiljer sig med en faktor $R^2(t_e)/R^2(t_0) = (1+z)^{-2}$ från den ursprungliga lagen. I den modifierade versionen har jag utnyttjat relationen

$$r(t_0) = r(t_e) \cdot \frac{R(t_0)}{R(t_e)} = R(t_0)\sigma_e$$

för att förtydliga att den vid tidpunkten t_0 observerade strålningen sänts ut vid en tidpunkt t_e från en källa i σ_e. Den ena faktorn $(1+z)^{-1}$ i den modifierade lagen härrör från energiförlusten pga våglängdsuttöjningen orsakad av expansionen och den andra faktorn
$(1+z)^{-1}$ beror på att antalet anländande fotoner per tidsenhet i förhållande till antalet utsända också reduceras med denna faktor pga expansionen.

För att undvika Olbers paradox kan man formulera ett villkor som varje kosmologisk modell måste satisfiera — nämligen att den totala apparenta luminositeten härrörandes från alla ljuskällor skall vara ändlig — eftersom detta är vad man observerar.

Proposition:
Med den modifierade luminositetslagen ges den totala apparenta luminositeten i ett Robertson-Walker-universum av

$$l_{tot} = \int dl_{tot} = \frac{cn(t_0)}{R(t_0)} \int_{t_{min}}^{t_0} L(t_e)R(t_e)dt_e \ .$$

Bevis:
En övre gräns på l_{tot} kan beräknas genom att uppskatta antalet galaxer mellan koordinatsfärerna σ och $(\sigma + d\sigma)$. Enligt tidigare gäller för avståndet $D(t)$ ut

till ett objekt i den dimensionslösa koordinaten σ

$$D(t) = R(t)\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}} = \begin{cases} R(t)\cdot arcsin(\sigma) & k=+1 \\ R(t)\cdot\sigma & k=0 \\ R(t)\cdot arcsinh(\sigma) & k=-1\ . \end{cases}$$

Med $n(t)$ avses antalet galaxer per volymsenhet, den sk antalsdensiteten, vid tidpunkten t. Pga den universella expansionen kan denna naturligtvis inte längre antas vara konstant. I ett expanderande universum är antalsdensiteten $n(t)$ en avtagande funktion av tiden så länge inget kontinuerligt nyskapande av materia sker.

Arean av en koordinatsfär med radie σ ges av

$$A(t) = 4\pi r^2(t) = 4\pi\sigma^2 R^2(t).$$

Avståndet mellan de två koordinatsfärerna i σ och $(\sigma + d\sigma)$ ges enligt Robertson-Walker-metriken av

$$dD(t) = R(t)\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}\ .$$

Man erhåller därför för antalet inneslutna galaxer mellan de två koordinatsfärerna σ och $(\sigma + d\sigma)$ vid tiden t

$$dN_{d\sigma}(t) = n(t)\cdot dV(t) =$$

$$= n(t)\cdot A(t)\cdot dD(t) =$$

$$= n(t)\cdot 4\pi\sigma^2 R^2(t)\cdot R(t)\frac{d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}} =$$

$$= 4\pi n(t)R^3(t)\cdot\frac{\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{1-k\sigma^2}}\ .$$

Om man med dl_{tot} betecknar den bidragande apparenta luminositeten från alla galaxer mellan σ_e och $(\sigma_e + d\sigma_e)$ observerade vid tidpunkten t_0 och antalet galaxer mellan dessa sfärer med $dN_{d\sigma_e}$ och antar att varje galax bidrar med den apparenta luminositeten $l(t_0)$ gäller med den nyss härledda formeln:

$$dl_{tot} = dN_{d\sigma_e}\cdot l(t_0) = 4\pi n(t_e)R^3(t_e)\frac{\sigma_e^2 d\sigma_e}{\sqrt{1-k\sigma_e^2}}\cdot\frac{L(t_e)R^2(t_e)}{4\pi\sigma_e^2 R^4(t_0)}\ .$$

Antalet galaxer dN_{σ_e} mellan de två givna koordinatsfärerna kan betraktas som konstant i tiden eftersom dessa sfärer rör sig 'med' expansionen och galaxernas egenrörelse kan anses försumbar så att ett givet antal galaxer alltid håller sig innanför en given koordinarsfär med tjocklek $d\sigma$ under expansionens gång. Detta bevarande av galaxerna kan uttryckas genom följande massbevaringsvillkor

$$n(t_e)\cdot R^3(t_e) = n(t_0)\cdot R^3(t_0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n(t_e) = n(t_0)\frac{R^3(t_0)}{R^3(t_e)} \ .$$

Då strålning färdas längs nollgeodeter gäller vidare med Robertson-Walker-metriken

$$\frac{R(t_e)d\sigma_e}{\sqrt{1-k\sigma_e^2}} = c \cdot dt_e$$

och insättning av de två sista uttrycken i uttrycket för dl_{tot} ger

$$dl_{tot} = 4\pi n(t_e)R^3(t_e) \cdot \frac{\sigma_e^2 d\sigma_e}{\sqrt{1-k\sigma_e^2}} \cdot \frac{L(t_e)R^2(t_e)}{4\pi\sigma_e^2 R^4(t_0)} =$$

$$= 4\pi n(t_0)\frac{R^3(t_0)}{R^3(t_e)} \cdot R^2(t_e)\sigma_e^2 \cdot cdt_e \frac{L(t_e)R^2(t_e)}{4\pi\sigma_e^2 R^4(t_0)} =$$

$$= \frac{cn(t_0)}{R(t_0)} \cdot L(t_e)R(t_e)dt_e$$

så att den totala apparenta luminositeten ges av

$$l_{tot} = \int dl_{tot} = \frac{cn(t_0)}{R(t_0)} \int_{t_{min}}^{t_0} L(t_e)R(t_e)dt_e.$$

□

I en Big Bang modell gäller att $t_{min} = 0$ och $R(t_{min}) = 0$ och enligt konvention $R(t_0) \equiv 1$. Med $R(t_0) = 1$ måste gälla att $R(t_e) < 1$ då $t_e < t_0$ i ett expanderande universum så $R(t_e)$ är begränsad. $L(t_e)$ betecknar den absoluta luminositeten hos en galax vid tiden t_e och är därför också begränsad. För universums galaxdensitet gäller under en expansionsfas $n(t_0) < n(t_e) < \infty$.

Alla parametrar är således begränsade i ett Big Bang-universum varför integralen konvergerar och $l_{tot} < \infty$.

Således kan man sluta sig till att universum antingen är ändligt gammalt eller ändligt i utsträckning eller bådadera. Det är därför uppenbart att exempelvis en Big Bang-modell, i vilken både tiden och rummet är begränsade, skulle kunna utgöra en lösning på Olbers paradox. Olbers paradox kan emellertid inte undvikas i alla typer av universa och man erhåller därför ett begränsat urval av modeller att arbeta med. Exempelvis kan integralen inte konvergera i ett statiskt oändligt stort universum som existerat i all evighet. Däremot är detta möjligt för vissa icke-statiska oändligt gamla modeller för vissa utseenden på funktionen $R(t)$.

2 FRIEDMANNS EKVATIONER

En perfekt fluid i en Robertson-Walker-rumtid beskrivs av **Friedmanns ekvationer**. Dessa ekvationer, som utgör en lösning Einsteins fältekvationer, anger skalfaktorns uppförande i ett Robertson-Walker-universum i vilket energin är bevarad. Att beskriva skalfaktorns utveckling i tiden är en lämplig metod för att undersöka en kosmologisk modell, och det är denna metod jag kommer att använda mig av här.

Friedmanns första ekvation är ett uttryck för energibevaring medan den andra beskriver hur universums energitäthet varierar i tiden. Friedmanns ekvationer kompletterade med en **kosmologisk konstant** Λ — isjälva verket en integrationskonstant som uppträder vid lösandet av fältekvationerna — kallas **Friedmann-Lemaitres ekvationer**.

Jag kommer från och med nu att beteckna skalfaktorn med S istället för R. Både Friedmanns och Friedmann-Lemaitres ekvationer kan alltså härledas med allmän relativitetsteori. Detta kommer jag emellertid inte att göra här. Istället använder jag klassisk mekanik tillsammans med kännedom om att den fullständiga överensstämmelsen mellan klassisk mekanik och allmän relativitetsteori erhålls genom att i de ekvationer som följer sätta universums totala energi till

$$E_{tot} = -\frac{1}{2}mkc^2$$

där m betecknar massa, c ljushastigheten och k krökningsindex.

I härledningen av ekvationerna använder jag alltså Newtonsk mekanik och gravitationsteori. Detta är befogat eftersom galaxernas hastigheter är små i jämförelse med ljushastigheten och eftersom medelgravitationsfältet i universum som helhet är svagt. Lokalt i närheten av massiva kroppar som stjärnor måste man naturligtvis använda allmän relativitetsteori. Med ett **Friedmann-universum** avser jag ett Robertson-Walker-universum där energin är bevarad och $\Lambda = 0$.

Definition:
Med ett **plant** universum avses ett universum med totalenergin noll. I ett sådant universum är expansionskraften (svarandes mot den kinetiska energin) och den graviterande kraften (svarandes mot den potentiella energin) i exakt balans. Expansionshastigheten kommer att sakta av och närma sig noll för tillräckligt stora värden på t.

Med $\Lambda = 0$ gäller att ett plant universum sammanfaller med ett universum som har $k = 0$. I detta kapitel antas genomgående att den kosmologiska konstanten Λ är noll.

Definition:
Den densitet för vilken ett Robertson-Walker-universum är plant, dvs har totalenergi noll, kallas den **kritiska densiteten** och betecknas med ρ_{crit}.

Proposition:
Den kritiska densiteten i ett Friedmann-universum ges vid tidpunkten t_0 av

$$\rho_{0,crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

där H_0 betecknar Hubble-parameterns värde vid observationstillfället t_0 .

Bevis:
I ett plant universum med exakt balans mellan expansion och gravitation är den totala energin noll

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{grav} = 0$$

Hubbles lag i det plana fallet ges enligt tidigare av uttrycket

$$v = Hr.$$

Om man i enlighet med den kosmologiska principen antar ett homogent och isotropt universum med medeltäthet ρ och för vilket den gravitationella kraften på ett sfäriskt skal endast beror på massan innanför detta skal erhålls med klassisk mekanik för en galax med massan m på ytan av en expanderande sfär med radie r och massa $M = 4\pi r^3\rho/3$ följande:

$$E_{kin} = -E_{grav}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{r}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mH^2r^2 = \frac{Gm}{r} \cdot \frac{4\pi r^3\rho}{3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

så vid observationstillfället t_0 gäller

$$\rho_{0,crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \ .$$

□

Definition:
Densitetsparametern Ω definieras av $\Omega = \rho_0/\rho_{0,crit}$.

Jag introducerar nu de två Friedmannska ekvationerna som beskriver hur skalfaktorn uppför sig med tiden i ett Robertson-Walker-universum där energin är bevarad. Den första ekvationen är ett uttryck för förstaderivatan $\dot{S}$ av skalfaktorn och är ett uttryck för energibevaring i universum. Den andra ekvationen är ett uttryck för skalfaktorns andraderivata $\ddot{S}$ och anger hur universums energitäthet varierar i tiden. Så länge man bortser från den kosmologiska konstanten Λ, vilket ju är fallet med Friedmanns ekvationer, kan den andra ekvationen erhållas genom att derivera den första.

Definition:
Då ett universum säges var **materiedominerat** anses strålningsdensiteten, och därmed strålningstrycket, vara försumbart. Då materietrycket kan försummas om de slumpmässiga rörelserna kan betraktas som små betyder detta att man i en materiedominerad modell kan sätta $p = 0$ i Friedmanns ekvationer. En sådan materiedominerad modell kallas för en **nolltrycksmodell**.

Alla modeller jag utvecklar här kommer att antas vara materiedominerade vilket innebär att materiedensiteten är omvänt proportionell mot skalfaktorn i kubik enligt

$$\rho = \rho_0 \frac{S_0^3}{S^3}$$

som brukligt för materia.

Man anser att det allra tidigaste skedet i universums utveckling varit strålningsdominerat och att det under tidens gång blivit alltmer materiedominerat varför strålningsdensiteten i ett senare skede kan försummas. En mer korrekt tillvägagångsmetod skulle emellertid kräva att både strålning och materia tas med i beräkningarna. Strålningsandelen idag anses dock bara utgöra några få procent av universums totala energiinnehåll varför det är rimligt att helt försumma strålningen. Ett senare skede är vidare av större intresse då både rymdens geometri och en eventuell kosmologisk konstant ger effekter först i ett senare skede av universums utveckling.

Jag börjar med att betrakta det plana fallet av Friedmanns ekvationer. Detta svarar mot ett universum med totalenergin noll eftersom $\Lambda = 0$ i Friedmannmodellerna.

Per konvention sätter vissa astronomer $S_0 = 1$, där S_0 betecknar skalfaktorn vid observationstillfället t_0, varför S_0 'saknas' i en del litteratur. Jag kommer för tydlighetens skull inte att använda mig av denna konvention i härledningarna som följer.

Ett specialfall av Friedmanns första ekvation.

Proposition:
Rörelseekvationen för ett plant materiedominerat Friedmann-universum med

bevarad massa, dvs nettomaterieproduktion noll, har följande utseende

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G\rho S^2}{3} = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S}$$

Bevis:
Med Hubbleparametern

$$H(t) = \dot{S}(t)/S(t)$$

och med massbevaringsvillkoret

$$\rho(t)S^3(t) = \rho_0 S_0^3$$

erhålls med uttrycket för den kritiska densiteten följande

$$\left(\frac{\dot{S}}{S}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G\rho S^2}{3} = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} \ .$$

□

Ett specialfall av Friedmanns andra ekvation.

