Farväl Newton och Leibniz, välkommen till skolan
En didaktisk studie av en lärobok i differentialräkning från 1873

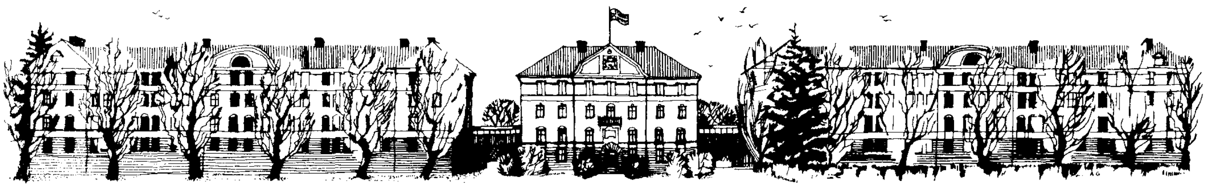
Johan Prytz

U.U.D.M HPM Project Report 2002:P2

Examensarbete i matematik, 20 poäng

Handledare och examinator: Gunnar Berg

Mars 2002



Department of Mathematics

Uppsala University

Innehåll

Inledning

Konungens Högtbetrodde Man, Landshöfdingen öfver Skaraborgs Län, Kommend. m.st.k af Nordstjerne-Orden, f.d. Stats.Rådet, f.d. Professorn. L. K. W. A. m.m.

Herr Carl Johan Malmsten

med det djupaste vördnad

Författaren

Så inleds Emil Fogelmarcks lärobok i differentialräkning från 1873. Texten är skriven för hand på ett av försättsbladen av Emil Fogelmarck. Boken var en gåva till Carl Johan Malmsten, en av den tidens mest ansedde svenske matematiker. Det kan tyckas vara en i överkant och vördnadsfull hälsning från en matematiker till en annan matematiker, men det var så man officiellt tillskrev en person i Malmstens position vid den här tiden. Att boken var en gåva till Malmsten är en gissning, men inte helt utan grund då texten ovan var just handskriven och läroboken tillhör det Malmstenska biblioteket.

Uppsatsen kommer alltså att behandla en lärobok i differentialräkning från år 1873. Boken omfattar 139 sidor och 170 punkter. Punkterna innehåller regler, bevis exempel och uppgifter om vart annat och de flesta punkter berör teknisk matematik, t ex deriveringsregler och hur de kunde tillämpas på olika typer av problem. Det förekommer få bilder och den är faktaspäckad.

Tyngdpunkten i studien kommer att ligga på det grundläggande matematiska innehållet och det matematiska språket, d v s hur Fogelmarcks framställning är uppbyggd, och i vilket pedagogiskt och kunskapsideologiskt sammanhang som boken är skriven.

Matematik och historia

I England på 1700-talet påbörjas den process som populärt benämns den industriella revolutionen. En utveckling som kom att förändra Europa, såväl ekonomiskt som politiskt, socialt och kulturellt. Övriga Europa industrialiseras dock betydligt senare och i Sverige kan vi inte tala om ett industrialiserat samhälle förrän i slutet av 1800-talet, d v s mer än 100 år efter England. Anledningarna till Englands relativt tidiga samhälls-förändring varierar med vilket historiskt perspektiv man anlägger.

I England hade man under 1700-talet en utveckling där en stor del av befolkningen kompletterade jordbruksarbete med någon form av hantverk. Det nya försörjningssättet kom för allt fler människor bli den primära källan för överlevnad. Enskilda hantverksarbeten som till en början skedde i hushållet, kom successivt att samlas under samma tak och så småningom att utvecklas till industrier.

Vad har då detta med matematik och den moderna analysen att göra? Utvecklingen i England var relativt oberoende av akademisk vetenskap och dess utveckling. Frankrike låg ju på många vis betydligt längre fram både kulturellt och vetenskapligt.

En viktig förändring av ekonomin och samhället var dels när människans arbete i större utsträckning började ersättas av maskiner och dels de mängder av varor som en masstillverkning medförde. Det uppstod ett allt större behov av noggranna beräkningar. Beräkningar som rörde maskiner, gruvor, broar m m och beräkningar som rörde tillgång och efterfrågan. Så om det fanns ett behov av matematisk kunskap så fanns det ett ännu större behov av personer som besatt denna kunskap och kunde omsätta den i praktiken, d v s ingenjören och ekonomen. Det är alltså inte en tillfällighet att KTH:s föregångare, teknologiska institutet, grundades 1825 och det var inte bara i Sverige det bildades tekniska skolor. École Polytechnique grundades i Paris 1794.

Idéhistorikern Sven-Eric Liedmann skriver i sin bok *I skuggan av framtiden* om upplysningsprojektet inte före utan efter franska revolutionen. Liedman urskiljer två linjer inom upplysningsprojektet under 1800-talet, men även under 1900-talet. Den första är de s k hårda vetenskaperna. Dessa är just naturvetenskap och ekonomi, och det är med dessa som bakgrund den industriella utvecklingen kan följas. Liedman menar att denna linje kan tillmätas en rätlinjig utveckling. Till skillnad från den hårda linjen har den andra, s k mjuka linjen, en mera ojämn utveckling, Den andra linjen är de s k mjuka vetenskaperna och till dem räknas de humanistiska, filosofiska och samhällsvetenskapliga disciplinerna. Utifrån dessa kan den politiska och kulturella, den ideologiska, utvecklingen av samhället förstås.[1]

Analysen i historien

Gemensamt för naturvetenskap, teknologi och ekonomi är deras grund i matematiken. Industrisamhällets framväxt skapade ett behov av praktiker inom dessa discipliner, där man kunde beräkna och förutsäga. Jag menar att utvecklingen av den moderna analysen, den stringenta analysen, skall ses mot bakgrund av detta behov, dock ej som en ovillkorlig konsekvens. Differentialkalkylen, eller snarare dess grunder, existerade likväl innan industrisamhället på allvar började ta form.

I och med Newton och Leibniz arbeten kring differentialer och infinitesimaler i slutet av 1600-talet togs det slutgiltiga steget över från en geometrisk till en aritmetisk behandling av matematiska problem kring kurvor, ytor, och kroppar.[2] De engelska matematikerna kom dock att hålla fast vid den geometriska ansatsen betydligt längre än sina kontinentala kollegor.[3] Problemet för Newtons och Leibniz efterföljare låg bl a i den oklara definitionen av infinitesimalen och hur den användes. Det var just mot infinitesimalen kritiken kom att riktas under hela 1700-talet. En av de främsta kritikerna var den irländske filosofen och anglikanske biskopen George Berkeley (1685-1753), som kritiserade användandet av den oändligt lilla enheten. En enhet som man initialt använde, för att slutligen bortse ifrån när önskat resultat skulle uppnås. Kritiken stannade dock inte vid det rent matematiska, utan blev en svag punkt för den moderna vetenskapen. För hur kunde de moderna vetenskapsmännen bortförklara guds änglar, samtidigt som de förlitade sig på infinitesimalens odefinierbara spöke.[4] Den mest kända strofen i Berkleys kritik löd:

[1] Liedman (1997), s 26 passim

[2] Edwards (1979), s 189f, 265ff

[3] Edwards (1979), s 267

[4] Edwards (1979), s 292ff

> And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments? And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?[5]

Problemen med de formella grunderna hindrade dock inte vetenskapsmännen från att praktiskt tillämpa den tidiga analysen inom de naturvetenskapliga disciplinerna. Problemet löstes i början av 1800-talet med hjälp av gränsvärdes- och kontinuitetsbegreppen, begrepp som utgör grunden för den moderna analysen.