Proposition:
Den andra rörelseekvationen för ett plant materiedominerat Friedmann-universum med bevarad massa har följande utseende

$$\ddot{S} = -\frac{4\pi G\rho S}{3} = -\frac{4\pi G\rho_0 S_0^3}{3S^2} \ .$$

Bevis:
För en galax med massa m på randen av en massiv expanderande sfär (universum) med radie r, massa M och medeltäthet ρ gäller enligt klassisk mekanik om expansions-och gravitationskrafterna F_{exp} och F_{grav} är i exakt balans

$$F_{exp} = m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} = -\frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4\pi r^3 \rho}{3} = F_{grav}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G}{3}\rho r$$

där $\ddot{r}$ betecknar galaxens acceleration och G den universella gravitationskonstanten. Vidare växer avstånd direkt proportionellt mot skalfaktorn varför

$$r = r_0 \frac{S}{S_0} \qquad \ddot{r} = r_0 \frac{\ddot{S}}{S_0}$$

och med massbevaringsvillkoret

$$\rho = \rho_0 \frac{S_0^3}{S^3}$$

ger de två uttrycken för $\ddot{r}$

$$\ddot{r} = r_0 \frac{\ddot{S}}{S_0} = -\frac{4\pi G}{3}\rho r = -\frac{4\pi G}{3} \cdot \frac{\rho_0 S_0^3}{S^3} \cdot r_0 \frac{S}{S_0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ddot{S} = -\frac{4\pi G \rho S}{3} = -\frac{4\pi G \rho_0 S_0^3}{3S^2}\ .$$

$\square$

Notera att denna ekvation även erhålls som derivatan av ekvationen i föregående proposition då $\dot{S} \neq 0$, dvs om universum är icke-statiskt.

Allmän klassisk härledning av Friedmanns ekvationer.

Proposition:
Friedmanns första ekvation i det allmäna fallet har följande utseende:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{2MG}{S} - kc^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

Bevis:
Med samma resonemang som i härledningen av kritiska densiteten för en galax med massa m på ett expanderande sfäriskt skal med radie S och massa M gäller tillsammans med $E_{tot} = -\frac{1}{2}mkc^2$ att

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{S} = -\frac{1}{2}mkc^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$v^2 - \frac{2GM}{S} = -kc^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{S} - kc^2.$$

Med $M = 4\pi S^3\rho/3$ och $\dot{S} = dS/dt$ kan ekvationen även skrivas på följande ekvivalenta form

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

$\square$

Under en materiedominerad fas har Friedmanns första ekvation följande utseende eftersom $\rho = \rho_0 S_0^3/S^3$:

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 S_0^3}{3S} - kc^2.$$

Med k=+1 inser man genom att låta S växa obegränsat i denna ekvation att

$$\lim_{S\to\infty} \dot{S}^2 = -kc^2 = -c^2$$

vilket ju är orimligt då det måste gälla att $\dot{S}^2 > 0$ under alla tider. Därför måste S vara uppåt begränsad varför expansionen kommer att omvändas i en kontraktion vid någon tidpunkt $t = \frac{1}{2}t_{max}$ där t_{max} är detta universums livstid (tidsintervallet mellan två singulariteter). Motsvarande värde på skalfaktorn, S_{max}, beräknas genom att sätta $\dot{S} = 0$ för expansionens avstannande. Jag utför denna beräkning längre fram.

Inför härledningen av Friedmanns andra ekvation i det allmäna fallet börjar jag med att visa ett lemma med vars hjälp denna andra ekvation kan härledas ur Friedmanns första ekvation.

Lemma 1:
För ett homogent och isotropt universum gäller följande för strålningstätheten ρ_γ

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} = -3\left(\rho_\gamma + \frac{p_\gamma}{c^2}\right)\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}$$

där ρ_γ betecknar fotongasens (strålningens) densitet, p_γ dess tryck, c ljushastigheten och S skalfaktorn.

Bevis:
Om man antar att fotonerna uppför sig som en ideal gas som utvidgas adiabatiskt (utan värmeutbyte med omgivningen) gäller enligt termodynamikens första huvudsats om energibevaring

$$dU + dW = dU + p_\gamma dV = 0$$

U = fotongasens inre energi,
W = uträttat arbete,
V = gasens volym,
p_γ = fotongasens tryck.

Fotongasens energitäthet ges av

$$\frac{E_\gamma}{V} = \frac{M_\gamma c^2}{V} = \rho_\gamma c^2$$

där E_γ anger energin hos en foton och M_γ anger fotonenergins massekvivalent. Energi och motsvarande massekvivalent är relaterade via $E_\gamma = M_\gamma c^2$. Därför ges universums strålningsenergi lokalt av

$$U = \frac{4\pi S^3}{3}\rho_\gamma c^2$$

och insättning av U i energibevaringsvillkoret ger

$$\frac{dU}{dt} + p_\gamma \frac{dV}{dt} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{d}{dt}\big(\frac{4}{3}\pi S^3 \rho_\gamma c^2\big) + p_\gamma \frac{d}{dt}\big(\frac{4}{3}\pi S^3\big) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{3}\pi c^2 \frac{d}{dt}(S^3 \rho_\gamma) + \frac{4}{3}\pi p_\gamma \frac{d}{dt} S^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{4}{3}\pi c^2 \big(3S^2 \frac{dS}{dt}\rho_\gamma + S^3 \frac{d\rho_\gamma}{dt}\big) + \frac{4}{3}\pi p_\gamma 3S^2 \frac{dS}{dt} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} = -3\left(\rho_\gamma + \frac{p_\gamma}{c^2}\right)\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}$$

□

Lemma 2:
Fotongasen utövar ett strålningstryck p_γ givet av

$$p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma c^2.$$

Bevis:
Approximera universum med en rektangulär låda. Varje gång en foton studsar vinkelrätt mot någon av de sex väggarna avger den en rörelsemängd $2E_\gamma/c$ till väggen. Om antalet fotoner per volym är n och väggens area A kommer $\frac{1}{6}nAc\Delta t$ stycken fotoner att studsa mot väggen under tidsintervallet Δt varför väggen då emottar impulsen

$$I = F \cdot \Delta t = \frac{1}{6}nAc\Delta t \cdot 2E_\gamma/c = \frac{1}{3}nE_\gamma A\Delta t.$$

Således erhålls för trycket p_γ definierat som tryckkraft per areaenhet

$$p_\gamma = \frac{F}{A} = \frac{I}{A\Delta t} = \frac{1}{3}nE_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma c^2$$

eftersom n betecknar antalet fotoner per volym och E_γ energin per foton.

□

Proposition:
I ett homogent isotropt universum gäller att strålningstätheten är relaterad till skalfaktorn via sambandet

$$\rho_\gamma \propto S^{-4}.$$

Bevis:
Med $p_\gamma = \frac{1}{3}\rho_\gamma c^2$ insatt i lemma 1 erhålls

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} = -3\left(\rho_\gamma + \frac{p_\gamma}{c^2}\right)\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} = -4\rho_\gamma\frac{1}{S}\frac{dS}{dt}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = -4\frac{dS}{S}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d(ln\rho_\gamma) = -4 \cdot d(lnS) = d(lnS^{-4})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho_\gamma \propto S^{-4}.$$

□

Detta inses alternativt genom följande enkla resonemang där jag måste utgå ifrån något jag kommer att visa först lite längre fram, nämligen att ljusvåglängder töjs ut i proportion mot skalfaktorn. Detta innebär att fotonenergin, som är omvänt proportionell mot våglängden enligt $E_\gamma = hc\lambda^{-1}$ där h är Plancks konstant, kommer att avta under den kosmiska expansionen enligt $E_\gamma \propto S^{-1}$. Strålningens massekvivalent är således variabel och under antagande av konstant fotonantal gäller för fotonmasstätheten inom en volym V begränsad av S:

$$\rho_\gamma = \frac{M_\gamma}{V} = \frac{E_\gamma/c^2}{V} \propto \frac{S^{-1}}{S^3} = S^{-4}.$$

Proposition:
Friedmanns andra ekvation har följande utseende:

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -4\pi G\left(\frac{p}{c^2} + \frac{\rho}{3}\right).$$

Bevis:
Deriveras uttrycket för Friedmanns första ekvation och utnyttjas lemma 1 sid. 28 då $dS/dt \neq 0$ erhålls

$$2\frac{dS}{dt}\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(2S\frac{dS}{dt}\rho_\gamma + S^2\frac{d\rho_\gamma}{dt}\right) = -\frac{8\pi G}{3}\left(\rho_\gamma + 3\frac{p_\gamma}{c^2}\right)S\frac{dS}{dt}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_\gamma + 3\frac{p_\gamma}{c^2}\right)S$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -4\pi G\left(\frac{p_\gamma}{c^2} + \frac{\rho_\gamma}{3}\right).$$

Slutligen då även materieenergidensiteten satisfierar lemma 1 för $d\rho_\gamma/dt$ fast med $p_\gamma = 0$ kan man sätta $\rho_\gamma = \rho$ och låta ρ beteckna den sammanlagda materie-och strålningstätheten samt låta p beteckna det sammanlagda materie- och strålningstrycket, varför

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -4\pi G\left(\frac{p}{c^2} + \frac{\rho}{3}\right).$$

□

Speciellt erhålls för en nolltrycksmodell av universum med försumbart strålnings- och materietryck följande förenklade ekvation:

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3}\rho.$$

Universums utveckling styrs alltså av följande ekvationssystem

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G S^2\rho}{3} - kc^2$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right)S$$

och motsvarande nolltrycks-modeller erhålls som

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3}\rho.$$

Det är denna sista form av Friedmanns ekvationer som jag kommer att använda mig av när jag studerar olika kosmologiska modeller med $\Lambda = 0$ — Friedmanns nolltrycks-modeller.

På sin fullständiga form anges ekvationerna emellertid modifierade med en kosmologisk konstant Λ vars införande i det klassiska fallet svarar mot införandet av en repulsiv eller attraktiv (beroende på tecknet) fjäderliknande kraft. Ett $\Lambda \neq 0$ möjliggör exempelvis existensen av en rumtidkrökning även i frånvaro av materia.

Friedmanns ekvationer med Λ inkluderad kallas för **Friedmann-Lemaitres ekvationer** och har följande utseende:

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -4\pi G\left(\frac{p}{c^2} + \frac{\rho}{3}\right) + \frac{\Lambda}{3} \, .$$

Dessa ekvationer erhålls som 00-och 11-komponenterna till Einsteinekvationerna

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{c^2}g_{\mu\nu}$$

vilket jag inte går djupare in på här. Den totala energin är inte bevarad för Friedmann-Lemaitre-modellerna av universum eftersom Λ svarar mot införandet av en ny energiform.

3 KOSMOLOGISKA PARAMETRAR

Om den kosmologiska rödförskjutningen.
Studeras spektrallinjerna från en stjärna visar det sig att dessa inte ligger på samma våglängder som motsvarande laboratorielinjer. De observerade linjerna är förskjutna åt det långvågiga (röda) eller kortvågiga (blåa) hållet beroende på den relativa hastigheten mellan stjärnan och observatören.

Definition:
Om λ betecknar våglängd så definieras **den kosmologiska rödförskjutningen z** som

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}$$

där λ_{em} står för emissionslinjevåglängden och λ_{obs} för observationslinjevåglängden.

I ett expanderande universum kan rödforskjutningen inte enbart tolkas som en Dopplereffekt som beror på relativa hastigheter. Den anses istället även vara en effekt av att ljusets våglängd töjs ut då rummet mellan objekten utvidgas. Ett positivt värde på z tyder på ett expanderande universum eftersom $\lambda_{obs} > \lambda_{em}$ och ett negativt värde på z svarar mot ett kontraherande universum eftersom $\lambda_{obs} < \lambda_{em}$ enligt ovanstående definition.

Proposition:
Då alla avstånd växer proportionellt mot skalfaktorn dras även ljusvågornas våglängd ut i ett expanderande Robertson-Walker-universum enligt

$$\lambda(t) \propto S(t)$$

så länge man kan betrakta förändringen i skalfaktorn som liten jämfört med det observerade ljusets våglängd under det tidsintervall som svarar mot att en ljusvåglängd tillryggaläggs.

Bevis:
Denna proportionalitet kan härledas med Robertson-Walker-metriken under antagandet att skalfaktorn ändras mycket lite över den tidsrymd under vilken ljuset tillryggalägger en sträcka av storleksordningen en ljusvåglängd. Då ljussignaler färdas längs geodeter och metriken är rotationssymmetrisk erhålls med $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$

$$0 = d\tau^2 = dt^2 - \frac{S^2(t)}{c^2} \cdot \frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2}$$

$$\frac{dt}{S(t)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} \ .$$

Låt två vågtoppar utsända i σ_e vid tidpunkterna t_e och $t_e + \Delta t_e$ nå oss i $\sigma = 0$ vid tidpunkterna t_0 och $t_0 + \Delta t_0$. Då gäller

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{\sigma_e} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} \quad och \quad \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{S(t)} = \frac{1}{c} \int_0^{\sigma_e} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} \ .$$

Subtraktion ger

$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt}{S(t)} - \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{S(t)} = 0.$$

Då enligt antagandet $S(t) \approx$ konstant under tidsintervall av storleksordningen $\Delta t_0 \approx \Delta t_e$ erhålls därför

$$0 = \left[\frac{t}{S(t)}\right]_{t_e+\Delta t_e}^{t_0+\Delta t_0} - \left[\frac{t}{S(t)}\right]_{t_e}^{t_0} = \frac{t_0+\Delta t_0}{S(t_0)} - \frac{t_e+\Delta t_e}{S(t_e)} - \frac{t_0}{S(t_0)} + \frac{t_e}{S(t_e)} =$$

$$= \frac{\Delta t_0}{S(t_0)} - \frac{\Delta t_e}{S(t_e)} = \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{S(t_0)}{S(t_e)}$$

och då Δt svarar mot en period, dvs det tidsintervall under vilket ljuset tillryggalägger en ljusvåglängd, så ges motsvarande våglängd av $\lambda = c\Delta t$ varför

$$\lambda_0 \propto S(t_0) \quad \textit{och} \quad \lambda_e \propto S(t_e)$$

Allmänt gäller alltså

$$\lambda(t) \propto S(t).$$

□

Proposition:
Följande samband gäller i ett Robertson-Walker-universum mellan rödförskjutningen z och skalfaktorn S med $S(t_0) = 1$:

$$1 + z = \frac{1}{S(t_e)} \ .$$

Bevis:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{S(t_0) - S(t_e)}{S(t_e)} = \frac{S(t_0)}{S(t_e)} - 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$z + 1 = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{S(t_0)}{S(t_e)} = \frac{1}{S(t_e)} \ .$$

□

Objekt som observeras från tiden kring Big Bang är oändligt rödförskjutna eftersom Big Bang-modeller karakteriseras av att

$$\lim_{t \to 0} S(t) = 0$$

varför man med $1 + z = 1/S(t_e)$ erhåller

$$\lim_{t_e \to 0} (1 + z) = \lim_{t_e \to 0} \frac{1}{S(t_e)} = \infty.$$

Det av propositionen angivna sambandet mellan skalfaktorn och rödförskjutningen innebär för stora värden på z att utsändandet vid en tidpunkt t_e av den vid tidpunkten t_0 observerade strålningen skett då universum haft en z gånger mindre radie än vid observationstillfället t_0, dvs för stora värden på z gäller att rödförskjutningen är omvänt proportionell mot skalfaktorn vid tiden för emission.

Om spektrallinjerna för ett objekt har en rödförskjutning $z = 1000$ härrör alltså det observerade ljuset från en tid då universum haft en ca 1000 gånger mindre radie än vid observationstillfället. Objekt karakteriseras lämpligen med sin rödförskjutning z snarare än med sitt rumtidsavstånd ds eftersom den kosmologiska modell man väljer att beskriva universum med avgör *hur* z omvandlas till ds.

Följande parametrar är av fundamental betydelse inom kosmologin:

$$H = \frac{\dot{S}}{S} \qquad q = -\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} = -\frac{\ddot{S}}{H^2 S} \qquad \Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho$$

där H är **Hubbleparametern**, q **decelerationsparametern** och Ω **densitetsparametern**.

Lemma:
Serieutveckling av skalfaktorn ger för närbelägna källor i ett Robertson-Walker-universum

$$\frac{S}{S_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \cdots$$

där
$S_0 = S(t_0)$, t_0 observationstidpunkten, t tidpunkten vid vilken den emottagna strålningen sänts ut.

Bevis:
Denna utveckling är befogad eftersom t och t_0 i allmänhet inte skiljer sig så mycket åt om man observerar närbelägna källor

$$S(t) = S(t_0) + \dot{S}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{S}(t_0)(t - t_0)^2 + \cdots =$$

$$= S(t_0)\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \cdots\right]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{S}{S_0} = 1 + \left(\frac{\dot{S}}{S}\right)_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{S}}{S}\right)_0 (t - t_0)^2 + \cdots =$$

$$= 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \cdots$$

□

Proposition:
För rödförskjutningen i ett Robertson-Walker-universum erhålls

$$z \approx H_0(t_0 - t) + (1 + \frac{1}{2}q_0)H_0^2(t_0 - t)^2.$$

Bevis:
För rödförskjutningen z erhålls med lemmat på sid. 34 och med $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$ följande:

$$z = (S_0/S - 1) \approx [1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2]^{-1} - 1 =$$

$$= [1 - H_0(t_0 - t) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_0 - t)^2]^{-1} - 1 =$$

$$= [1 - (H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_0 - t)^2)]^{-1} - 1 \approx$$

$$\approx 1 + [H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_0 - t)^2] + [H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_0 - t)^2]^2 - 1 =$$

$$= 1 + H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_0 - t)^2 + H_0^2(t_0 - t)^2 + q_0 H_0^3(t_0 - t)^3 + \frac{1}{4}q_0^2 H_0^4(t_0 - t)^4 - 1 \approx$$

$$\approx H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t_0 - t)^2.$$

□

Proposition:
Oavsett om rödförskjutningen z betraktas som orsakad av rummets utvidgning mellan objekten eller som en Dopplereffekt z_D gäller för närliggande objekt att

$$z = z_D = \frac{v}{c} \; .$$

Bevis:
Om universums utvidgning kan anses försumbar under tidsintervallet mellan utsändande och observation av strålningen gäller då ljuskällan befinner sig på det 'egentliga' avståndet D från observatören att

$$t_0 - t = \frac{D}{c} \; .$$

Med termer upp till första ordningen i uttrycket för z på sid. 34 och med Hubbles lag $v = H_0 D$ erhålls

$$z = H_0(t_0 - t) = H_0 \cdot \frac{D}{c} = \frac{v}{c} \; .$$

Om man istället tolkar den kosmologiska rödförskjutningen som en **Dopplereffekt** kan den beräknas som

$$z_D = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1$$

vilket erhålls genom att betrakta relativa hastigheter med klassisk mekanik. För objekt som avlägsnar sig med relativt ljushastigheten c låga hastigheter, dvs för närliggande objekt, erhålls då med $v \ll c$ så att $v^2/c^2 \approx 0$ att

$$z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1 \approx \frac{v}{c} \; .$$

$\square$

Således resulterar de olika betraktelsesätten av rödförskjutningen — som Dopplereffekt respektive som en effekt av rummets utvidgning — i samma ekvation för närbelägna källor. Hubble själv betraktade rödförskjutningen som en Dopplereffekt och erhöll trovärdiga resultat av sina beräkningar just därför att han endast studerade närbelägna källor. Det man egentligen mäter i ett expanderande universum är en summa av tre sorters våglängdsförskjutningar, nämligen rödförskjutningen orsakad av våglängdsuttöjningen pga expansionen, röd-eller blåförskjutningen orsakad av objektens egenrörelser samt den gravitationella rödförskjutningen som orsakas av att ljusvåglängderna töjs ut då ljuset (som ju är en form av energi) försöker lämna ljuskällan.

Härledning av samband mellan fundamentala kosmologiska parametrar.

Alla beräkningar i detta avsnitt är baserade på nolltrycksmodeller av universum.
Enligt tidigare gäller

$$H = \frac{\dot{S}}{S} \qquad q = -\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} = -\frac{\ddot{S}}{H^2 S} \qquad \Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho.$$

Då S alltid är positivt är det uppenbart att $H > 0$ svarar mot universell expansion och att $H < 0$ svarar mot universell kontraktion. $H = 0$ svarar mot att universum är statiskt.

Ett $q > 0$ innebär att expansionen är decelererad. En decelererad expansion innebär att $\dot{S}$ är en avtagande funktion varför $\ddot{S} < 0$ och därför ger definitionen på q att $q > 0$. Ett $q < 0$ svarar mot en accelererad expansion och $q = 0$ innebär att expansionen förlöper med konstant hastighet.

För densitetsparametern Ω gäller i ett Friedmann-universum ($\Lambda = 0$)

$$\Omega = \rho/\rho_{crit} \begin{cases} < 1 & \rho < \rho_{crit} & E > 0 & k = -1 \\ = 1 & \rho = \rho_{crit} & E = 0 & k = 0 \\ > 1 & \rho > \rho_{crit} & E < 0 & k = +1 \end{cases}$$

där E betecknar universums totala energi. $\Omega < 1$ svarar mot ett hyperboliskt (öppet) universum med positiv totalenergi och därför fortsatt och evig expansion. $\Omega > 1$ svarar mot ett sfäriskt (slutet) universum med negativ totalenergi och framtida kontraktion. $\Omega = 1$ innebär att universum är plant.

Sambanden mellan ρ och k inses genom att betrakta Friedmanns första ekvation tillsammans med $\dot{S} = HS$ enligt definitionen av Hubbleparametern:

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$
$$\Leftrightarrow$$
$$kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho S^2 - \dot{S}^2 = \frac{8\pi G}{3}S^2(\rho - \rho_{crit})$$

varför $\rho > \rho_{crit}$ svarar mot $k = +1$, $\rho = \rho_{crit}$ svarar mot $k = 0$ och $\rho < \rho_{crit}$ svarar mot $k = -1$.

Jag kommer nu att härleda samband mellan några kosmologiska parametrar. Jag använder mig av Friedmanns och Friedmann-Lemaitres ekvationer och undersöker speciellt hur införandet av Λ förändrar relationerna jämfört med då $\Lambda = 0$.

Proposition:
I en nolltrycks-modell av universum gäller följande två relationer där Λ betecknar den kosmologiska konstanten:

$$\Lambda = 4\pi G\rho - 3qH^2$$
$$k = \frac{S^2}{c^2}[4\pi G\rho - H^2(q+1)].$$

Bevis:
Insättning av definitionerna på H, q och Ω i nolltrycksmodellen av Friedmann-Lemaitres andra ekvation ger

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{\ddot{S}}{SH^2} + \frac{4\pi G\rho}{3H^2} = -q + \frac{4\pi G\rho}{3H^2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Lambda = 4\pi G\rho - 3qH^2.$$

Den andra relationen ges av

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho S^2 + \frac{\Lambda S^2}{3} - kc^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}\right)S^2 - kc^2 = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{4\pi G}{3}\rho - qH^2\right)S^2 - kc^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$k = (4\pi G\rho - qH^2)\frac{S^2}{c^2} - \frac{\dot{S}^2}{c^2} = (4\pi G\rho - qH^2)\frac{S^2}{c^2} - \frac{H^2S^2}{c^2} = \frac{S^2}{c^2}[4\pi G\rho - H^2(q+1)].$$

$\square$

Ett Robertson-Walker-universum med $\Lambda = 0$ är ett Friedmann-universum och

är enligt tidigare plant om $k = 0$.
Proposition:
I ett plant Friedmann-universum har decelerationsparametern värdet $q = 1/2$ vilket svarar mot att $\Omega = 1$ så länge detta universum är icke-statiskt - dvs så länge $H = \dot{S}/S \neq 0$.

Bevis:
Med $\Lambda = 0$ i det första sambandet i föregående proposition och $k = 0$ i det andra:

$$0 = 4\pi G\rho - 3qH^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{4\pi G\rho}{H^2} = 3q$$

och

$$0 = 4\pi G\rho - H^2(q+1)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{4\pi G\rho}{H^2} = q + 1$$

varför

$$3q = q + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad q = 1/2.$$

Detta svarar mot att $\Omega = 1$ eftersom i ett universum med $\Lambda = 0$ gäller med Friedmanns första ekvation:

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$
$$\Leftrightarrow$$
$$H^2 + \frac{kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G\rho H^2}{3H^2} = \Omega H^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$kc^2 = H^2 S^2(\Omega - 1)$$

varför $k = 0$ ger $\Omega = 1$ då $H \neq 0$.

$\square$

Proposition:
Följande samband råder mellan q och Ω i en nolltrycks-modell av ett Friedmann-universum:

$$\Omega = 2q.$$

Bevis:
Insättning i Friedmanns andra ekvation med $p = 0$ ger

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G\rho}{3} = -\frac{8\pi G\rho}{3H^2} \cdot \frac{H^2}{2} = -\frac{\rho_{crit}}{\rho} \cdot \frac{H^2}{2} = -\frac{\Omega H^2}{2}$$

och definitionen på q ger

$$q = -\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} = -\frac{\ddot{S}}{S} \cdot \frac{1}{H^2} = \frac{\Omega H^2}{2} \cdot \frac{1}{H^2} = \frac{\Omega}{2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Omega = 2q.$$

$\square$

Enligt den sk **inflationshypotesen** skulle universum på mycket kort tid och under konstant täthet blåsts upp till enorma dimensioner med en extrem hastighet. Antar man en konstant energitäthet i Friedmanns ekvationer resulterar detta just i en exponentiell tillväxt av skalfaktorn — ett möjligt inflationistiskt universum. Ett inflationistiskt universum (dvs ett universum med ett tidigt inflationskkede) är vidare en Big Bang-modell och även icke-statiskt dvs $\dot{S} \neq 0$. För varje inflationistiskt universum antas oavsett utseendet på funktionen $S(t)$ gälla att

$$\lim_{t \to 0} \dot{S}(t) = \infty.$$

Inflation anses kunna lösa tre stora problem inom kosmologin, nämligen planhetsproblemet, horisontproblemet och problemet med initialvillkoren.

Problemet med initialvillkoren löses genom att universum under inflationsscenariot anses ha planats ut så till den grad att dess utseende innan denna fas kan betraktas som godtyckligt vad gäller den fortsatta utvecklingen efter inflationsfasen.

Horisontproblemet ställer frågan om hur universum kan vara så homogent och isotropt. Två motsatta ändar av universum som pga ljusets ändliga hastighet aldrig borde ha kunnat utbyta information har exakt samma temperatur (med relativa variationer av storleksordningen 10^{-5}). Med inflationshypotesen kan man visa att alla universums delar i ett tidigt skede har varit kausalt sammankopplade, trots att de idag ligger utanför varandras ljushorisont. Inflationsscenariot förklarar den universella homogeniteten genom att låta alla universums punkter vid någon tidigare tidpunkt ha befunnit sig inom en och samma horisont. Under inflationsfasen skulle sedan punkter inom en och samma horisontvolym ha expanderat förbi horisonten vilket kan ha skett om expansionshastigheten under denna fas överskridit horisontens tillväxthastighet.

Planhetsproblemet ställer frågan om hur universum kan vara så pass plant, dvs hur parametern Ω kan ligga så nära det kritiska värdet 1. Det jag kommer att visa här är att Ω i ett mycket tidigt skede måste ha haft värdet 1.

Proposition:
Densitetsparametern Ω måste i ett tidigt skede av ett inflationistiskt universums utveckling ha legat godtyckligt nära det kritiska värdet 1, dvs universum måste

i det närmaste ha varit plant för tillräckligt små värden på t.

Bevis:
Med $\dot{S} \neq 0$:
$$kc^2 = H^2 S^2(\Omega - 1)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{kc^2}{\dot{S}^2} = H^2 \frac{S^2}{\dot{S}^2}(\Omega - 1) = (\Omega - 1).$$
För ett inflationistiskt universum erhålls därför då $\lim_{t\to 0} = \infty$ att
$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{kc^2}{\dot{S}^2}\right) = \lim_{t\to 0}(\Omega - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to 0}\Omega = 1.$$
$\square$

En övre gräns för åldern t_0 av ett expanderande homogent isotropt Big Bang-universum definieras av den sk **Hubbletiden** $\tau_0 \equiv H_0^{-1}$ där H_0 betecknar det vid tiden t_0 uppmätta värdet på Hubbleparametern och $S_0 = 1$. Med $v = HD$ är det uppenbart att $H^{-1} = \frac{D}{v}$ har enheten tid. I ett universum med konstant värde H_0 på Hubbleparametern gäller att detta universums ålder ges av den motsvarande Hubbletiden τ_0.