En av portalfigurerna inom den moderna analysen var Augustin Louis Cauchy (1789-1857) och han anses vara den förste att betona gränsvärdes- och kontinuitetsbegreppen som grund för differentialkalkylen och inte som tidigare, bara en del av den. Nu var Cauchy inte den enda matematiker som ägnade sig åt differentialkalkylen, så att utse honom till den förste är ju riskabelt. Cauchy var dock nyskapande i den mening att hans framställning var systematisk och stringent. Cauchy angav själv, som anledning till sitt försök till en klarare och stringentare framställning, de fördelar det medförde vid undervisning i analys. Cauchy var själv verksam som matematiklärare vid Ecole de Polytechnic och hans teorier kring gränsvärde och kontinuitet återfinns i den av honom författade läroboken *Cours d'Analyse*. [6]

Utgångspunkter för uppsatsen

Synen på skolkunskap

Ur ett rent disciplineringsperspektiv reduceras ett skolämne till en uppsättning koder och regler utifrån vilka elevernas kunskaper kontinuerligt skall examineras, en examination i syfte att normalisera, men också utifrån normerna, att differentiera. Vilka elever är underkända, vilka är godkända, vilka är mycket väl godkända, o s v. Den franske filosofen Michel Foucault urskiljer just de disciplinerande institutionernas framväxt under slutet av 1700-talet och framåt. Fängelserna, sjukhusen, fabrikshallarna, regementsbarackerna, folkskolorna och lärdomsskolorna blev viktiga delar i det moderna

---

[5] Thompson (1991), s 191

[6] Grabinger (1983), s 185ff

industrisamhället. Institutioner som kom att prägla samhället och där kunskap byggdes upp av läroplaner, betygskriterier, läroböcker och prov. Examinationen av elevens kunskaper reglerade i betyg får två motriktade effekter. Elevgruppen normaliseras, likriktas, då hela elevgruppen bedöms efter samma kriterier och kunskapsmål. Samtidigt differentieras gruppen då betygen bestämmer vem som är bäst respektive sämst, eller vem som är mest normal.[7]

Pedagogen och skolhistorikern Tomas Englund förespråkar en didaktisk forskning som betonar skolundervisningens och läroböckernas skapande av mening och sammanhang för eleverna. Text och undervisning blir därför inte isolerade företeelser, utan de sker i en kontext där olika faktorer skapar förutsättningar för meningsskapande. Den av Foucault tecknade övergripande utvecklingen rymmer på så sätt variationer, då skolundervisningens meningsskapande möjligheter är en öppen fråga i den mening att olika sociala krafter påverkar skolan och dess undervisnings form och innehåll. Englund betraktar det som en "uttolkningskamp" olika nivåer, där det är staten som utgör maktcentrat.[8] I ett sådant sammanhang blir rådande kunskapsideologier intressanta, d v s hur t ex lärare, forskare och politiker såg på kunskap och undervisning, men också till vad undervisningen syftade.

> Exempelvis kan en och (ytligt sett) samma skolkunskap - formulerad på ett sätt som "alla" kan godkänna (exempelvis i läro- och kursplaner) - på vägen till och i en undervisnings- och lärandesituationer ges helt olikartade uttolkningar. Uttolkningar är beroende av skilda ideologier i vid mening hos de agerande (politiska ideologier, utbildningsfilosofier, skilda sätt att uppfatta ett ämnes kärna och perspektiv, olika förförståelse och tidigare erfarenheter etc.)[9]

En viktig komponent i uppfattning av ett skolämnes syfte är dess relation till den akademiska disciplinen och reproduktionen av kunskap. Englund påpekar att denna koppling många gånger är och har varit stark och grundläggande, men att den ofta under historiens gång utmanats av tanken på skolans syfte som samhällsfostrande. Eleverna skall ges olika färdigheter och förmågor och fostras till självständiga och kritiskt

---

[7] Foucault (1974), s 199 passim

[8] Englund (1991), s. 129f

[9] Englund (1991), s. 131

granskande samhällsmedborgare. Olika utbildningsfilosofier kan huvudsakligen delas in i två huvudkategorier, den traditionella och den icke traditionella. Dessa kan i sin tur delas in i underkategorier följande karaktäristiska inslag.[10]

Traditionella

Perennialism

- Kulturarv, bildning
- Klassiska verk central utgångspunkt

Essentialism

- Förmedling av kunskaper.
- Innehållet starkt relaterat till bakomliggande vetenskaplig disciplin

Icke traditionella

Rekonstruktivism

- Skola för kritisk fostran och värdering av olika alternativ
- Med sikte mot den framtida medborgaren

Progressivism

- Den studerande som “kunskapare”, eleverfarenheter som kunskapsbakgrund, ämnesöverskridande innehållsorganisation
- Samarbete och social fostran, elevaktiva arbetssätt
- Eleven i centrum

Syftet med uppsatsen är att studera förhållandet mellan skolmatematiken och den under mitten av 1800-talet moderna matematiken vid universiteten. Samtidigt vill jag belysa det i många fall förbisedda förhållandet mellan det konkreta innehållet i en lärobok och den betydligt subtilare och svårfångade uppfattningen av ett skolämne och dess syfte. Ett förhållande som kan kasta nytt ljus över matematikundervisningen i Sverige under andra halvan av 1800-talet.

Matematikhistorikern Judith Grabinger driver en tes om att det var pedagogiska behov som drev på utvecklingen mot en stringentare analys. I denna uppsats vill jag omformulera denna tes och pröva den på matematikundervisningen utanför universitetet,

[10] Englund, s. 132ff

på vad vi idag skulle kalla gymnasienivå. Den precision som algebraiseringen, aritmeriseringen medförde borde ju ha pedagogiska fördelar, framför verbala intuitiva definitioner, för både elever och lärare.

En övergång från en matematisk analys präglad av verbala och intuitiva begrepp mot en stringentare och logiskt mer genomarbetad analys skänker undersökningen ytterligare en dimension. Analysen nådde i systematiserad form via läroverken och skolmatematiken samhället utanför universiteten, varför analysen därmed blev en del av en civiliserings- och disciplineringsprocess som omfattade en relativt större del av befolkningen och på så sätt blev en del av fler människors tänkande och handlande.

Hypotes och frågeställning

Min hypotes är att den rigorösare analysen med en klar grunduppsättning av definitioner, regler och tekniker var en bidragande faktor till analysens införande som en del av skolämnet matematik. Jag vill visa på att när analysen blev en del av skolämnet matematik i Sverige, så utgjorde en rigorös analys det teoretiska fundamentet, där bl a Cauchys verk var centralt. Den akademiska disciplinen matematik och dess utveckling påverkade i stor utsträckning utvecklingen av skolämnet matematik

Skolmatematikens innehåll och aktiviteten i klassrummet var likväl inte på förhand given. Hur Fogelmarck skrev sin bok och hur den användes, bestämdes ej enbart av den nära relationen till den högre matematiken. Metoden för undervisning i matematik var inte absolut avhängigt innehållet, utan det fanns tydliga inriktningar som angav olika vägar fram till en god undervisning i matematik.

För att kunna bedöma hypotesens giltighet vill jag undersöka hur analysen i Fogelmarcks lärobok i differentialräkning framställdes och i vilket sammanhang den framställdes. Frågorna som jag försöker besvara med uppsatsen är:

1. Hur definierade Fogelmarck begrepp inom analysen som hos Cauchy intog en central plats? De begrepp som undersöks är:
    - de reella talen
    - funktionsbegreppet
    - gränsvärde
    - kontinuitet

Dessa begrepp jämförs också med den med Fogelmarck samtida matematikern Björling.

2. I vilken utsträckning använde Fogelmarck begreppen ovan i andra delar av analysen? De delarna är
    - derivata
    - medelvärdessatsen
    - extremvärden
    - integral
3. I vilket pedagogiskt sammanhang skrev Fogelmarck sin lärobok, d v s hur såg man i samtida pedagogiska tidskrifter på undervisning i matematik. Vad var skolmatematikens syfte och hur var skolämnet beskaffat?

Med fråga 1 och 2 vill jag undersöka i hur stor utsträckning Fogelmarck hade influerats av Cauchys rigorösa framställning och begreppsapparat. Med frågorna 1 och 2 tillsammans med fråga 3 vill jag fånga de olika faktorer som påverkade Fogelmarck och som beskriver den kontext som han var verksam i. Observera att studien är begränsad till envariabelanalys. Även om Fogelmarck i viss utsträckning berör analys med fler variabler, så anser jag ändå att de formella teoretiska grunderna i stor utsträckning ryms inom envariabelanalysen.

Metod

Undersökningen av Fogelmarcks lärobok är delvis en komparativ textanalys. Textanalys i den mening att jag studerar det grundläggande matematiska innehållet, d v s definitioner och satser. Komparativ i den mening att jag jämför passager ur Fogelmarcks lärobok med passager ur två andra läroböcker i differentialkalkyl, nämligen Cauchys och Björlings. Frågorna 1 och 2 i frågeställningen svarar mot ovan angivna metod.
För att kunna överblicka det pedagogiska sammanhanget och besvara fråga 3 måste jag söka mig till andra källor och flytta mitt perspektiv från det rent matematiska till det matematiskt didaktiska. Vad är skolämnet matematik och vad är dess syfte? De källor jag då vänder mig till är av två skilda typer.