I ett expanderande universum med positiv densitet ρ måste enligt Friedmanns andra ekvation gälla att $\ddot{S} < 0$ varför $\dot{S}$ är en avtagande funktion av tiden. Extrapolering bakåt i tiden under antagande av en konstant expansionshastighet som ges av värdet på Hubbleparametern vid tiden t_0 — dvs det största möjliga värdet på H fram till tiden t_0 eftersom $H = \dot{S}/S$ och $\dot{S}$ är en avtagande funktion och S en växande funktion av tiden — resulterar i
$$t_{max} = \frac{S(t_0)}{\dot{S}_{min}(t)} = \frac{S(t_0)}{\dot{S}(t_0)} = \frac{S(t)}{\dot{S}(t)}|_{t=t_0} = H_0^{-1}.$$

Proposition:
En sluten ($k = +1$) Friedmannsk nolltrycks-Big Bang-modell med $\Lambda = 0$ har en ålder t_0 given av
$$t_0 = H_0^{-1}\frac{q_0\pi}{(2q_0 - 1)^{3/2}} = \frac{\tau_0 q_0 \pi}{(2q_0 - 1)^{3/2}}$$
där H_0 är Hubbleparametern, q_0 decelerationsparametern och 0-indexeringen avser de vid observationstillfället uppmätta värdena.

Bevis:
Universums nuvarande ålder t_0 kan beräknas ur

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{S_0} \frac{dS}{\dot{S}} = \tau_0 \int_0^1 \frac{dx}{(2q_0/x + 1 - 2q_0)^{1/2}}$$

där $\tau_0 = H_0^{-1}$, $x = S/S_0$ och $dx = dS/S_0$.
Integranden erhålls med hjälp av uttrycken:

$$\dot{S}^2 = 8\pi G\rho_0 S_0^3/3S - kc^2$$

$$H(t) = \dot{S}(t)/S(t)$$

$$q(t) = -S(t)\ddot{S}(t)/\dot{S(t)}^2$$

$$\Omega(t) = 8\pi G\rho(t)/3H^2(t)$$

$$kc^2 = S^2H^2(2q-1)$$

$$\Omega = 2q$$

som ger

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} - kc^2 = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3 H_0^2}{3SH_0^2} - H_0^2 S_0^2(2q_0 - 1) =$$

$$= H_0^2 S_0^2\left(\frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \cdot \frac{S_0}{S} + 1 - 2q_0\right) = H_0^2 S_0^2(2q_0/x + 1 - 2q_0)$$

varför med $\dot{S} > 0$ under expansionsfasen

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{S_0} \frac{dS}{\dot{S}} = \frac{1}{H_0 S_0}\int_0^{S_0} \frac{dS}{\sqrt{2q_0/x + 1 - 2q_0}} =$$

$$= \tau_0 \int_0^{S_0} \frac{dS}{S_0\sqrt{2q_0/x + 1 - 2q_0}} = \tau_0 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2q_0/x + 1 - 2q_0}}.$$

För att beräkna åldern i det slutna fallet $k = +1$ som i ett universum med $\Lambda = 0$ enligt tidigare (sid. 36) svarar mot att $q_0 > 1/2$ utnyttjas substitutionen

$$x = \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)} \cdot sin^2\theta.$$

Beräkning av t_0 i fallet $q_0 > 1/2$ ger nu

$$x = \frac{2q_0}{2q_0 - 1} \cdot sin^2\theta \Rightarrow dx = \frac{2q_0}{2q_0 - 1} \cdot 2sin\theta cos\theta d\theta$$

där $\theta \in [0, \pi/2]$.
Insättning ger

$$t_0 = \tau_0 \int_0^1 \frac{dx}{(2q_0/x + (1 - 2q_0))^{1/2}} = \tau_0 \int_0^1 \frac{dx}{(2q_0/x - 2q_0 sin^2\theta/x)^2} =$$

$$= \tau_0 \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2q_0}{x}(1-sin^2\theta)\right)^{1/2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{2q_0}} \int_0^1 \frac{x^{1/2}dx}{\sqrt{1-sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{\tau_0}{\sqrt{2q_0}} \int_0^1 \frac{(\sqrt{2q_0}sin\theta/\sqrt{2q_0-1})[4q_0 sin\theta cos\theta d\theta/(2q_0-1)]}{cos\theta} = \frac{4q_0\tau_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} sin^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{4q_0\tau_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1-cos2\theta}{2} d\theta = \frac{2q_0\tau_0}{(2q_0-1)^{3/2}} \left([\theta]_0^{\pi/2} - [\frac{sin2\theta}{2}]_0^{\pi/2} \right) = \tau_0 \cdot \frac{q_0\pi}{(2q_0-1)^{3/2}}$$

där $\tau_0 = H_0^{-1}$.

□

Lemma:
I ett Friedmann-Lemaitre-nolltrycksuniversum med $\Lambda \neq 0$ gäller följande relation:

$$H^2(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{S^2} - \frac{\Lambda}{3} \; .$$

Bevis:
Med Friedmann-Lemaitres första ekvation erhålls

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$H^2 + \frac{kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G \rho H^2}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3} = \Omega H^2 + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$H^2(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{S^2} - \frac{\Lambda}{3} \; .$$

□

Jämför detta med motsvarande relation på sid. 39 som gäller i ett Friedmann-universum. I ett universum med $\Lambda \neq 0$ karakteriseras det plana fallet alltså inte längre av parametervärdena $k = 0$, $\Omega = 1$ och $q = 1/2$. Universums geometriska struktur kan inte längre avgöras genom att känna till enbart H och Ω utan man måste även antingen känna till Λ eller någon annan parameter relaterad till denna på ett känt sätt. Då den kosmologiska konstanten förändrar relationen mellan k och Ω förändrar den därmed de tidigare kriterierna på slutenhet/öppenhet i universum. Därför kan det mycket väl tänkas att ett universum med $\rho < \rho_{crit}$ trots allt är slutet om bara $\Lambda > 0$ vilket visas i följande proposition.

Proposition:
Med $k \geq 0$ gäller följande relation i ett Friedmann-Lemaitre-nolltrycks-universum:

$$\Omega \geq 1 - \frac{\Lambda}{3H^2} \; .$$

Bevis:
Med $k \geq 0$ erhålls med hjälp av det nyss härledda lemmat sambandet:

$$H^2(\Omega - 1) = \frac{kc^2}{S^2} - \frac{\Lambda}{3} \geq -\frac{\Lambda}{3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Omega \geq 1 - \frac{\Lambda}{3H^2} \; .$$

$\square$

4 FRIEDMANN-MODELLER

Alla kosmologiska modeller behandlade här är baserade på antagandet av en **kosmologisk princip** som innebär att universum är **homogent** och **isotropt** för alla observatörer vid varje given tidpunkt. Ett par modeller (bla stationära tillståndets) utgår ifrån en **perfekt kosmologisk princip** enligt vilken universum är homogent och isotropt även under alla **tider**.

Den mest allmänna metrik som satisfierar den kosmologiska principen är Robertson-Walker-metriken. De här behandlade kosmologiska modellerna är baserade på denna metrik tillsammans med Friedmanns ekvationer och kallas därför **Friedmann-Robertson-Walker-modellerna**, eller kort **FRW-modellerna** vilka betraktas som kosmologins standardmodeller.

Att universum måste vara homogent och isotropt för alla observatörer behöver inte betyda att det måste vara oändligt i utsträckning. Man skulle kunna tänka sig att en observatör på ett ändligt universums 'rand' skulle observera ett icke-isotropt universum, men man ju kan ha ett universum som är ändligt i utsträckning och ändå saknar rand, som tex i fallet med en observatör som befinner sig på 2-dimensionella sfären i $\mathbf{R}^3$.

Jag kommer enbart att behandla de sk nolltrycksmodellerna av universum. Dessa modeller är materiedominerade modeller i vilka materians slumpmässiga rörelser kan försummas. Det gäller därför att man kan sätta både strålnings- och materietrycket till noll i en sådan modell. Ett sådant försummande av strålningen är berättigat om man vill utveckla en modell för universum under ett inte alltför tidigt utvecklingsskede. Det gäller vidare att Hubbles lag följs exakt av varje partikel i en sådan modell.

I det fall de slumpmässiga rörelserna inte kan försummas har man att göra med sk kontinuum-modeller som blir mycket mer komplexa än de modeller jag behandlar här.

De olika kosmologiska standardmodellerna skiljer sig åt först på avstånd så stora att Hubbles lag inte längre är linjär ty först på så stora avstånd uppträder effekter som beror på universums geometriska struktur k och på den kosmologiska konstanten Λ. Ur Friedmann-Lemaitres ekvationer kan man nämligen utläsa att både den kosmologiska konstanten och krökningens karaktär har försumbar inverkan på universums utveckling för små värden på skalfaktorn.

Rumtidkrökningen K är i enlighet med antagandena om isotropi och homogenitet konstant i rummet vid en given tidpunkt t. K kan emellertid mycket väl vara icke-konstant i tiden. Detta är exempelvis fallet för ett expanderande universum där ingen materieproduktion sker, eftersom ett sådant universum tunnas ut varför K blir en avtagande funktion av tiden.

Modeller med kosmologisk konstante$\Lambda = 0$ kallas med ett samlingsnamn för **Friedmann-modeller** och modeller med $\Lambda \neq 0$ för **Lemaitre-modeller**.
Jag undersöker nu modeller med $\Lambda = 0$. Dessa Friedmannska modellerna erhålls

genom att för olika värden på de i Friedmanns ekvationer ingående parametrarna lösa dessa ekvationer. Med $k = -1, 0, +1$ och $\rho > 0$ eller $\rho = 0$ finns sex kombinationsmöjligheter. Fallet $k = +1, \rho = 0$ behandlas inte då det leder till en imaginär expansionshastighet och därför saknar lösning. Fallet $\rho < 0$ behandlas inte heller eftersom det saknar fysikalisk motsvarighet.

Friedmanns första ekvation tillsammans med massbevaringsvillkoret för ett materiedominerat universum

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad och \qquad \rho = \rho_0 \frac{S_0^3}{S^3}$$

resulterar i

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 S_0^3}{3S} - kc^2$$

och det är detta uttryck jag kommer att använda mig av för beräkningarna i detta avsnitt. Det är uppenbart att om $\rho_0 > 0$ så gäller eftersom S och S_0 är positiva att

$$\dot{S}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G \rho_0 S_0^3}{3S} > 0.$$

Om skalfaktorn antar ett maximalt värde gäller vid någon tidpunkt att $\dot{S} = 0$ varför $k > 0$ då ρ_0. Då k är konstant under alla tider för en given modell måste gälla att $k = +1$. En Friedmann-modell med positivt energiinnehåll i vilken skalfaktorn antar ett maximalt värde måste vara positivt krökt.

På liknande sätt inses att Friedmann-modeller för vilka $\dot{S} > 0 \ \forall t$ måste vara modeller med $k = 0$ eller $k = -1$. För dessa två fall gäller vidare enligt ovanstående ekvation att $k = 0 \Rightarrow \dot{S} \to 0$ då $t \to \infty$ samt att $k = -1 \Rightarrow \dot{S} \to$ *konst* då $t \to \infty$ eftersom $S \to \infty$ då $t \to \infty$.

Modellerna jag undersöker här är vidare alla **Big Bang-modeller** för vilka antas gälla

$$\lim_{t \to 0} S(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to 0} \rho(t) = \infty$$

eftersom $\rho(t) \propto S^{-3}(t)$.

Modeller med $\rho_0 = 0$ kallas **tomma modeller** eftersom dessa uppenbarligen saknar både materia och strålning.

Proposition:
Skalfaktorn har följande utseende i de materiedominerade Friedmann-modellerna:
Fall 1: $k = 0, \rho_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = konst.$

Fall 2: $k = -1, \rho_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \pm ct.$

Fall 3: $k = 0, \rho_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad S \propto t^{2/3}.$

Fall 4: $k = +1, \rho_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4\pi G\rho_0}{3}(1 - cosy)$.

Fall 5: $k = -1, \rho_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4\pi G\rho_0}{3}(coshy - 1)$.

Bevis:
Skalfaktorn har följande utseende i de materiedominerade Big Bang-modellerna ($S(0) = 0$ och $\Lambda = 0$):
Fall 1:
$k = 0,\ \rho_0 = 0$

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} - kc^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\dot{S} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S(t) = konst.$$

En **tom plan modell** är således **statisk**.

Fall 2:
$k = -1,\ \rho_0 = 0$:

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} - kc^2 = c^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$dS = \pm c dt$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S(t) = \pm ct.$$

En **tom hyperbolisk/öppen Minkowski-modell** expanderar eller kontraherar **monotont**.

Fall 3:
$k = 0,\ \rho_0 > 0$

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S^{1/2} dS = \pm \left(\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3} \right)^{1/2} dt.$$

Integration med $S(0) = 0$ i expansionsfallet med $\dot{S} > 0$ ger

$$\int_0^S S^{1/2} dS = \left(\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3} \right)^{1/2} \int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}S^{3/2} = \left(\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3}\right)^{1/2} t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S(t) = (6\pi G\rho_0 S_0^3)^{1/3} t^{2/3}$$

$$\Rightarrow$$

$$S(t) \propto t^{2/3}.$$

Detta är ett **plant Einstein-de Sitter-universum** som expanderar **monotont** med en avtagande hastighet som ges av

$$\dot{S}(t) \propto t^{-1/3}$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} \dot{S}(t) = 0.$$

För de återstående fallen med $\rho_0 > 0$ och $k = \pm 1$:

$$dS = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} \pm c^2} dt$$

erhålls följande lösningar på parameterform med $c = S_0 = 1$ (se även sid. 45):

Fall 4:

$k = +1,\ \rho_0 > 0$

$$\begin{cases} S = \frac{4\pi G\rho_0}{3}(1 - cosy) \\ t = \frac{4\pi G\rho_0}{3}(y - siny). \end{cases}$$

Avsätter man skalfaktorn som funktion av tiden erhålls alltså en **cykloid**. Detta är en **sfärisk/sluten oscillerande modell**.

Fall 5:

$k = -1,\ \rho_0 > 0$

$$\begin{cases} S = \frac{4\pi G\rho_0}{3}(coshy - 1) \\ t = \frac{4\pi G\rho_0}{3}(sinhy - y). \end{cases}$$

Hyperbolisk/öppen expanderande modell.