1. Läroplaner.
2. Pedagogiska tidskrifter.

Myndigheters dokument berättar vad som gällde för skolan och undervisning just då, regler och bestämmelser som lärarna var tvungna att följa. De pedagogiska tidskrifterna berättar hur man i praktiken valde att omsätta dessa regler i undervisningsmetoder, pedagogik och variationer i ämnesinnehållet och vilka tankar lärarna hade i dessa frågor.

Jag har valt att inte undersöka vare sig politiska partiers skrifter eller dagstidningar eftersom min bedömning är att de idéer kring pedagogik och matematik, som eventuellt står att finna där, är av en långsiktigare och mer framåtpekande karaktär och inte på samma sätt beskriver situationen i klassrummet.

Matematiska källor

Fredrik Emil Theodor Fogelmarcks (1833-1904) lärobok *Lärokurs i differentialräkning, del 1* (Stockholm) gavs ut år 1873 och var avsedd för matematikundervisning på läroverk. Del 2 kom ut fyra år senare 1877. Fogelmarck var verksam vid KTH som professor i matematik år 1874-99 och som bibliotekarie år 1858-69, samt 1874-1902.[11]

Carl Fabian Emanuel Björlings (1839-1910) lärobok *Algebraisk analys och differentiell kalkyl* var avsedd för studier vid universitet och är utgiven 1867 och var den första större läroboken i differentialkalkyl utgiven på svenska.[12]

Cauchys lärobok *Cours d´analyse* från 1821 finns tyvärr inte översatt till svenska och jag behärskar ej det franska språket. Jag har därför varit tvungen att sätta min tillit till tre engelskspråkiga artiklar. Två artiklar av Judith V. Grabinger, fil. dr. i matematik och professor i historia vid CSU då artiklarna skrevs. [13] Artiklarna har följande rubriker: "Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous of calculus", *America Math. Monthly* (1983), och "The origins of Cauchy´s theory of the derivative", *Historia Mathematica* (1978). Den tredje artikeln är skriven av Detlef Laugwitz vid Technische Hochschule Darmstadt. Artikeln har följande rubrik: "Infinitely Small Quantities in Cauchy´s Textbooks", *Archive for History of Exact Sciences*. I dessa artiklar finns för

---

[11] Svenskt Biografiskt Lexikon

[12] Gårding (1994), s. 54

[13] Californian state university

denna uppsats användbara citat ur Cauchys texter samt förklaringar där Cauchy översätts till ett modernare matematiskt språk.

Min ambition är att genom hela arbetet betrakta källorna som dokument av sin tid, inte som delar av en rätlinjig utvecklingskedja som slutar i en fulländad modern matematik i våra dagar. Svaren på mina frågor kommer därför inte att tala om på vilken "nivå" Fogelmarck låg på med Cauchys eller dagens analys som utgångspunkt. Givetvis kan man hos Fogelmarck finna gemensamma punkter och spår som leder tillbaka till Cauchy och spår som leder fram till dagens analys, men dessa är alltså av mindre intresse. Istället vill jag kunna visa på hur den tidens analys var uppbyggd och sätta in det i ett historiskt didaktiskt sammanhang, ty det intressanta är hur Fogelmarck i sin lärobok pressenterade den moderna analysen anno 1873.

Disposition

Strukturen på uppsatsens fortsättning är så beskaffad att nästföljande kapitel ger en orienterande bakgrund om hur den svenska gymnasieskolan var organiserad under den aktuella perioden samt en kortfattad beskrivning av den matematiska analysens utveckling och vad som utmärker Cauchys arbete i sammanhanget. Den egentliga studien svaren till frågorna söks är uppdelad i två kapitel. Det ena kapitlet är döpt till "Kontext". Där är min ambition att i pedagogiska tidskrifter undersöka det kunskapsideologiska sammanhang som Fogelmarck verkade i. Det andra kapitlet är döpt till "Text", då jag där analyserar och komparerar det matematiska innehållet i Fogelmarcks, Björlings och Cauchys läroböcker. Uppsatsen avslutas med en avslutande diskussion där jag besvarar frågorna och väver ihop text med kontext. På så sätt erhålls i min mening en betydligt komplettare didaktisk beskrivning än om text och kontext hade behandlats separat.

Bakgrund

Läroverk och gymnasium

En jämförelse av dagens teoretiskt inriktade gymnasieskola, naturvetenskapligt och samhällsvetenskapligt program, med det gymnasium som rymdes inom läroverkens ram för cirka 150 år ger få likheter. I dag liksom då var studierna universitetsförberedande, men annars rör det sig om två helt skilda skolor, i två helt skilda samhällen.

Utvecklingen kan naturligtvis betraktas ur ett perspektiv där skolans syfte var att möta det framväxande industrisamhällets behov, men läroverket och gymnasiet blev samtidigt en viktig del i olika sociala gruppers professionalisering. Historikern Christina Florin och pedagogen Ulla Johansson visar i *"Där de härliga lagrarna gro…". Kultur, klass och kön i det svenska läroverket 1850-1914* på hur den lägre medelklassen under andra halvan av 1800-talet, i läroverkens och gymnasiernas breddade innehåll samt vidgade rekryteringsbas, fick en språngbräda uppåt i samhället. En språngbräda som dock relativt få kunde utnyttja. Läroverkseleverna utgjorde i början av 1900-talet fem procent av landets manliga ungdom.[14]

En förklaring till de förändringar som skedde av gymnasiet under 1800-talet står att finna i läroverkens och gymnasiets klassiska inriktning och den lilla och exklusiva rekryteringsbasen. Latinets ställning som vetenskapsspråk i Europa utmanades av de moderna nationella språken, samtidigt som yrkesgrupper utanför den traditionella ståndsindelningen ville få tillgång till en högre utbildning. Den klassiska linjen i läroverket komplementerades med en reallinje inriktad på matematik och naturkunskap. Yrkesskolor tilldelades gymnasiums status och det inrättades bl a tekniska skolor och läroverk.[15]

Den moderna analysen

Lite slapphänt brukar en del historiska personer tilldelas epiteten uppfinnare, grundare av olika områden inom vår kulturhistoria. Huruvida det är pedagogiskt fördelaktigt skall jag låta vara osagt, men det ger onekligen en förenklad bild av det förgångna, där enskilda personer lyfts till skyarna som halvgudar. En bättre beskrivning erhålls om man istället försöker urskilja utvecklingen av det vetenskapliga språket och de personer vars prestationer är en del av den processen. De så annars lysande personerna ges då en något modestare framtoning. Det gäller även för analysens och den moderna analysens

[14] Florin, Johansson (1993), s 268ff

[15] Richardson (1994), s 45 ff

utveckling. Att utse Cauchy till dess grundare är fel, då de tankar och idéer han framförde inte var nya för sin tid. Han delade dem med en rad andra matematiker och det var idéer som hade varit i omlopp under hela 1700-talet. Cauchy utmärkte sig just genom att han förmedlade dessa idéer, hur han komponerade sin framställning och lyfte fram vissa delar som mer betydelsefulla än andra.[16]

Analysen innan Cauchy

Ett viktigt steg i analysens utveckling var den successiva övergången från en geometrisk behandling till en aritmetisk behandling av matematiska problem rörande ytor och linjer. Ett stort genombrott kom i slutet av 1600-talet då Gottfried Wilhelm von Leibniz och Isaac Newton presenterade sina teorier om differentialer respektive fluxioner. Den aritmetiska behandlingens fördel var att metoden ägde en generalitet som den geometriska saknade. Tidigare krävdes vid varje ny beräkning en ny geometrisk konstruktion.[17]

Problemet med Newtons och Leibniz teorier var att de saknade ett teoretiskt fundament och då särskilt definitioner av sådana viktiga begrepp som infinitesimalen. Leibniz använde exempelvis likheten

$$x + dx = x$$

och Newton likheten

$$x + \dot{x} o = x$$

med motiveringar att *dx* resp. *o* var oändligt små kvantiteter som gjorde dem negligerbara, men som ändå gick att räkna med.[18] Kritiken mot denna inkonsekvens var från vissa håll hård. Bland kritikerna fanns som tidigare nämnts biskop Berkley.

---

[16] Grabinger (1983), s 185

[17] Lund (1995), s 59ff

[18] Lund (1995), s 36ff, 50ff

Matematikerna under 1700-talet kom dock inte nämnvärt att ta åt sig av kritiken, i den mening att de inte gjorde något åt problemet. Metoden fungerade och man lyckades presetera lösningar till problem och bevis för satser som tidigare inte var möjligt. De försök som gjordes till en formell grund för analysen var få och inte särskilt genomarbetade. Vi kan idag med en stringent analys till hands tycka att det förelåg risker för fel när det inte fanns någon teoretisk grund. Faktum var dock att 1700-talets matematiker oftast gjorde rätt, vilket Grabinger förklarar med att de hade att göra med reella variabler, funktioner med en variabel, serier och diverse praktiska tillämpningar. Därtill skall läggas matematiker som Eulers och Laplaces djupa insikt i analysens grunder, även om de var intuitiva och oklart formulerad.[19]

Analysen i början av 1800-talet

Mot slutet av 1700-talet hade dock situationen bland Europas matematiker förändrats mot ett allt större intresse för en stringentare analys. Matematikhistorikern Judith Grabinger menar att orsakerna till denna förändring kan reduceras till tre faktorer. För det första var Berkleys kritik fortfarande en nagel i ögat som man inte kunde bortse ifrån. För det andra upplevde många matematiker att de nu hade nått den punkt där nya framsteg inte längre var möjliga med de metoder som då stod till buds. Exempelvis Lagrange menade i sin brevväxling med D'Alembert, vid slutet av 1700-talet, att den högre matematiken hade blivit dekadent. En tredje faktor var att en stringentare analys ansågs ge fördelar i undervisningen.[20]

Grabinger betonar lärarens behov av att kunna förklara de mest elementära och grundläggande delarna i ett ämne. Med en solid teoretisk begreppsapparat uppnås ju en generalisation som underlättar undervisningen för både lärare och elev. Detta skall ses mot bakgrund av att matematikernas arbetssituation kom att förändras under 1700-talet. Från att i stor utsträckning ha varit knutna till olika kungliga hov kom matematikernas kunskaper att efterfrågas av militärer och senare i utbildningen av ingenjörer. Allt fler matematiker kom därför att tjäna sitt uppehälle vid olika militärskolor och tekniska

[19] Grabinger (1983), s 188

[20] Grabinger (1983), s 188ff

skolor. Många av de arbeten som behandlade analysens grunder återfinns just i läroböcker som skrevs under 1800-talet av matematiker som Weierstrass, Dedekind och Cauchy när de var verksamma som lärare vid olika lärosäten[21]

Cauchy och den moderna analysen

Cauchys framställning av derivatan med tillhörande delta-epsilon-bevis av modernt snitt, var i sig inget nytt. Lagrange använde sig av en i stora drag liknande beskrivning av derivatan och man vet att Cauchy var bekant med Lagranges arbeten på området. Det omvälvande hos Cauchy var att han slog fast att detta är derivatan. I hans arbete *Lecons sur le calcul infinitesimal* från 1823 var derivatans definition början och grunden för det fortsatta arbetet, inte som tidigare, hos andra matematiker, en tillhörande del.[22]

Analysen blev inte bara ett verktyg, där användarna hade en intuitiv förståelse för dess teoretiska grund, utan en uppsättning teorem baserade på stringenta definitioner. Definitionerna var dock, på samma sätt som tidigare, verbala, men dessa översattes av Cauchy i bevisen till en modern bevisföring med delta och epsilon.[23]

Olikheter, gränsvärden och kontinuitet

Det matematiska, och i mångt och mycket filosofiska, problemet som oklarheterna kring infinitesimalen och det oändligt lilla medförde, övervanns då Cauchy definierade det som en variabel med gränsvärdet noll. På så sätt kunde han definiera en kontinuerlig funktion som…

> …the numerical (i.e., absolute) value of the difference $f(x+\alpha) - f(x)$ decreases indefinitely with that of α… (That is,) an infinitely small increment in the variable produces always an infinitely small increment in the function itself (1821, 43).[24]

Här bör påpekas att Cauchy definierar det vi idag benämner likformig kontinuitet och man vid den aktuella tiden inte gjorde skillnad på likformig och punktvis kontinuitet.[25] Derivatan av en kontinuerlig funktion kunde då definieras som:

---

[21] Grabinger (1983), s 189f

[22] Grabinger (1978), s 380f, 384f

[23] Grabinger (1983), s 185

> If the function y = f(x) is always continuous between two given bounds (his word is "limites") of the variable x, and if we choose a value of the variable between these limits, than an infinitely small increment given to the variable will produce an infinitely small increment in the function itself. Therefore, if we set $\Delta x = i$, the two terms of the *ratio of differences* $\Delta y/\Delta x = f(x+i) - f(x) / i$ will be infinitely small quantities. But, when the two terms indefinitely and simultaneously approach the limit zero, the ratio itself can converge toward another limit, which may be positive or negative. This limit, when it exists, has a determined value for each particular value of *x*; but it varies with *x*… The form of the function which serves as the limit of the ratio $f(x+i) - f(x) / i$ will depend only on the form of the proposed function $y = f(x)$. In order to indicate this dependence, we give the new function the name *derived function* (fonction derivée, our "derivative"), and we denote it, by means of accent mark, by the notation y' or $f'(x)$. (1823, 22-23; his italics)[26]

I sina bevis använde Cauchy definitionen ovan med ett språk baserat på delta-epsilon-olikheter. Ungefär, givet ett ε, så kan δ väljas så att

$$|i| < \delta \text{ medför att } \quad f'(x) - \varepsilon < f(x+i) - f(x) / i < f'(x) + \varepsilon.$$

En teknik som överensstämmer med dagens. Här märker man också Lagranges inflytande på Cauchy. Utifrån en Taylor-utveckling av $f(x+i)$, argumenterade Lagrange att

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + iV$$

där V var en funktion av x och i och gick mot noll med i. Givet ett D kan i väljas tillräckligt litet så att V ligger mellan $-D$ och $+D$. Lagrange menade att givet vilket som helst D, kan man finna ett i så att:

"$f(x+i) - f(x)$ ligger mellan $i(f'(x) - D)$ och $i(f'(x) + D)$." (2)

(Lagrange 1806, 87; cp. 1813, 77).

---

[24] Grabinger (1978), s 382

[25] Grabinger (1978), s 382

[26] Grabinger (1978), s 382f

Men återigen betraktade Lagrange (2) som en del av teorin om derivata och inte en definition av derivata som hos Cauchy.[27]

Det centrala hos Cauchy, och det som gjorde honom banbrytande, var alltså hans gränsvärdesdefinition och hur han utifrån den definierade kontinuitet, deriverbarhet samt integralen. Begrepp som utöver funktionsbegreppet kom att utgöra grunden för analysens fortsatta utveckling.

Kontext

Läroverksstadgar från år 1856, 1859 och 1878

Eftersom majoriteten av matematiklärarna på läroverken var disputerade, hade de en naturligare kontakt med universitetsvärlden och den högre matematiken än idag. Det är därför svårt att avgöra om analysen "smög" sig in i undervisningen. Eventuellt fanns ju kunskapen hos lärarna.

Det formella införandet av differentialräkning, reglerat i myndigheters styrdokument, återfinns i 1859 års läroverksstadgar. I undervisningsplanen för sjunde klassen klassisk linje skulle matematikundervisningen innehålla:

> Eqvationer af 1:sta och 2:dra graden med flera obekanta. Problemer. Läran om progressioner och logarithmer, jemte öfning i logarithm-tabellers bruk. Geometriska problemer. Konstruktion af analytiska expressioner. Elementerna af Plana Trigonometrien.[28]

I sjunde klassen icke-klassisk linje skulle matematikundervisningen innehålla:

> Analytiska expressionerns konstruktion. Plan trigonometri. Analytiska Geometriens elementer. Repetition, företrädeswis genom problemer.[29]

Läsaren bör här vara observant på att studier vid läroverket påbörjades vid motsvarande fjärde årskursen i dagens skolsystem och att "Sjette klassen" och "Sjunde klassen" var tvååriga. Den "Sjunde klassen" motsvarar alltså det två sista åren på dagens gymnasieskola.