Illustration:

Proposition:
Hubbleparametern och decelerationsparametern har följande värden i modellerna svarandes mot fall 2 med $k = -1$ och $\rho_0 = 0$:

$$H = \frac{1}{t}$$
$$q = 0$$

varför expansionen förlöper med konstant hastighet.
Bevis:

$$S(t) = ct \Rightarrow \dot{S}(t) = c \Rightarrow H(t) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \frac{1}{t}$$
$$\ddot{S}(t) = 0 \Rightarrow q = \frac{\ddot{S}S}{\dot{S}^2} = 0$$

Proposition:
Hubbleparametern och decelerationsparametern har följande värden i en modell svarandes mot fall 3 med $k = 0$ och $\rho_0 > 0$ (Einstein de Sitters plana universum):

$$H = \frac{2}{3t}$$
$$q = 1/2$$

där τ är den tidigare definierade Hubbletiden.
Bevis:

$$S(t) = t^{2/3} \Rightarrow \dot{S}(t) = \frac{2}{3}t^{-1/3} \Rightarrow H(t) = -\frac{dotS(t)}{S(t)} = \frac{2}{3t}$$

och med $\tau = H^{-1}$ erhålls

$$t = \frac{2}{3H} = \frac{2}{3}\tau$$

$$\ddot{S}(t) = -\frac{2}{9}t^{-4/3} \Rightarrow q = -\frac{\ddot{S}S}{\dot{S}^2} = 1/2$$

Einstein-de Sitters plana universum har därför en övre begränsning på sin ålder t_0 given av

$$t_0 \leq \frac{2}{3H_0} = \frac{2}{3}\tau_0$$

För ett universum av typen **fall 4** med $k = +1$ och $\rho_0 > 0$ gäller att det finns ett värde på tiden ($\frac{1}{2}t_{max}$) och ett värde (S_{max}) på skalfaktorn för vilka $\dot{S} = 0$, dvs för vilka expansionen avstannar. Expansionen omvänds i en kontraktion vid den tidpunkt $\frac{1}{2}t_{max}$ som svarar mot värdet S_{max} på skalfaktorn.

Proposition:
Det maximala värdet på skalfaktorn S_{max} samt livstiden t_{max} för ett materiedominerat universum med massa M av typen **fall 4**, dvs $k = +1$, $\rho_0 > 0$ och $\Lambda = 0$ ges av

$$S_{max} = \frac{4MG}{3\pi c^2} \quad och \quad t_{max} = \frac{4MG}{3c^3}$$

där S_{max} svarar mot tiden $t = \frac{1}{2}t_{max}$ eftersom cykloidkurvan är symmetrisk kring det värde på $t = \frac{1}{2}t_{max}$ för vilket $\dot{S} = 0$.

Bevis:
Med $\dot{S} = 0$ och $k = +1$ i Friedmanns första ekvation erhålls

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{c^2}{S_{max}^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S_{max}^{-2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho.$$

Med den maximala volymen för ett positivt krökt universum enligt tidigare erhålls medeldensiteten som

$$\rho = M/V_{max} = M/(2\pi^2 S_{max}^3)$$

varför

$$S_{max}^{-2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \cdot \frac{M}{2\pi^2 S_{max}^3} = \frac{4MG}{3\pi c^2} \cdot \frac{1}{S_{max}^3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S_{max} = \frac{4MG}{3\pi c^2}\ .$$

Beräkning av $t_{max}/2$ med $\dot{S} > 0$ som svarar mot expansionsfallet (pga cykloidkurvans symmetri hade det emellertid gått lika bra att utföra beräkningen i kontraktionsfallet):

$$\frac{\dot{S}^2 + c^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho S^2 - c^2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho S^2 - c^2}} dS.$$

Integration ger

$$\frac{1}{2}t_{max} = \int_0^{t_{max}/2} dt = \frac{1}{c}\int_0^{S_{max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\rho S^2 - 1}} dS = \frac{1}{c}\int_0^{S_{max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\frac{S^2 M}{2\pi^2 S^3} - 1}} dS =$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^{S_{max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{4MG}{3\pi c^2 S} - 1}} dS = \frac{1}{c}\int_0^{S_{max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{S_{max}}{S} - 1}} dS = \frac{1}{c\sqrt{S_{max}}}\int_0^{S_{max}} \frac{\sqrt{S}dS}{\sqrt{1 - \frac{S}{S_{max}}}} .$$

Med substitutionen

$$S = S_{max} sin^2\theta \qquad \Rightarrow \qquad dS = 2S_{max} sin\theta cos\theta d\theta$$

där $\theta \in [0, \pi/2]$ erhålls

$$\frac{1}{2}t_{max} = \frac{1}{c\sqrt{S_{max}}}\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{S_{max}} sin\theta \cdot 2S_{max} sin\theta cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - sin^2\theta}} = \frac{2S_{max}}{c}\int_0^{\pi/2} sin^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{2S_{max}}{c}\int_0^{\pi/2} (\frac{1 - cos2\theta}{2}) d\theta = \frac{2S_{max}}{c}[\frac{\theta}{2}]_0^{\pi/2} - \frac{2S_{max}}{c}[\frac{sin2\theta}{4}]_0^{\pi/2} =$$

$$= S_{max} \cdot \frac{\pi}{2c} = \frac{4MG}{3\pi c^2} \cdot \frac{\pi}{2c} = \frac{2MG}{3c^3}$$

varför

$$S_{max} = \frac{4MG}{3\pi c^2} \quad och \quad t_{max} = \frac{4MG}{3c^3} .$$

□

Både utsträckning och livstid ökar alltså för ökat materieinnehåll i en positivt krökt icke-tom Friedmann-modell.

UNIVERSUMS ÅLDER.

Proposition:
Ett icke-tomt ($\rho > 0$) materiedominerat Friedmann-universum av Big Bang-typ har följande ålder t uttryckt i detta universums materiedensitet och skalfaktor:

$$t = \begin{cases} \frac{S_m}{c}\left[arcsin\sqrt{\frac{S}{S_m}} - \sqrt{\frac{S}{S_m}\left(1-\frac{S}{S_m}\right)}\right] & k=+1 \\ \frac{2S_m}{3c}\left(\frac{S}{S_m}\right)^{3/2} & k=0 \\ \frac{S_m}{c}\left[\sqrt{\frac{S}{S_m}\left(1+\frac{S}{S_m}\right)} - arcsinh\sqrt{\frac{S}{S_m}}\right] & k=-1 \end{cases}$$

där $S = S(t)$ och $S_m = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3c^2}$ är konstant.

Bevis:
Ett materiedominerat universum med $\Lambda = 0$ och $\rho > 0$ är en Big Bang-modell eftersom $\lim_{t\to 0} S(t) = 0$ varför följande tidsintegral erhålls vid beräkningen av ett sådant universums ålder:

$$t = \int_0^{S(t)} \frac{dS}{\sqrt{\dot{S}}} = \int_0^{S(t)} \frac{dS}{\sqrt{8\pi G\rho_0 S_0^3/3S - kc^2}} = \frac{1}{c}\int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{S_m}{S} - k}}$$

där

$$S_m = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3c^2}\ .$$

Fallet $k = 0$**:**

$$t = \frac{1}{c}\int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{S_m}{S} - k}} = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\int_0^S \sqrt{S}dS = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\cdot\left[\frac{2S^{3/2}}{3}\right]_0^S = \frac{2S^{3/2}}{3c\sqrt{S_m}} = \frac{2S_m}{3c}\left(\frac{S}{S_m}\right)^{3/2}.$$

Fallet $k = +1$**:**

$$t = \frac{1}{c}\int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{S_m}{S} - k}} = \frac{1}{c}\int_0^S \frac{\sqrt{S/S_m}dS}{\sqrt{\frac{S}{S_m}}\sqrt{\frac{S_m}{S} - 1}} = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\int_0^S \frac{\sqrt{S}dS}{\sqrt{1-\frac{S}{S_m}}}\ .$$

Med substitutionen

$$S = S_m\cdot sin^2\theta \qquad \Rightarrow \qquad dS = 2S_m sin\theta cos\theta d\theta$$

och

$$S\in[0,S] \qquad \Rightarrow \qquad \theta\in[0, arcsin\sqrt{S/S_m}]$$

erhålls

$$t = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\int_0^S \frac{\sqrt{S}dS}{\sqrt{1-\frac{S}{S_m}}} = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\int_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}} \frac{\sqrt{S_m}\cdot sin\theta\cdot 2S_m sin\theta cos\theta d\theta}{\sqrt{1-sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{2S_m}{c}\int_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}} sin^2\theta d\theta = \frac{S_m}{c}\int_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}}(1-cos2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{S_m}{c}[\theta]_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}} - \frac{S_m}{c}\left[\frac{sin2\theta}{2}\right]_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}} = \frac{S_m}{c}[\theta]_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}} -$$

$$-\frac{S_m}{c}[sin\theta cos\theta]_0^{arcsin\sqrt{S/S_m}} = \frac{S_m}{c}\left[arcsin\sqrt{\frac{S}{S_m}} - \sqrt{\frac{S}{S_m}\left(1-\frac{S}{S_m}\right)}\right]$$

eftersom

$$sin\theta = sin\big(arcsin\sqrt{S/S_m}\big) = \sqrt{S/S_m} \qquad cos\theta = \sqrt{1-sin^2\theta} = \sqrt{1-S/S_m}$$

$$\Rightarrow \quad sin\theta cos\theta = \sqrt{\frac{S}{S_m}}\cdot\sqrt{1-\frac{S}{S_m}} = \sqrt{\frac{S}{S_m}(1-\frac{S}{S_m})}\ .$$

Fallet $k=-1$**:**

$$t = \frac{1}{c}\int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{S_m}{S}+1}} = \frac{1}{c}\int_0^S \frac{\sqrt{S/S_m}dS}{\sqrt{\frac{S}{S_m}}\sqrt{\frac{S_m}{S}+1}} = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\int_0^S \frac{\sqrt{S}dS}{\sqrt{1+\frac{S}{S_m}}}\ .$$

Med substitutionen

$$S = S_m\cdot sinh^2\theta \quad \Rightarrow \quad dS = 2S_m sinh\theta cosh\theta d\theta$$

och

$$S\in[0,S] \quad \Rightarrow \quad \theta\in[0, arcsinh\sqrt{S/S_m}]$$

erhålls

$$t = \frac{1}{c\sqrt{S_m}}\int_0^S \frac{\sqrt{S}dS}{\sqrt{1+\frac{S}{S_m}}} = \cdots = \frac{2S_m}{c}\int_0^{arcsinh\sqrt{S/S_m}} sinh^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{S_m}{c}\int_0^{arcsinh\sqrt{S/S_m}}(cosh2\theta-1)d\theta = -\frac{S_m}{c}[\theta]_0^{arcsinh\sqrt{S/S_m}} + \frac{S_m}{c}\left[\frac{sinh2\theta}{2}\right]_0^{arcsinh\sqrt{S/S_m}} =$$

$$= -\frac{S_m}{c}[\theta]_0^{arcsinh\sqrt{S/S_m}} + \frac{S_m}{c}[cosh\theta sinh\theta]_0^{arcsinh\sqrt{S/S_m}} =$$

$$= \frac{S_m}{c}\left[\sqrt{\frac{S}{S_m}\left(1+\frac{S}{S_m}\right)} - arcsinh\sqrt{\frac{S}{S_m}}\right]$$

eftersom

$$sinh^2\theta = \frac{1}{4}(e^\theta - e^{-\theta})^2 = \frac{1}{4}e^{2\theta} + \frac{1}{4}e^{-2\theta} - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{2\theta}+e^{-2\theta}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cosh2\theta = \frac{cosh2\theta - 1}{2}$$

och

$$\frac{sinh 2\theta}{2} = \frac{1}{4}(e^{2\theta} - e^{-2\theta}) = \frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) = cosh\theta sinh\theta$$

och

$$sinh\theta = sinh(arcsinh\sqrt{S/S_m}) = \sqrt{S/S_m}$$

$$cosh\theta = \sqrt{1 + sinh^2\theta} = \sqrt{1 + S/S_m}$$

$$\Rightarrow \quad sinh\theta cosh\theta = \sqrt{\frac{S}{S_m}} \cdot \sqrt{1 + \frac{S}{S_m}} = \sqrt{\frac{S}{S_m}\left(1 + \frac{S}{S_m}\right)}\,.$$

$\square$

5 LEMAITRE-MODELLER

5.1 OM DEN KOSMOLOGISKA KONSTANTEN

Den **kosmologiska konstanten** Λ infördes av Einstein för att motverka den expansion som annars uppträder i lösningarna till fältekvationerna. För att erhålla en **statisk lösning** — ett sk **Einsteinskt universum** — lade han till en attraktivt verkande term, $\Lambda < 0$, som var avpassad till att motverka den ur ekvationerna resulterande expansionen.

Det visar sig att den kosmologiska konstanten på stora avstånd modifierar gravitationslagen till en repulsiv eller attraktiv kraft direkt proportionell mot avståndet enligt $F = \Lambda r$. Då man inte märker av någon sådan effekt i mindre skala kan man sluta sig till att Λ måste vara mycket litet (uppskattningsvis ca 10^{-54}) och att kraften därför kan ge märkbar effekt först på avstånd av samma storleksordning som universum självt, eftersom det enda kända systemet med en massdensitet av samma storleksordning som vakuumenergin är just universum självt.

För att universum skall vara statiskt så som Einstein ville ha det erhålls med $S(t) = konst$ att $\ddot{S} = 0$ varför Friedmanns andra ekvation ger

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p = -\rho c^2/3$$

dvs ett positivt värde på densiteten resulterar i ett negativt tryck. Detta föranledde Einstein att korrigera ekvationerna med en kosmologisk konstant $\Lambda < 0$.