---

[27] Grabinger (1978), s 384f

[28] 1859 års läroverksstadgar, s 116

[29] 1859 års läroverksstadgar, s 121

De delar i matematikundervisningen som vid en jämförelse saknas på den icke-klassiska linjen i “Sjunde klass” återfinns i den “Sjette klassen”. De “analytiska expressionernas” placering i texten ovan pekar på vilken prioritet analysen hade på de olika linjerna. Dessutom innehöll den icke-klassiska linjen ett större timantal i matematik.[30] Observera även formuleringen “Repetition, företrädeswis genom problemer” som fanns på icke-klassisk linje, men inte på den klassiska. Det sammanfaller med bilden av reallinjens rationella inriktning mot praktiska tillämpningar.

En jämförelse av matematikämnets innehåll i 1856 års läroverksstadgar visar att analysen saknas helt på den klassiska linjens sjunde och åttonde klasser. Tydligen gjordes en ändring av årskursindelningen i och med 1859 års läroverksstadgar. I den åttonde klassen på icke klassiska linjen återfinns emellertid “Elementerne af Analytisk och Deskreptiv Geometri.”[31]

I och med 1859 års läroverksstadga var alltså analysen formellt en del av matematikundervisningen vid läroverken i Sverige. Intressant är att formuleringen “Analytiska expressionerns konstruktion” eller annan formulering rörande analysen ej återfinns i undervisningsplanen för klassisk linje i 1878 års läroverksstadgar, vilket jag tolkar som att analysen försvann från den klassiska linjen. Däremot kvarstod analysen som en del av matematikämnet på icke-klassisk linje, som år 1878 benämndes “reallinjen”.[32]

Pedagogisk tidsskrift 1867-1880

Pedagogisk Tidskrift gavs ut mellan åren 1865 och 1971 och var ett pedagogiskt forum för lärare vid framför allt läroverken. Tidskriften innehöll längre artiklar med ett allmänt pedagogiskt såväl som utbildningspolitiskt innehåll, läroboksrecensioner och kungörelser rörande läroverken. Jag har begränsat min undersökning av tidskriften till åren 1867-1880. Den matematikmetodiska och matematikdidaktiska diskussionen var dock sparsam och såväl recension av Fogelmarcks lärobok och inlägg av Fogelmarck själv återfinnes

[30] 1859 års läroverksstadgar, s 117

[31] 1856 års läroverksstadgar, s 55, 58

[32] 1878 års skollag

inte. Läroverkslektorn A T Bergius gav emellertid år 1868 i artikeln “Om skolundervisning i matematik” sin syn på matematik som skolämne.

“Om skolundervisning i Matematik”

Syftet med artikeln var att besvara de tre frågorna:

a) Hur hade skolämnet matematik följt den vetenskapliga matematikens utveckling?

b) Hade en sådan utveckling följt motsvarande utveckling i de andra kulturländerna?

c) Vilka åtgärder behövdes för att höja skolundervisningen i matematik?[33]

Bergius gjorde en uppdelning i “elementarmatematik” och “högre matematik.” Vad som utgjort de båda kategorierna hade enligt Bergius skiftat, såväl tidsmässigt som geografiskt. Som exempel angav Bergius hur Napiers logaritmer ”vandrat” från den högre matematiken till elementarmatematiken. Differential och integralräkning tillhörde år 1868 den högre matematiken, enligt Bergius.

a) I artikeln utvecklar Bergius sin syn på utvecklingen av skolämnet matematik.

> Till hvad nu blivit anfört bör likväl läggas, att vissa discipliner, och dessa ofta de betydelsefullaste, redan vid sitt första framträdande för det menskliga medvetandet, uppstått med den klarhet och bestämdhet, att de inom en jemförelsevis kort tid så mycket inträngt i det allmänna medvetandet, att de ansetts böra tillhöra kretsen af elementarskolans lärogrenar. Men det är framför allt denna egenskap af klarhet och bestämdhet, som, jemte dess betydelse för den menskliga bildningens utveckling, gör en lärogren vigtig såsom ämne för elementarstudiet, och det är först sedan ett nytt läroämne, hvars vigt och betydelse för bildningen redan lång tid varit obestridlig, hunnit utbildas till en sådan klarhet och bestämdhet i formellt hänseende, att det kan kallas *lättfattligt*, som det inrymmes bland elemenmarskolans läroämnen. Hvem kan väl bestrida den stora vigt och betydelse differential- och integralräkningen har för bildningen, och hvem är väl okunnig om hvilka stora resultater som vunnits genom dess tillämpning i alla vetenskapsgrenar, der mathematiska beräkningar finna någon användning; men dock hafva redan mer än 200 år förflutit sedan Cartesii, Leibnitz’ och Newtons, och 100 år sedan Eulers tidsålder, utan att denna del af den matematiska vetenskapen en till sina första elementer hunnit inkomma i elementarskolans lärosalar.[34]

---

[33] *Pedagogisk Tidsskrift* (1868), s 213

[34] *Pedagogisk Tidsskrift* (1868), s 214

Bergius propagerade vidare för att en “klar och lättfattlig” framställning underlättade lärjungens överblick av den tidigare obekanta inhämtade kunskapen. Enligt Bergius var den rådande uppbyggnaden av läroböcker i matematik mindre bra då den främjade rutinmässig lösning av ett stort antal likformiga uppgifter, uppgifter som dessutom hade ringa anknytning till lärjungens dagliga liv. Han utvecklade även sina tankar kring skolmatematikens och den högre matematikens legitimitet. Förutom den rent matematiska bildningen skänkte undervisningen i matematik även en allmän noggrannhet och stränghet i resonemang utanför matematiken.

Han berörde i ytterligare en passage differentialkalkylen som en del av skolmatematiken i samband med klarhet och lättfattlighet.

> Genom den stora utveckling, som den s.k högre analysen under innevarande århundrade vunnit och genom den klarhet och lättfattlighet, hvartill den formella framställningen af den samma genom en Lagrange’s, Poisson’s, Cauchys’s m. fl. arbeten kommit, anse vi således tiden snart vara kommen , om den icke redan är inne, att göra elementarskolans lärjungar delaktiga af de fördelar, som inhemtandet af de första elementerna i detta vetenskapsämne otvifvelaktigt bör medföra.[35]

Hos Bergius återfinns alltså en tydlig idé om hur analysen, först med en stringent genomarbetad teoretisk grund, kan införas som en del av skolmatematiken. Genom framställningens enkelhet kunde den sippra ned från den högre matematiken till elementär matematiken.

b) I en jämförelse med matematikundervisningen i andra Europeiska länder hävdade Bergius att den svenska matematikundervisningen i alltför stor utsträckning byggde på mekanisk räkning. I de fall där läroboksförfattarna försökte vidga lärjungarnas perspektiv var böckerna för “lärda”. Alltför filosofiska utsvävningar var likaledes negativt då lärjungarna tappade tråden. Bergius förespråkade istället en lärobok som byggde på enkelhet och lättfattlighet där förståndsutveckling var ledordet. Lärarens förmåga att väcka lärjungens intresse var viktigt; en förmåga som vilade på lärarens djupa kunskaper i matematik. En lärobok i matematik skulle vara så utformad att den “främjade” tanken och att elevens utveckling byggde på att förståelse och insikt av det tidigare genomgångna.

[35] *Pedagogisk Tidsskrift* (1868), s 216

Matematik undervisningen skulle alltså enligt Bergius vara kumulativ. En utveckling mot den typ av matematikundervisning som Bergius förespråkade var emellertid inte problemfri.[36]

c) Bergius angav följande hinder för matematikundervisningens utveckling och de kan hänföras till “traditionens makt”.

- Matematiklärarna i landet hade invanda rutiner. Varför ändra på dem?
- Förlagens ovilja att trycka modernare läroböcker, då författarna inte ofta hade någon längre praktik bakom sig eller någon fast tjänst.

Den av Bergius önskade utveckling skulle åstadkommas av att berörda skolmyndigheter, d v s staten, agerade och angav direktiv som främjade utvecklingen mot en modernare matematikundervisning.[37]

Lärjungarnas förståelse av matematik

Bergius förespråkar en matematikundervisning där mekanisk inlärning av rutinuppgifter förkastas till förmån för lärjungens självständiga förmåga att lösa konkreta matematiska problem. Han är dock inte ensam i denna fråga. Samma år som Bergius ger L. Phragmén uttryck för liknande tankar. Enligt Phragmén lärde sig lärjungarna i Sverige framför allt en mekanisk räkning utan insikt och förståelse. De tyska läroverken framhölls som förebild.[38] År 1869 skrev E G Björling, för övrigt far till C F E Björling, ett referat av 1868 år rektorsmöte beträffande matematikundervisningen. Han vänder sig där mot matematikfientligheten bland kollegorna, där även några räknades till det egna facket, samtidigt som han pekar på matematikämnets “dubbla egenskap” av att utveckla “själsförmögenheterna och bereda för samfundslifvets praktiska förhållanden”.[39] År 1867 lämnade E G Björling ett genmäle på en recension av hans exempelsamling. I genmälet framgår tydligt att Björling förespråkade en matematikundervisning där lärjungens

---

[36] *Pedagogisk Tidsskrift* (1868), s 216ff

[37] *Pedagogisk Tidsskrift* (1868), s 218ff

[38] *Pedagogisk Tidsskrift* (1868), s 284ff

[39] *Pedagogisk Tidsskrift* (1869), s 60f

förmåga att lösa praktiska problem inom framför allt ekonomi och naturvetenskap uppmuntrades.[40]

Tankar om matematiklärobokens utformning, överensstämmande med Bergius, finns hos NN:s referat av “Kommisionen om undervisningen i matematik och naturvetenskap på elementar läroverken”, där NN får antas vara en av redaktörerna för tidskriften. NN förespråkade att läroboken framför allt skulle tjäna som stöd för minnet och ej åt självstudium. Läroboken skulle också så nära som möjligt följa vetenskapen i spåren. NN sympatiserade, liksom Bergius, med tanken på lärobokens enkelhet där tanken lätt kunde följas. Exempelsamlingen skulle uppmuntra lärjungarna till ej enbart mekanisk räkning, samtidigt som den anknöt till lärjungarnas omgivning.[41]

Den goda skolmatematiken

De artiklar i *Pedagogisk Tidskrift* som skrevs från1867 till 1880 angående matematikmetodik och matematikdidaktik ställde följande krav på en god undervisning och goda läroböcker i skolämnet matematik.

1) Enkelhet och lättfattlighet i den mening att ett så stort antal lärjungar som möjligt skulle kunna förstå och kunna tillgodogöra sig undervisningen.
2) Ha sin teoretiska grund i den högre matematiken vid universiteten under förutsättning att det kunde uppfylla kraven från punkt 1.
3) Stimulera lärjungarnas självständiga och kreativa användning av och studier i matematik. Läroboken skulle vara ett stöd för lärjungens studier i matematik, inte vara ett mål i sig, och där var lärarens roll viktig.
4) Anknyta till praktiska problem i lärjungens vardag eller framtida vardag, vilket stimulerade lärjungens lärande. Viktiga områden att anknyta till var naturvetenskap och ekonomi.

---

[40] *Pedagogisk Tidsskrift* (1867), s 62ff

[41] *Pedagogisk Tidsskrift* (1863), s 54ff

Tidsskrift för matematik och fysik, 1868-1871

Tidsskrift för Matematik och Fysik var tillägnad den svenska elementar undervisningen, d v s läroverken i landet, och inriktade sig, som rubriken anger, på matematik och fysik. Utgivare var Göran Dillner, huvudredaktör, samt Frans W. Hultman och T. Rob. Thalén. Syftet med tidskriften var att verka "för det matematiska och fysiska studiets allt vidare utbredande i vårt land".[42] I innehållsförteckningarna för de aktuella årgångarna återfinns uppsatser rörande då nya rön inom matematik och fysik, men också historiska tillbaka blickar på framför allt skolmatematiken. Vidare innehöll tidskriften lösningar till olika problem, bevis av satser, anmälningar av läroböcker, prisuppgifter och kungörelser rörande läroverken och matematik/fysik undervisningen. Bland författarna till olika artiklar och uppsatser märktes bl a Malmsten, Leffler och Björling, såväl den äldre som den yngre. Fogelmarck återfinns inte bland artikelförfattarna.

Frans W Hultmans recension

Det är i samband med en bokrecension av tio stycken läroböcker i aritmetik som en diskussion kring pedagogik och matematik uppstår. Diskussionen rör dock inte direkt undervisning i differentialkalkyl med tillhörande läroböcker. Likväl är de ställningstagande som debattörerna gör intressanta, då de kastar ett ljus över dåtidens syn på matematik i allmänhet. Observera dock att eleverna fick undervisning i aritmetik på de lägre stadierna.

Recensent av de tio läroböckerna var Frans W. Hultman och hans argumentation är av särskilt intresse, eftersom den kan anses representera tidskriftens ställning i frågan. Hultman konstaterade att de tio läroböckerna var en protest mot gångna tiders pedagogiska grundsats, vilken han formulerade som,

> den räknemetod är bäst, som lär att med minsta ansträngning af tanken uträkna ett problem.[43]

Denna pedagogiska grundtes för läroböcker var enligt Hultman den dominerande inom matematiken även under 1860-talet. Den dominerande boken, på just aritmetikens

---

[42] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s IV

[43] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 234

område, var Zweigbergks lärobok i räknekonsten och Hultman menade att den så varit under ett tjugotal år. Grundproblemet med en sådan inställning till undervisningen skulle ha varit att eleverna svårligen begrep vad de egentligen gjorde och risken för felräkningar i situationer utanför skolan ansågs stor.[44] Denna pedagogiska metod, som enligt Hultman återfinns hos Zweigbergk, betecknar jag i sammanhanget som traditionell och det är den som Hultman vänder sig emot.

I sin recension av de tio läroböckerna använde sig Hultman av följande kategorisering för hur läroböckerna var utformade med avseende på eleverna.

1. Eleven skulle klart inse lagarna för de aritmetiska operationerna. Eleven skulle vara receptiv och lära sig använda olika för denne uppställda matematiska regler.
2. Undervisningen skulle syfta till att utveckla elevernas tankearbete på aritmetiska uppgifter och indirekt på frågor inom "mensklig forskning". Eleven skulle vara produktiv i den mening att matematiska regler och samband skulle, om inte sig upptäckas, så emellertid behovet av dem.

Enligt Hultman främjade den förra kategorin mekaniskt räknande, medan den senare främjade eftertanke och förståelse. I sina recensioner tog Hultman ställning för den senare kategorin.[45]

Vi finner i Hultmans recension en traditionell pedagogik som var mindre bra och en modernare pedagogik som var bra. Sin värdering grundar han på hur undervisningen främjade elevens utveckling.

För matematikundervisningen på de högre stadierna hade dock Hultman en annan uppfattning.

> Vid akademien eller vid de högre klasserna af elementarskolan anse vi däremot att äfven den andra metoden kan komma i fråga.[46]

Av sammanhanget får antas att med "den andra metoden" avses den "traditionella pedagogik", vars tillämpning på lägre stadier, Hultman förhöll sig kritisk till.

---

[44] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 234

[45] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 234f

[46] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 235

Genmälet på Hultmans recension

En av de läroboksförfattare som Hultman kritiserade för att främja en allt för traditionell undervisning var Guldbr. Elowson. I sin artikel “Om den aritmetiska undervisningsmetoden”, uppdelad på 1868 och 1869 årgångar, besvarade han Hultmans kritik. Inledningsvis deklarerade Elowson sin uppfattning om hur inlärning borde ske.

1. Eleverna skulle ha en klar och tydlig uppfattning av aritmetikens lagar.
2. Eleverna skulle behärska räkneoperationernas användning i enskilda fall.
3. Eleverna skulle ha färdighet i räkneoperationernas utförande.[47]

Elowson ansåg allmänt att den praktiska inriktningen på senare år hade varit för stor och framhöll aritmetikens, i kombination med enkel huvudräkning, förståndsodlande fördelar.[48]

Vad gäller kritiken mot sin lärobok, tog Elowson i artikeln avstånd från Hultmans argumentation, där Hultman förknippade Elowson med en traditionell pedagogik som byggde på receptivitet. Argumentet som Elowson framförde var att Hultmans dikotomi receptivitet/produktivitet var mindre lämplig i en pedagogisk diskussion. Elowson menade att eftersom inlärning krävde någon form av tankeverksamhet av eleven, så kunde en inlärning baserad på fullständig receptivitet inte existera, det var rent av en motsägelse. Elevens produktivitet låg i användandet av det recipierade, d v s det som eleven tidigare hade lärt. Elowson föredrog istället dikotomin genetisk/heuristisk. Heuristik definierades av Elowson som uppsökandet av den obekanta grunden till en given företeelse. Utifrån den definitionen pekade Elowson på heuristikens nackdel som pedagogisk metod inom matematik undervisningen, eftersom man inom matematiken oftast hade grunderna eller förhållandena klara och utifrån dem deducerar ett svar. Vidare menade Elowson att om man såg heuristiken som en regression ifrån följden till grunden, så vore det otänkbart då eleven i så fall vore tvungen att uppfinna en regel som det tagit vetenskapsmän lång tid att komma fram till.[49]

---

[47] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 294

[48] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 294ff

[49] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 52ff

Utifrån Elowsons ställningstagande ovan förespråkade han en genetiskt inriktad pedagogik i matematikundervisningen. I SAOB definieras genetisk som en

> vetenskaplig metod som (i olikhet med den deskriptiva) vid behandling av begrepp eller en företeelse och dylikt anger dess uppkomst och utveckling.[50]

Att Elowson framställning var genetisk i överensstämmelse med definitionen ovan bekräftas i Hultmans kritik av läroboken.