Jag kommer i detta avsnitt att arbeta med de fullständiga **Friedmann-Lemaitre-ekvationerna** som även inkluderar den kosmologiska konstanten. Dessa ges av

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}$$

I ett Friedmann-universum ($\Lambda = 0$) kommer universum att tunnas ut alltmer under expansionen eftersom medelavståndet mellan de innehållna partiklarna ökar (såvida ingen nettoproduktion av materia sker). Då potentiell energi definieras som negativ och som omvänt proportionell mot medelavståndet mellan partiklarna — för varje par av partiklar — gäller att beloppet av universums potentiella (här gravitationella) energi avtar under expansionsfasen, dvs den potentiella energin blir allt mindre negativ och ökar därför. Pga kravet om energibevaring, $E_{pot} + E_{kin} = konst$, leder detta till att den kinetiska energin, som driver expansionen och är definierad som positiv, också måste minska i belopp varför expansionen saktar av. Det gäller alltså att expansionen saktar av i ett Friedmann-universum pga kravet på energibevaring.

Genom att studera Friedmann-Lemaitres ekvationer inser man att $\Lambda > 0$ verkar som en **positiv energidensitet** och att $\Lambda < 0$ verkar som en **negativ energidensitet**. Det gäller alltså att $\Lambda > 0$ verkar som en **repulsiv kraft** och $\Lambda < 0$ som en **attraktiv kraft**.

Till skillnad från vad man skulle tro verkar inte den tillförda positiva energidensiteten $\Lambda > 0$ graviterande utan snarare som en repulsiv kraft som accelererar upp expansionen. Detta beror på att man vid införandet av Λ antar existensen av en fix sk **vakuumenergi**. Ett $\Lambda > 0$ antas svara mot en positiv sådan vakuumenergi. Allteftersom universum expanderar fylls det automatiskt ut med denna vakuumenergi som driver på expansionen ytterligare. I ett sådant universum är den totala energin, vakuumenergin inkluderad, inte bevarad eftersom universum tillförs 'gratis' vakuumenergi under det att expansionen fortgår.

Ett $\Lambda < 0$ verkar å andra sidan decelererande på expansionen eftersom det svarar mot införandet av negativ, och därmed potentiell (graviterande), energi.

Om $\Lambda > 0$ i Friedmann-Lemaitres första ekvation

$$\dot{S}^2 = \frac{8\pi G \rho_0 S_0^3}{3S} + \frac{\Lambda S^2}{3} - kc^2$$

erhålls för tillräckligt stora värden på S oberoende av k

$$\dot{S}^2 \propto \frac{\Lambda S^2}{3} \quad \Rightarrow \quad S \propto e^{\pm\sqrt{\Lambda/3}t} .$$

Detta innebär att expansionen accelereras upp för stora värden på t. Modellerna med $\Lambda > 0$ och $k = 0, -1$ skiljer sig således från de med $\Lambda = 0$ och $k = 0, -1$ med evig och avtagande expansion endast i den **accelererade expansion** som uppträder för stora värden på t då $\Lambda > 0$. Det kommer att visa sig att modeller med $\Lambda > 0$ och $k = +1$ också slutar i evig och slutligen accelererad expansion om $\Lambda > \Lambda_c$ för något kritiskt värde Λ_c på Λ.

Proposition:
Ett statiskt Einstein-universum med $k = 0$ är tomt såvida inte $\Lambda \neq 0$.

Bevis:
För ett statiskt Einstein-universum med $S = konst$, $k = 0$ och $\Lambda = 0$ erhålls med Friedmann-Lemaitres första ekvation

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\rho = 0$$

— alltså ett tomt universum.

□

Genom att införa den kosmologiska konstanten erhålls för detta universum istället med samma villkor på k och S

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\Lambda}{8\pi G} = -\rho$$

där $-\rho$ definieras som **vakuumenergidensiteten**. Ett negativt värde på Λ resulterar alltså i ett positivt energiinnehåll i detta statiska Einstein-universum, vilket ju är ett rimligt skäl till att välja $\Lambda < 0$ i en sådan modell.

För en statisk modell ($\dot{S} = 0$) med $k \neq 0$ och $\Lambda = 0$ erhålls med Friedmann-Lemaitres ekvationer

$$\frac{kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho = -\frac{8\pi G}{c^2}p \qquad (*)$$

dvs det måste gälla att $k = +1$ i $(*)$ om man ska ha en positiv energidensitet. Detta leder emellertid till ett negativt tryck $p = -\rho c^2/3$ vilket kan korrigeras för med en negativ kosmologisk konstant $\Lambda < -\frac{3c^2}{S^2}$ enligt nedan så att både ρ och p blir positiva:

$$0 < \frac{c^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{8\pi G}{c^2}p.$$

Med $k = -1$ i $(*)$ erhålls ett positivt materietryck men däremot en negativ energidensitet varför införandet av $\Lambda < 0$ enligt nedan gör ρ positivt:

$$0 > -\frac{c^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{8\pi G}{c^2}p.$$

Jag studerar nu skalfaktorns uppförande och beräknar åldern för olika materiedominerade nolltrycks-modeller av Lemaitre-typ. Modellerna är baserade på Friedmann-Lemaitres ekvationer tillsammans med massbevaringsvillkoret under materiedominans

$$\rho = \rho_0 \frac{S_0^3}{S^3}\ .$$

För universums expansionshastighet erhålls med Friedmann-Lemaitres första ekvation

$$\dot{S}^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)S^2(t) - kc^2 + \frac{\Lambda S^2(t)}{3} = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S(t)} - kc^2 + \frac{\Lambda S^2(t)}{3} = G(S)$$

varur ett tidsintervall beräknas som

$$t - t_1 = \int_{S(t_1)}^{S(t)} \frac{dS}{\sqrt{G(S)}} \ .$$

Tidsintegralen ovan kan i det allmäna fallet uppskattas med elliptiska funktioner. Här undersöker jag emellertid skalfaktorn kvalitativt och utvecklar därefter detaljerna för några specialfall som nu följer.

Det kommer att visa sig att $\Lambda \neq 0$ inte nödvändigtvis innebär att

$$lim_{t\to 0} S(t) = 0$$

dvs en modell med $\Lambda \neq 0$ behöver inte nödvändigtvis inledas med en Big Bang.

5.2 DEN MODIFIERADE PLANA MODELLEN

Jag behandlar nu modeller med $k = 0$ och $\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$ och $\Lambda > 0$. Med $\Lambda = 0$ kallas modeller med $k = 0$ för plana modeller. Då $\Lambda \neq 0$ visar det sig att modellerna med $k = 0$ inte längre är plana i den meningen att energidensiteten inte längre antar det kritiska värdet varför $\Omega \neq 1$. Det kommer exempelvis att visa sig att införandet av ett $\Lambda < 0$ 'sluter' ett universum med $k = 0$ varför detta inte längre kan betraktas som plant. I ett plant universum råder ju exakt balans mellan den potentiella (graviterande) energin och den kinetiska (expansionella) energin. I ett slutet universum däremot överstiger den förra energitypen den senare.

Proposition:
Tidsintegralen med $k = 0$

$$t = \int_0^t dt = \int_0^S \frac{dS}{\dot{S}} = \int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} + \frac{\Lambda S^2}{3}}}$$

har följande lösningar

$$t = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3|\Lambda|}} \cdot arcsin\left[\sqrt{\frac{|\Lambda|}{8\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}\right] & \Lambda < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2} & \Lambda = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \cdot arcsinh\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{8\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}\right] & \Lambda > 0 \end{cases}$$

och ur dessa erhålls de explicita uttrycken för skalfaktorn som

$$S(t) = \begin{cases} S_0\big(\frac{8\pi G\rho_0}{|\Lambda|}\big)^{1/3} sin^{2/3}\big(\frac{\sqrt{3|\Lambda|}}{2} \cdot t\big) & \Lambda < 0 \\ S_0(6\pi G\rho_0)^{1/3} \cdot t^{2/3} & \Lambda = 0 \\ S_0\big(\frac{8\pi G\rho_0}{\Lambda}\big)^{1/3} sinh^{2/3}\big(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \cdot t\big) & \Lambda > 0\,. \end{cases}$$

Illustration:

Bevis:

$\Lambda = 0$:

$$t = \int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi G\rho_0 S_0^3}} \int_0^S \sqrt{S} dS = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi G\rho_0 S_0^3}} \left[\frac{2}{3} S^{3/2}\right]_0^S = \frac{1}{\sqrt{6\pi G\rho_0}} \left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}$$

$\Lambda < 0$:

$$t = \int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} + \frac{\Lambda S^2}{3}}} = \int_0^S \frac{\sqrt{\frac{3S}{8\pi G\rho_0 S_0^3}} dS}{\sqrt{\frac{3S}{8\pi G\rho_0 S_0^3}} \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S} + \frac{\Lambda S^2}{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0 S_0^3}} \int_0^S \frac{\sqrt{S} dS}{\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{8\pi G\rho_0} \left(\frac{S}{S_0}\right)^3}} .$$

Med substitutionen

$$\frac{-\Lambda}{8\pi G\rho_0} \left(\frac{S}{S_0}\right)^3 = s^2 \quad \Leftrightarrow \quad S = S_0 \left(\frac{8\pi G\rho_0}{\Lambda}\right)^{1/3} s^{2/3} \quad \Rightarrow \quad dS = S_0 \left(\frac{8\pi G\rho_0}{\Lambda}\right)^{1/3} \frac{2}{3} s^{-1/3} ds$$

erhålls

$$t = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0 S_0^3}} \int_0^S \frac{\sqrt{S} dS}{\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{8\pi G\rho_0} \left(\frac{S}{S_0}\right)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0 S_0^3}} \int_0^{\sqrt{\frac{|\Lambda|}{8\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{S_0}\left(\frac{8\pi G\rho_0}{|\Lambda|}\right)^{1/6} \cdot s^{1/3} S_0 \left(\frac{8\pi G\rho_0}{|\Lambda|}\right)^{1/3} \cdot \frac{2}{3} s^{-1/3} ds}{\sqrt{1-s^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3|\Lambda|}} \int_0^{\sqrt{\frac{|\Lambda|}{8\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{2}{\sqrt{3|\Lambda|}} \cdot arcsin\left[\sqrt{\frac{|\Lambda|}{8\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}\right]$$

eftersom $\frac{d}{ds} arcsin(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$

Med liknande substitution erhålls för fallet $\Lambda > 0$:

$$t = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} arcsinh(s) = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \cdot arcsinh\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{8\pi G\rho_0}}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{3/2}\right]$$

eftersom $\frac{d}{ds} arcsinh(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$.

$\square$

Skalfaktorn är således en begränsad och periodisk funktion av tiden i ett universum med $k = 0$ och $\Lambda < 0$, som därför är en sluten modell. Skalfaktorn växer däremot obegränsat i modellerna med $k = 0$ och $\Lambda \geq 0$ som alltså är öppna modeller. Alla modeller med $k = 0$ är uppenbarligen Big Bang-modeller eftersom $\lim_{t\to 0} S(t) = 0$ oberoende av tecknet och värdet på Λ.

5.3 STATIONÄRA TILLSTÅNDETS MODELL

En **stationär modell** måste satisfiera den **perfekta kosmologiska principen** enligt vilken universum ser likadant ut i all riktningar för alla godtyckligt belägna observatörer även **under alla tider**. Det stationära tillståndets modell föreslogs pga den diskrepans som uppstod mellan universums ålder och åldern på de innehållna objekten eftersom Hubble missbedömde storleken på Hubbleparametern. Det av Hubble beräknade värdet på H resulterade i att de i universum innehållna objekten föreföll tio gånger äldre än universum självt Det stationära tillståndet var alltså ursprungligen tänkt som en lösning på denna paradox.

De stationära modell tillhör naturligtvis inte Big Bang-modellerna. Ett stationärt universum måste ha konstant rumtidkrökning och därför konstant densitet i tiden så att den perfekta kosmologiska principen satisfieras. Om ett sådant universum expanderar samtidigt som $\rho > 0$ måste ett kontinuerligt nyskapande av materia ske för att bibehålla konstant densitet och därmed konstant rumtidkrökning.

Följande möjligheter finns för en stationär modell:
$k = +1, 0, -1 \qquad S = konst \quad \Rightarrow \quad H = 0$
$k = 0 \qquad H = \dot{S}/S = konst \neq 0$

De första tre modellerna är **stationära och statiska** medan den sista är **stationär och icke-statisk**. I det sista fallet kommer kravet $k = 0$ från att krökningen

$$K(t) = \frac{k}{S^2(t)}$$

måste vara konstant i tiden för att den perfekta kosmologiska principen skall vara satisfierad. Med då $S(t)$ inte är konstant eftersom modellen är icke-statisk kan $K(t)$ vara konstant under alla tider endast om $k = 0$.

Det **icke-statiska stationära fallet** tillsammans med kravet $\rho = 0$ kallas **de Sitters standardlösning**. Skalfaktorn i de Sitters standardlösning erhålls genom att lösa ekvationen

$$\frac{\dot{S(t)}}{S(t)} = H_0 = konst$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S(t) = S_0 e^{H_0 t} \ .$$

Det **stationära icke-statiska fallet** med kravet $\rho \neq 0$ resulterar i det som kallas **stationära tillståndets modell**. I denna modell måste varje observatör mäta upp samma värde på parametrarna H, q, ρ och K och dessa måste även vara konstanta i tiden för att den perfekta kosmologiska principen skall vara satisfierad. För skalfaktorn gäller liksom i de Sitters standardlösning

$$S(t) = S_0 e^{H_0 t} \ .$$

Proposition:
Decelerationsparametern q_0 i det stationära tillståndets modell har värdet -1.

Bevis:
Med

$$S(t) = S_0 e^{H_0 t}$$
$$\dot{S}(t) = H_0 S_0 e^{H_0 t}$$
$$\ddot{S}(t) = H_0^2 S_0 e^{H_0 t}$$

erhålls med den tidigare definitionen på decelerationsparametern q_0 vid observationstillfället t_0:

$$q_0 = -\frac{\ddot{S}}{S} \cdot \frac{1}{H_0^2} = \frac{-H_0^2 S_0 e^{H_0 t}}{S_0 e^{H_0 t}} \cdot \frac{1}{H_0} = -1.$$

□

Detta strider mot de flesta observationella resultat som tyder på att $q_0 > 0$, dvs att expansionen är decelererad. Med $q_0 > 0 \Leftrightarrow \ddot{S} < 0$ är ju $\dot{S}$ en avtagande funktion.

5.4 DE SITTER-MODELLER

Modeller med $\Lambda \neq 0$ och $\rho = konst$ kallas för **de Sitter-modeller**. Universa med $\Lambda > 0$ — accelererad expansion — kallas **de Sitter-universa** medan universa med $\Lambda < 0$ — decelererad expansion — kallas **anti-de Sitter-universa**.

Astronomernas uppfattning är att de Sitter-modellerna har sitt tillämpningsområde i det tidigaste skedet av universums utveckling. Enligt inflationsscenariot anses ju expansionen i ett tidigt skede ha varit kraftigt växande varvid universum praktiskt taget planats ut. Under inflationsfasen anses vidare ändringen i massdensitet ha skett mycket långsammare än ändringen i skalfaktorn och man kan därför betrakta densiteten som konstant under den inflationistiska perioden, varför de Sitter-modellerna med sin exponentiella tillväxt av skalfaktorn och konstanta täthet utgör en lämplig approximation till just denna fas.

Proposition:
Skalfaktorn har följande uppförande i ett de Sitter-universum, dvs i ett universum med $\Lambda \neq 0$ och $\rho = konst$:

$$k = 0: \qquad S(t) = S_0 e^{h(t-t_0)}$$

$$k = +1: \qquad S(t) = \frac{c}{h} cosh(ht)$$

$$k = -1: \qquad S(t) = \frac{c}{h} sinh(ht)$$

där $h = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}} = konst > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Lambda}{3} > -\frac{8\pi G}{3}\rho$.
I fallet $k = 0$ är h lika med Hubbleparametern.

Bevis:
Genom att lösa Friedmann-Lemaitres första ekvation erhålls:
Fallet $k = 0$:

$$\frac{\dot{S}^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = h^2 = konst$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dt} = \pm\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}} = h$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{d(lnS)}{dt} = h$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d(lnS) = hdt.$$

Integration ger

$$\int_{S_0}^{S} d(lnS) = h\int_{t_0}^{t} dt$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S = S_0 e^{h(t-t_0)}\ .$$

Fallet $k = +1$:

$$\frac{\dot{S}^2 + c^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = h^2 = konst$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\dot{S}^2}{h^2S^2 - c^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\dot{S}}{\sqrt{h^2S^2 - c^2}} = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{dS/dt}{c\sqrt{\frac{h^2S^2}{c^2} - 1}} = 1$$

där jag valt högerledet som +1 eftersom detta svarar mot ett expanderande universum. Motsvarande kontraherande universum erhålls genom att låta $t \to -t$.
Med substitutionen $S_1 = hS/c$ erhålls

$$\frac{dS_1/dt}{\sqrt{S_1^2 - 1}} = h$$
$$\Leftrightarrow$$
$$h\int dt = \int \frac{dS_1}{\sqrt{S_1^2 - 1}} = arccosh(S_1)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S_1 = cosh(ht)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S = \frac{c}{h}cosh(ht).$$

Fallet $k = -1$:
Med samma substitution som i föregående fall:

$$\frac{\dot{S}^2 - c^2}{S^2} = h^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\dot{S}}{\sqrt{h^2S^2 + c^2}} = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dS/dt}{c\sqrt{\frac{h^2S^2}{c^2}+1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{dS_1/dt}{\sqrt{S_1^2+1}} = h$$

$$\Leftrightarrow$$

$$h\int dt = \int \frac{dS_1}{\sqrt{S_1^2+1}} = arcsinh(S_1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S_1 = sinh(ht)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S = \frac{c}{h} sinh(ht).$$

$\square$

Naturligtvis erhålls samma typ av lösningar även då $\Lambda = 0$ eftersom högerledet även då blir konstant med $h = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}$.

TOMMA MODELLER.

Dessa modeller utgör ett specialfall med $\rho = 0$ av de Sitter-modellerna för vilka $\Lambda \neq 0$ och $\rho = konst$. En tom modell kan sägas utgöra en bra approximation till det verkliga universum så länge de materiella partiklarnas ömsesidiga gravitation kan anses försumbar, alltså om universum har en mycket låg medeltäthet.

Jag undersöker här två av de tomma modellerna. Den ena modellen har $k = +1$ och $\Lambda > 0$ och är inte är en Big Bang-modell. Alla universa med $\rho = 0$, $k = +1$ och $\Lambda > 0$ inleder nämligen expansionsfasen från ett tillstånd $S = c\sqrt{3/\Lambda} > 0$ (se nästa proposition) och med ändlig densitet. Jag kommer längre fram att visa att modeller som är icke-tomma med $k = +1$ kan undvika Big Bang-scenariot endast för *vissa* värden på Λ, medan de tomma modellerna med $k = +1$ undviker en Big Bang för *alla* $\Lambda > 0$. Jag kommer att kalla modeller som undviker Big Bang-scenariot för 'icke-Big Bang-modeller'.

Den andra tomma modellen jag tar upp är en Big Bang-modell med det som anses vara den mest realistiska kombinationen av k och Λ, nämligen $k = -1$ och $\Lambda < 0$. Att denna kombination är den mest realistiska beror på att de flesta observationer tyder på att $q > 0$, och detta villkor tillsammans med de tidigare härledda sambanden mellan k, q och Λ i 'Kosmologiska parametrar' på sid. 37 resulterar i att $k < 0$ och $\Lambda < 0$.

Proposition:
För de två tomma Lemaitre-modellerna med $k = +1$ och $\Lambda > 0$ samt $k = -1$ och $\Lambda < 0$ gäller följande för ålder och skalfaktor:

$$t = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} arccosh\left(\frac{S}{c}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right) & k = +1,\, \Lambda > 0 \\ \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} arcsin\left(\frac{S}{c}\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\right) & k = -1,\, \Lambda < 0 \end{cases}$$

$$S(t) = \begin{cases} c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) & k = +1,\, \Lambda > 0 \\ c\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} sin\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}t\right) & k = -1,\, \Lambda < 0 \end{cases}$$

dvs en modell med $k = +1$ och $\Lambda > 0$ utgör ett monotont expanderande öppet universum och en modell med $k = -1$ och $\Lambda < 0$ resulterar i ett slutet oscillerande universum.

Bevis:
Med $\rho = 0$ ges tidsintegralen av

$$t = \int \frac{dS}{\sqrt{\Lambda S^2/3 - kc^2}} \ .$$

I det förstnämnda fallet med $k = +1$ och $\Lambda > 0$ antar S ett värde större än noll då $t = 0$ och detta värde $S(0) = S_{min}$ utgör därför undre integrationsgräns. Genom att sätta $\dot{S} = 0$ i Friedmann-Lemaitres första ekvation erhålls denna gräns som $S_{min} = c\sqrt{3/\Lambda}$ varför integration ger

$$t = \int_{c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}}^{S} \frac{dS}{\sqrt{\Lambda S^2/3 - c^2}} = \int_{c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}}^{S} \frac{dS}{c\sqrt{\Lambda S^2/3c^2 - 1}} \ .$$

Med substitutionen

$$s = \frac{S}{c}\sqrt{\Lambda/3} \quad \Rightarrow \quad dS = c\sqrt{3/\Lambda}ds$$

erhålls

$$t = \int_{c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}}^{S} \frac{dS}{c\sqrt{\Lambda S^2/3c^2 - 1}} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \int_{1}^{\frac{S}{c}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} [arccosh(s)]_1^{\frac{S}{c}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cdot arccosh\left(\frac{S}{c}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\right)$$

eftersom $arccosh(1) = 0$ och $\frac{d}{ds} arccosh(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$.

Skalfaktorn erhålls nu som en explicit funktion av t ur uttrycket ovan:

$$S(t) = c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \cdot t\right)$$

— en monotont expanderande anti-Big Bang-modell.

Fallet $\rho = 0$, $k = -1$ och $\Lambda < 0$ är en Big Bang-modell, dvs $\lim_{t\to 0} S(t) = 0$, och med liknande substitution som i föregående uträkning erhålls med undre integrationsgräns $S(0) = 0$ följande:

$$t = \int_0^S \frac{dS}{\sqrt{c^2 - |\Lambda|S^2/3}} = \cdots = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \int_0^{\frac{S}{c}\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} arcsin\left(\frac{S}{c}\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S(t) = c\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} sin\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t\right)$$

— en oscillerande Big Bang-modell.

$\square$

Proposition:
I ett tomt de Sitter-universum ges Hubbleparametern av

$$H(t) = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot tanh^k\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t\right) .$$

Bevis:
Med $\rho = 0$ i Friedmanns första ekvation

$$\frac{\dot{S}^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} = \frac{\Lambda}{3}$$

och med hjälp av den tidigare härledningen av skalfaktorn i ett de Sitter-universum erhålls skalfaktorn i det tomma specialfallet genom att sätta $\rho = 0$ i dessa uttryck, dvs genom att sätta $h = \sqrt{|\Lambda|/3}$, varför

$$S(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} e^{\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t} & k = 0 \\ c\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \cosh\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t\right) & k = +1 \\ c\sqrt{\frac{3}{|\Lambda|}} \sinh\left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t\right) & k = -1 . \end{cases}$$

Hubbleparametern ges enligt tidigare av

$$H(t) = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}$$

varför

$$H(t)|_{k=0} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}|_{k=0} = \frac{e^{\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}t}}{\sqrt{3/|\Lambda|}} \cdot e^{\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}t} = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \ .$$

$$H(t)|_{k=+1} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}|_{k=+1} = \frac{c \cdot sinh\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot t\Big)}{c\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}^{-1} cosh\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot t\Big)} = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} tanh\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot t\Big) \ .$$

$$H(t)|_{k=-1} = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)}|_{k=-1} = \frac{c \cdot cosh\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot t\Big)}{c\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}}^{-1} sinh\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot t\Big)} = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} tanh^{-1}\Big(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} \cdot t\Big) \ .$$

□

Proposition:
Införs två testpartiklar i ett tomt de Sitter-universum med $\Lambda > 0$ kommer dessa att avlägsna sig exponentiellt ifrån varandra.

Bevis:
Antag att de två partiklarna har en rumslig separation $r_0 S$, där S betecknar skalfaktorn och $S_0 = 1$, och antag vidare en accelererad expansion, dvs $\Lambda > 0$. Då ges ekvationen för partiklarnas relativa rörelse av Friedmann-Lemaitres andra ekvation

$$\frac{\ddot{S}}{S} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\ddot{S} = \frac{\Lambda S}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3pc^{-2})S$$
$$\Leftrightarrow$$
$$r_0\ddot{S} = \frac{\Lambda}{3}(r_0 S) - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3pc^{-2})r_0 S$$

efter genomgående multiplikation med r_0. Den andra termen i högerledet svarar mot en decelererande kraft orsakad av den gravitationella växelverkan. Den första termen i högerledet svarar mot kraften orsakad av vakuumenergidensiteten och denna kraft är alltså direkt proportionell mot avståndet $r_0 S$ mellan partiklarna, precis som en fjäderkraft som är proportionell mot avståndet från jämviktsläget. Tömmer man nu detta universum på materia och strålning ($\rho = p = 0$) erhålls

$$r_0\ddot{S} = \frac{\Lambda}{3}(r_0 S)$$

med lösningen

$$S(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$$

där $c_1 \neq 0$ eftersom $S > 0$ och $\dot{S} > 0$ under expansionsfasen.

□

Jag studerar nu objekthorisonten σ_{oh} i ett de Sitter-universum.

Proposition:
Objekthorisonten i ett de Sitter-universum med $k = 0$ går mot det konstanta gränsvärdet H^{-1} vilket innebär att vi aldrig kommer att kunna skåda alla objekt innehållna i ett sådant universum.

Bevis:
Objekthorisonten representerar enligt tidigare den yttre gränsen för det observerbara universum och beräknas enligt

$$\sigma_{oh} = \int_0^{\sigma_{oh}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k\sigma^2}} = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{S(t)}$$

där $\sigma_{oh}(t) = r_{oh}(t)/S(t)$ varför objekthorisontavståndet r_{oh} ges av (med $c = 1$)

$$r_{oh}(t) = \sigma_{oh}(t) \cdot S(t) = S(t) \int_0^{t_0} \frac{dt}{S(t)}$$

där t_0 är observationstiden. Med undre integrationsgräns $t = 0$ erhålls den yttersta gränsen för de teoretiskt sett synliga objekten. Med $S_0 = 1$ ges skalfaktorn enligt tidigare (sid. 60) av $S(t) = e^{Ht}$ i ett plant de Sitter-universum med $k = 0$. Därför erhålls följande för objektens avstånd som funktion av observationstiden t_0:

$$r_{oh}(t) = S(t) \int_0^{t_0} \frac{dt}{S(t)} = e^{Ht} \int_0^{t_0} e^{-Ht} dt = e^{Ht} [\frac{e^{-Ht}}{-H}]_0^{t_0} = H^{-1} e^{Ht_0}(1 - e^{-Ht_0}).$$

Objekthorisontens dimensionslösa koordinat som rör sig med expansionen ges därför av

$$\sigma_{oh}(t) = r_{oh}(t)/S(t) = H^{-1}(1 - e^{-Ht})$$

och detta uttryck närmar sig det konstanta värdet H^{-1} för tillräckligt stora värden på t.

$\square$

Således kommer objekthorisonten för en observatör i $\sigma = 0$ som rör sig med expansionen alltid att vara belägen i H^{-1} för tillräckligt stora t. Det observerbara universum är alltså begränsat under alla tider för en observatör i någon fix koordinatposition, och händelser utanför denna horisont kommer inte vid någon framtida tidpunkt att kunna påverka någonting innanför denna gräns.

Detta kan jämföras med den expanderande Minkowski-modellen som är ett Friedmann-universum med $S(t) \propto t$. Objekthorisonten $\sigma_{oh}(t)$ är här en växande funktion av observationstiden och går inte mot ett konstant gränsvärde som i de Sitter-fallet. Således kommer objekt som i ett Friedmann-universum vid någon tidpunkt inte varit kausalt sammankopplade att bli kausalt sammankopplade (dvs kunna utbyta information) vid någon senare tidpunkt eftersom objekthorisonten hela tiden flyttas fram. Detta innebär att varje observatör i ett sådant Friedmannskt expanderande Minkowski-universum kommer att kunna skåda varje objekt inom detta universum bara han eller hon väntar tillräckligt länge.