> Såsom vi nyss antytt, anse vi denna bok, tagen i sin helhet, vara skrifven för ynglingar på ett högre stadium, alldenstund alla räknelagar framställes i vidlyftiga regler, hvilka sedan strängt bevisas på grund af föregående definitioner, …[51]

Hultman menade att Elowson lärobok förutsatte en traditionell och receptiv pedagogik, då eleverna inte kan ta till sig och förstå Elowsons alltför teoretiska resonemang.

Genetisk och heuristisk pedagogik

Utifrån debattinläggen i de båda tidskrifterna urskiljs två argumentationslinjer som följer två metoder. Metoder som jag väljer att benämna som den genetiska och den heuristiska. Ett genomgående tema hos heuristikens förespråkare var att eleven självständigt skulle kunna lösa praktiska problem, men även hos den genetiskt inriktade Elowson var problemlösning en viktig del av skolmatematiken. I framför allt *Tidskrift för Matematik och Fysik* är matematikens koppling till fysik och naturvetenskap tydlig, men tidskriften innehåller dessutom en rad förslag på olika ekonomiska tillämpningar. Bland förslagen märks beräkningar av avkastning på aktier och obligationer, försäkringspremier och skattesatser, bl a bifogades i en artikel utdrag ur ett försäkringsbolags räkenskaper. Även på de lägre stadierna i läroverken ansågs sådana problem med ekonomisk tillämpning lämpliga.

Både Bergius och Elowson, vilka kan ses som representanter för heuristiken respektive genetiken, betraktade skolmatematiken som allmänbildande. Studier i matematik främjade elevernas logiska tänkande, matematiken var ”förståndsodlande”.

---

[50] SAOB

[51] *Tidsskrift för Matematik och Fysik* (1868), s 235f

Utifrån artiklarna i de båda tidskrifterna kan man urskilja olika syften med skolmatematiken.

I. Förmedla kunskaper i matematik.
II. Ge eleverna en förmåga att lösa praktiska problem.
III. Träna elevernas logiska tänkande.

Syftet att eleverna skulle kunna lösa praktiska kan dels grunda sig i idén att fostra dugliga samhällsmedborgare, dels att föra in matematiken på andra områden och skapa förutsättningar för elevens vidare studier.

Både den heuristiska och genetiska metoden såg i skolmatematiken dess nytta utanför ämnet i sig, men de skiljde sig åt i synen på hur matematikundervisningen skulle läggas upp. En förenklad beskrivning av de genetiska och heuristiska metoderna inom pedagogiken, som de kommer till uttryck i tidskrifterna, vore att påstå att en genetisk metod utgick från det allmänna och abstrakta för att förklara det enskilda och konkreta. Den heuristiska metoden utgick däremot från det enskilda och konkreta för att förklara och skapa förståelse för det allmänna och abstrakta. Förenklingen ovan äger emellertid en viktig poäng då den tydligt visar på de båda pedagogiska metodernas fokus. Den genetiska satte matematiken som vetenskap i centrum. Den heuristiska metoden satte eleven och dennes utveckling i centrum. De båda tidskrifternas officiella hållning var att en heuristiskt inriktad undervisning i matematik var att föredra framför en traditionell genetisk inriktning.

Text

Fogelmarcks lärobok i differentialräkning, del I

Reella tal och funktioner

Fogelmarcks lärobok inleds med ett avsnitt om de reella talen samt de komplexa talen. De reella talen är antingen positiva eller negativa med nollan som gräns där emellan. Nollan är reell och större än alla negativa tal, samt mindre än alla positiva talen. De reella talen delas in i de hela talen och bråktalen och utgör de rationella talen å ena sidan , de irrationella talen å andra sidan. De irrationella talen är de rationella talens “motsats”, vars värde inte kan “fullt noggrant uttryckas med vanliga siffror, utan endast närmevis.” Därtill läggs det oändligt stora talet som…

> vexer och till storleken öfverstiger hvilket uppgifvet ändligt tal som heldst, säges vara *oändligt stort* och betecknas algebraiskt med tecknet ∞. *Detta tecken är följaktligen ingen siffra* och utmärker icke något bestämdtangifbart tal, utankan uti serskilda fall, till och men på serskilda ställen i en och samma formel, föreställa qvantiteter af mycket olika inbördes storlek.[52]

Negativa tal som avtar obegränsat betecknas med -∞. De komplexa talen består av en realdel *a* och en imaginär del *bi*, där *b* är ett reellt tal. Den “imaginära enheten” *i* definieras via $i^2 = -1$

I samband med de olika typerna av tal och den “obegränsade delningen av talenheten” behandlar Fogelmarck kontinuitetsbegreppet.

> …mellan två gifna tal huru många nya tal som heldst kunna inskjutas så beskaffade, att skilnaden mellan två på varandra följande bland dem är mindre än hvarje angifbart tal; man är derföre berättigad att vid *hvarje* ställe af talraden tänka sig ett tal; eller med andra ord, hela raden af reela tal mellan -∞ och +∞ bör betraktas såsom *oafbruten* eller *kontinuerlig*.[53]

En storhet kan antingen vara konstant och oföränderlig, eller variabel och föränderlig. En variabel storhet sägs vara en funktion av en annan variabel storhet om den förra storheten är beroende av den senare, som i sin tur är oberoende och kan ges godtyckliga värden. För att tydliggöra begreppen drar Fogelmarck paralleller med t ex en kulas volym som en funktion av dess radie, där radien är att betrakta som en oberoende variabel. En funktion kan vidare bero av flera oberoende variabler, t ex en rektangels yta som var beroende av bas och höjd. Fogelmarck påpekar också att sambandet mellan två variabla storheter kan vara obekant eller omöjligt att beskriva analytiskt. Han går dock inte närmare in på detta problem.[54]

Efter att ha definierat grundläggande begrepp rörande tal och funktioner går Fogelmarck in på, i matematisk mening, mer tekniskt betonade områden, bl a tar han

---

[52] Fogelmarck (1873), s 2

[53] Fogelmarck (1873), s 2

[54] Fogelmarck (1873), s 2f

kortfattat upp olika typer av funktioner. Potensfunktioner, exponentialfunktioner och logaritmiska funktioner tillhörde de enklare ur “elementarmathematiken”. Därefter behandlas de s k *goniometriska* funktionerna, vilka även benämndes de *direkta cirkulära funktionerna*, och som utgjordes av de s k trigonometriska talen eller de trigonometriska linjerna, vilket motsvarar dagens trigonometriska funktioner:

$\sin x \qquad \cos x \qquad \tan x \qquad \cot x$ m fl

Den oberoende variabeln x är en cirkelbåge vars längd mäts med radien som enhet. Han tar även upp förhållandet mellan radianer och gradtal, där han utgår från ett gradantal på 360°. Därefter behandlas arcusfunktionerna som han även benämner *omvända cirkulära funktioner* eller *cyklometriska funktioner*, där den första erhölls ur ekvationen $x = \sin u$ när man “upplöser eqvationen i afseende på u.” Eftersom olika bågar kunde svara mot samma sinusvärde, d v s att $x = \sin u$ inte är en 1-1 funktion och $u=\alpha+2\pi n$, så lät man *arcsin x* beteckna det minsta värdet som kunde antas i absolut mening. Samma resonemang som ovan appliceras på övriga trigonometriska funktioner.
Fogelmarck kopplar enbart de trigonometriska funktionerna, samt arcusfunktionerna till enhetscirkeln.[55]