Mitt mål är nu att klassificera de möjliga Friedmann-Lemaitre-modellerna efter deras karaktär vad gäller slutenhet/öppenhet och ursprungsscenario (Big Bang-typ eller icke-Big Bang-typ) beroende på parametervärdena k och Λ.

Med $\Lambda = 0$ och $\rho > 0$ resulterar Friedmanns ekvationer för $k = -1, 0$ i monotont expanderande Big Bang-modeller och $k = +1$ i oscillerande Big Bang-modeller. Dessa är de tre klassiska Friedmann-modellerna svarandes mot fallen 3,4 och 5 på sid. 44.

För expansionens acceleration gäller enligt Friedmann-Lemaitres andra ekvation tillsammans med massbevaringsvillkoret under materieeran:

$$\ddot{S}(t) = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)S(t) + \frac{\Lambda S(t)}{3} = -\frac{4\pi G\rho_0 S_0^3}{3S^2(t)} + \frac{\Lambda S(t)}{3} \, .$$

Med $\Lambda \leq 0$ och $\rho > 0$ blir $\ddot{S} < 0$. S-kurvan måste ha skurit t-axeln vid någon tidpunkt $t < t_0$. **Alla modeller med $\Lambda \leq 0$ och $\rho > 0$ är därför Big Bang-modeller**. För alla modeller med $\Lambda < 0$ existerar ett kritiskt värde S_c på skalfaktorn för vilket $G(S_c) = \dot{S}^2|_{S=S_c} = 0$ för vilket expansionen avstannar varefter kontraktion inleds, eftersom insättning av S_c i Friedmann-Lemaitres andra ekvation ger $\ddot{S} < 0$ varför S_c utgör ett maximum. Om ingen sådan begränsning på S funnes skulle man erhålla ett imaginärt värde på $\dot{S}$. **Alla modeller med $\Lambda < 0$ är därför oscillerande Big Bang-modeller**.

Om $\Lambda > 0$, $k \leq 0$ och $\rho_0 > 0$ gäller att $\dot{S} > 0$ under alla tider och man erhåller **monotont expanderande Big Bang-modeller**. Modeller med $\Lambda > 0$ behöver emellertid inte vara Big Bang-universa av det skälet att för $\Lambda > 0$ är $\ddot{S}$ inte alltid negativt. Det kommer att visa sig att vissa modeller med $k = +1$ och $\Lambda > 0$ kan undvika ett Big Bang-scenario. Dessa kallas **icke-Big Bang-modeller**. För något t finns ett $S_c > 0$ från vilket expansionen utgår, så att det ursprungliga tillståndet alltså varit ett icke-singulärt tillstånd med ändlig densitet istället för ett oändligt sammanpressat tillstånd som i Big Bang-modellerna.

Sammanfattningsvis gäller att alla kombinationer av k och Λ utom kombinationen $k = +1$ och $\Lambda > 0$ med nödvändighet är Big Bang-modeller. Alla tomma modeller med $k = +1$ och $\Lambda > 0$ är emellertid icke-Big Bang-modeller liksom alla icke-tomma med $k = +1$ då $0 < \Lambda < \Lambda_c$, vilket jag snart visar.

5.5 EINSTEINS STATISKA UNIVERSUM

Jag börjar med att visa att Einsteins statiska modell med $\dot{S} = \ddot{S} = 0$ resulterar i att $S = S_c$ och $\Lambda = \Lambda_c$ där

$$\Lambda_c = \frac{kc^2}{S_c^2} = 4\pi G\rho_c$$

varför kravet på positiv energidensitet, $\rho_c > 0$, innebär att en sådan modell måste vara en med $k = +1$. Notera att c-indexeringen på ρ inte har något att göra med den kritiska densiteten ρ_{crit}.

Därefter visar jag att en Big Bang kan undvikas om $0 < \Lambda < \Lambda_c$ och $S > S_c$. Om däremot $\Lambda > \Lambda_c$ är $\dot{S} > 0$ under alla tider vilket resulterar i en monotont expanderande Big Bang-modell.

Proposition:
I en nolltrycksmodell med $k = +1$ och $\Lambda > 0$ finns ett kritiskt värde på Λ, Λ_c för vilket $\ddot{S} = \dot{S} = 0$. Detta inträffar då

$$S = S_0(4\pi G\rho_0/\Lambda)^{1/3} = S_c \qquad och \qquad \Lambda_c = c^6/S_0^6(4\pi G\rho_0)^2.$$

Således finns möjligheten av en statisk modell med $S = S_c$ och $\Lambda = \Lambda_c$ förutsatt att

$$\Lambda_c = 4\pi G\rho_c = c^2/S_c^2$$

där ρ_c betecknar densiteten i detta statiska universum som kallas **Einsteins statiska universum**.

Bevis:
Med $k = +1$ i Friedmann-Lemaitres andra ekvation:

$$\ddot{S} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{4\pi G\rho_0 S_0^3}{3S^2} + \frac{\Lambda S}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{4\pi G\rho_0 S_0^3}{3S^2} + \frac{\Lambda S^3}{3S^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$S = S_0(4\pi G\rho_0/\Lambda)^{1/3} = S_c$$

och med detta uttryck för S insatt i Friedmann-Lemaitres första ekvation med villkoret $\dot{S} = 0$ erhålls

$$\dot{S}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S_c} - c^2 + \frac{\Lambda S_c^2}{3} = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3}\cdot\frac{\Lambda^{1/3}}{(4\pi G\rho_0 S_0^3)^{1/3}} - c^2 + \frac{\Lambda}{3}\cdot\left(\frac{4\pi G\rho_0 S_0^3}{\Lambda}\right)^{2/3} =$$

$$= (4\pi G\rho_0)^{2/3}\Lambda^{1/3}S_0^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Lambda = c^6/S_0^6(4\pi G\rho_0)^2 = \Lambda_c$$

och $S_0 = S_c$ ger $4\pi G\rho_0/\Lambda = 1$ där $\Lambda = \Lambda_c$ och $\rho_0 = \rho_c$ i detta statiska universum så länge ingen materieproduktion sker varför $\Lambda_c = 4\pi G\rho_c$ och

$$\Lambda_c = 4\pi G\rho_c = c^6/S_0^6(4\pi G\rho_c)^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(4\pi G\rho_c)^3 = c^6/S_0^6$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Lambda_c = 4\pi G\rho_c = c^2/S_0^2 = c^2/S_c^2.$$

□

5.6 ICKE-BIG BANG-MODELLER

Jag undersöker nu villkoren på Friedmann-Lemaitre-universa som undviker Big Bang-scenariots ursprungstillstånd och som inte är stationära. Detta innebär att den kosmologiska principen som vanligt är satisfierad, men inte den perfekta kosmologiska principen.

Med $\Lambda > 0$ ser man att för $k = 0$ och $k = -1$ är alla termer i $G(S) = \dot{S}^2$ positiva. $G(S)$ saknar alltså nollställen och S är därför alltid en strängt avtagande eller strängt växande funktion av t. S måste därför vid något tillfälle korsa t-axeln och därmed anta värdet noll, varför dessa universa med nödvändighet innehåller en Big Bang.

Om $k = +1$ kan däremot $G(S) = \dot{S}^2$ ha två nollställen eftersom $G(S) \to \infty$ både då $S \to 0$ och då $S \to \infty$. Vidare inses genom insättning i Friedmann-Lemaitres första ekvation att $G(S_c) > 0$ då $\Lambda > \Lambda_c$ och att $G(S_c) < 0$ då $\Lambda < \Lambda_c$.

För de värden på S för vilka $G(S) = \dot{S}^2 < 0$ saknas reell lösning. Sådana värden på S finns om $G(S)$ har ett negativt minimivärde.

Möjliga icke-Big Bang-modeller är sådana för vilka $k = +1$, $S > S_c > 0$ och $0 < \Lambda < \Lambda_c$. Sådana universa kontraherar monotont till S_c varefter de expanderar monotont.

Proposition:
Minimat S_c till funktionen $G(S) = \dot{S}^2$ i modellen med $k = +1$, $S > S_c$ och $0 < \Lambda < \Lambda_c$ uppträder i

$$S = S_c = S_0(4\pi G\rho_0/\Lambda)^{1/3}.$$

Bevis:

$$\frac{d(\dot{S}^2)}{dS} = \frac{d}{dS}(G(S)) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3}\left(-\frac{1}{S^2}\right) + \frac{2S\Lambda}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S^3 = S_c^3 = \frac{4\pi G\rho_0 S_0^3}{\Lambda}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S_c = S_0(4\pi G\rho_0/\Lambda)^{1/3}.$$

□

Den övre begränsningen Λ_c på Λ för vilket detta universum undviker en Big Bang fås genom att söka de värden Λ för vilka detta minimum i S_c är negativt.

Proposition:
Den övre begränsningen Λ_c på Λ i en anti-Big Bang-modell med $k = +1$, $S > S_c$ och $0 < \Lambda < \Lambda_c$ ges av

$$\Lambda_c = c^6/S_0^6(4\pi G\rho_0)^2.$$

Bevis:
Insättning i $G(S)$ med $k = +1$ ger

$$G(S_c) = \dot{S_c}^2|_{S=S_c} = \frac{8\pi G\rho_0 S_0^3}{3S_c} - c^2 + \frac{\Lambda S_c^2}{3} = (4\pi G\rho_0 S_0^3)^{2/3}\Lambda^{1/3} - c^2$$

och därför

$$G(S_c) < 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$S_0^2(4\pi G\rho_0)^{2/3} \cdot \Lambda^{1/3} - c^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Lambda < c^6/S_0^6(4\pi G\rho_0)^2 = \Lambda_c.$$

□

De enda Friedmann-modellerna som inte behöver ha inletts med ett oändligt sammanpressat tillstånd, dvs med en Big Bang, är således de för vilka $k = +1$ och $0 < \Lambda < \Lambda_c$ och $S > S_c$.

Fallen med $\Lambda > 0$ och $k = +1$ kan alltså delas upp i de två underfallen $\Lambda > \Lambda_c$ och $0 < \Lambda < \Lambda_c$. Fallet $\Lambda = \Lambda_c$ svarar mot det statiska fallet med $S = S_c$. Då $\Lambda > \Lambda_c$ gäller att $\dot{S} > 0$ och vi har ett monotont expanderande universum.

Fallet $0 < \Lambda < \Lambda_c$ resulterar i en icke-Big Bang-modell om $S > S_c$. Om Λ ligger i det angivna intervallet saknas lösningar för de S för vilka $G(S) = \dot{S}^2 < 0$. Jag låter intervallet $[S_1, S_2]$ beteckna de värden på S för vilka $G(S) = \dot{S}^2 < 0$. Modeller med $S < S_1$ resulterar i ett oscillerande universum. Om $S > S_2$ har man en sk 'bounce-modell' som 'studsar' under inverkan av den kosmiska repulsionen.

Illustrationer:

5.7 EDDINGTION-LEMAITRE-MODELLERNA

Det finns vidare två expanderande modeller som asymptotiskt närmar sig respektive avlägsnar sig ifrån den statiska Einstein-modellen med $\Lambda = \Lambda_c$. Dessa kallas **Eddington-Lemaitre-modellerna** och var av intresse under slutet av 1960-talet då man fann ett överskott av kvasarer med rödförskjutningen $z = 2$. Detta skulle kunna tyda på en oförklarlig överaktivitet i kvasarbildningen vid den motsvarande tidpunkten, eller på att universum under en lång period varit nästintill statiskt med en utsträckning svarandes mot att $z = 2$. Det upptäcktes emellertid felaktigheter i tolkningen av observationsresultaten varför dessa modeller ganska snabbt övergavs.

I den ena Eddington-Lemaitre-modellen expanderar universum gradvis från det statiska Einstein-tillståndet i $t = \infty$ tills expansionen blir exponentiell enligt $S \propto e^{\sqrt{\Lambda/3}t}$. I det andra möjliga universat inleds expansionen enligt det gängse Big Bang-scenariot varefter det asymptotiskt närmar sig det statiska Einsteinuniversat då $t \to \infty$.

För den sk **Lemaitre-modellen** gäller att $\Lambda = \Lambda_c(1 + \varepsilon)$ där $\varepsilon \ll 1$. Under en mycket lång period ligger då S väldigt nära S_c eftersom den kosmologiska repulsionen och den gravitationella attraktionen är nästan exakt balanserade. Slutligen tar dock den repulsiva kraften överhanden och modellen fortsätter att expandera.
Illustration:

5.8 SAMMANFATTNING

Sammanfattningsvis gäller följande för icke-tomma materiedominerade Friedmann-Lemaitre- modeller av nolltryckstyp:

Monotont expanderande/kontraherande Big Bang-modeller:
$k = -1 \quad \Lambda \geq 0$
$k = 0 \quad \Lambda \geq 0$
$k = +1 \quad \Lambda > \Lambda_c$

Oscillerande Big Bang-modeller:
$k = -1 \quad \Lambda < 0$
$k = 0 \quad \Lambda < 0$
$k = +1 \quad \Lambda \leq 0$
$k = +1 \quad 0 < \Lambda < \Lambda_c \quad S < S_c$

Monotont expanderande icke-Big Bang-modeller:
$k = +1 \quad 0 < \Lambda < \Lambda_c \quad S > S_c$

Statisk modell:
$k = +1 \quad \Lambda = \Lambda_c \quad S = S_c.$

Litteraturförteckning

(1) L.F Abbott, So-Young Pi: Inflationary Cosmology, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1986

(2) Michael Berry: Principles of cosmology and gravitation, Cambridge university Press, 1976

(3) M. Rowan-Robinson: Cosmology, Oxford University Press, 1981

(4) Bengtsson, Gustafson, Gustafson: Kvarken och universum, Corona, 1994

(5) Robertson, Noonan: Relativity and Cosmology, W.B. Saunders Company, 1968

(6) Richard P. Feynman: Feynman Lectures on Gravitation, Addison-Wesley Publishing, 1995

(7) D.J. Raine: The Isotropic Universe, Adam Hilger Ltd, 1981

(8) Michael Heller: Theoretical Foundations of Cosmology, World Scientific publishing Co. Pte. Ltd., 1992

(9) P.T Landsberg, D.A. Evans: Mathematical Cosmology, Oxford University Press, 1977