Avsnittet med funktioner avslutas med en allmännare del där beteckningar och kategorisering av funktioner tas upp. Notationen är *f(x), f(x,y), F(x)* o s v, men istället för explicita och implicita funktioner föredrar Fogelmarck att använda begreppsparet utvecklad och outvecklad funktion. Funktioner kategoriseras i entydiga och mångtydiga, där en icke entydig funktion är mångtydig och där entydig och mångtydig funktion likställs med kontinuerlig respektive diskontinuerlig funktion. Dessutom förutsätts att utvecklade funktioner, d v s explicit uttryckta funktioner, är entydiga.[56]

Funktionerna delas upp i algebraiska och transcendenta funktioner där de algebraiska funktionerna baserades på de fyra räknesätten samt potenser. Motsatsen var transcendenta funktioner. De algebraiska funktionerna delas i sin tur in i rationella och

[55] Fogelmarck (1873), s 4ff

[56] Fogelmarck (1873), s 8f

irrationella funktioner och återigen använder Fogelmarck andra beteckningar än dagens gängse, nämligen hela och brutna funktioner. En rationell hel funktion har, liksom idag, formen

$$a + bx + cx^2 + ... + gx^m$$

där exponenterna var heltal och *m* angav funktionens grad. I detta sammanhang och även senare i boken använder sig Fogelmarck inte av ordet polynom.[57]

Fogelmarck skiljer också på enkel och sammansatt funktion, där en sammansatt funktion är en funktion av en funktion, d v s $f(g(x))$. Slutligen definieras den omvända, d v s den inversa, funktionen som:

> Om två variabla äro sammanbundna med hvarandra genom en eqvation hvilkensomheldst, så är i allmänhet hvardera variabeln en funktion af den andra; två dylika funktioner benämnas hvarandras *omvända* eller *inversa funktioner*.[58]

Gränsvärde av en variabel

Fogelmarck definierar gränsvärde på följande sätt:

> Om en variabel storhet *u*, efterhvartannat antager värden, hvilka närma sig en konstant storhet, *G*, på det sätt, att skillnaden *u* - *G* slutligen blir mindre än varje uppgifven storhet, huru liten som heldst, så säges *G* utgöra *gränsen* eller *limes* för *u*, hvilket tecknas sålunda:
>
> $$\lim u = G \qquad (0)$$
>
> Det kan härvid inträffa, att *u* - *G* är alltid positiv, alltid negativ, eller ömsom positiv, ömsom negativ.[59]

En definition som överensstämmer med Cauchys:

> When the successive values attributed to a variable approach indefinitely a fixed value so as to end by differing from it by as little as one wishes, this last fixed value is called the *limit* of all the others.[60] (1)

[57] Fogelmarck (1873), s 10

[58] Fogelmarck (1873), s 11

[59] Fogelmarck (1873), s 14f

[60] Laugwitz (1986), s 263

Fogelmarcks definition saknar emellertid passagen om ett indefinit närmande, men han har anammat Cauchys teknik med olikheter och han definierar det oändligt lilla som “en variabel qvantitet, som konvergerar mot noll.”

> Skillnaden mellan en variabel qvantitet och denna qvantitets gränsvärde är alltså oändligt liten.[61]

Cauchy definierade infinitesimalen på ett liknade vis, d v s en variabel med gränsvärdet 0.[62] Björling skriver på följande vis om gränsvärden.

> Om en variabel *x* succesivt antager valörer, som allt mer och mer närma sig en viss konstant valör *a* och *x* kan göras numeriskt mindre än hvilken qvantitet, man än må uppgiva, så säges *x* närma sig eller *tendera indefinit* mot *a*, och *a* säges vara *limes* eller *gränsvärde* för *x*.
> Detta förhållande tecknas sålunda: lim x=a.[63]

I Björlings definition återfinns likaså ett tydligt släktskap med Cauchy och ännu tydligare blir Cauchys påverkan då Björling betecknar det oändligt lilla, “som har 0 till limes”, med δ eller ε. Det oändligt stora betecknades med ω. Noterbart är att Björling tydligt påpekade att tecknet ∞ inte var ett riktigt tal och att “all slags kalkyl med detta” var otillåten. Till skillnad från Fogelmarck och Cauchy innehöll Björlings definition av gränsvärden inte någon passage om “skillnader”.

Funktioner och gränsvärde

Angående gränsvärden för funktioner skriver Fogelmarck att…

> Om $u = f(x)$ och om *g* är den gräns, till vilken *x* bör >>närma sig>>, eller, såsom man vanligen säger >>konvergerar>>, för att *u* samtidigt skall konvergera mot *G*, så sägas *g* och *G* vara *motsvarande gränser* för *x* och *u*, hvilket plägar betecknas sålunda:

$$\lim u = G, \quad (x = g); \qquad eller \quad \lim_{(x=g)} u = G \tag{2}$$ [64]

---

[61] Fogelmarck (1873), s 15

[62] Grabinger (1978), s 188

[63] Björling (1867), s 11

[64] Fogelmarck (1873), s 14ff

Observera här att Fogelmarck inte tog hänsyn till huruvida funktionen var definierad i närheten av *g*, inte heller fanns något resonemang kring vänster- och högergränsvärde. Motsvarande definition återfinns även hos Cauchy då *x* går mot 0 och f(*x*+1) - f(*x*) är ett ändligt tal *k*. Cauchy skiljer sig dock helt från Fogelmarck med bruket av ett δ-ε-resonemang, men Grabinger påpekar att Cauchy använde just olikheter i bevis av satser, inte i satserna.[65]

> Designate by ε a number as small as desired. Since the increasing values of *x* will make the difference f(*x*+1) - f(*x*) converge to the limit *k*, we can give to *h* a value sufficiently large so that, *x* being equal to or greater than *h*, the difference in question is included between.[66]

Passagen om gränsvärden hos Fogelmarck avslutas med följande axiom:

> *Om två variabla storheter förblifva sinsemellan lika uti alla storleksgrader, som af dem genomgås, och om den ena af dem konvergerar mot en gräns, så konvergerar den andra mot samma gräns eller mot en lika gräns.*[67] (3)

Satserna (2) och (3) ska då jämföras med den moderna informella definition av gränsvärde som ges i *Calculus, a complete course* av Robert A. Adams m fl:

> If *f(x)* is defined for all *x* near (on either side of) *a*, except possibly at *a* itself, and if we can ensure that *f(x)* is as close as we want to *L* by taking *x* close enough to *a* (on either side of *a*), we say that the function *f* approaches the **limit** *L as x* approaches *a*, and we write
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad (4)$$[68]

Fogelmarcks satser (2) och (3) uppfyller alltså inte den exakthet som idag krävs av en rigorös analys och som återfinns i en formellare δ-ε-definition av ett gränsvärde. Är då valet av en informellare definition ett utslag av pedagogiska ambitioner hos Fogelmarck? Antagligen inte, då den definition (1) som fanns hos Cauchy och andra var just den definition som fanns att tillgå. Den formellare δ-ε-versionen, som vi idag använder, var

---

[65] Grabinger (1978), s 382

[66] Grabinger (1978), s 382

[67] Fogelmarck (1873), s 15

[68] Adams (1995), s 59

en översättning till δ-ε-språk och var en del av Cauchys bevisföring.[69] Rimligtvis fanns det ingen anledning för Fogelmarck att plocka en del av ett bevis och använda det som definition samtidigt som det fanns en definition angiven. Även i Björlings samtida universitetslärobok i differentialkalkyl återfinns en hos Fogelmarck liknande definition av gränsvärde.

> Om en variabel *x* succesivt antager valörer, som allt mer och mer närma sig en viss konstant valör *a*, och det *så*, att skillnaden mellan *a* och *x* kan göras numeriskt mindre än hvilken qvantitet, man än må uppgiva, så säges *x* närma sig eller *tendera indefinit* mot *a*, och *a* säges vara *limes* eller *gränsvärde* för *x*.[70]

Björling fortsatte:

> Theorien för limites eller gränsvärden visar sig först *då* verkligt fruktbärande, när fråga blir om dependenta variabler, funktioner. Någon särskild definition för dessa limites behöfves naturligtvis icke. Vi anmärcke blott, att beteckningen
>
> $$\lim_{x=a} f(x) = b$$
>
> betyder att, *då x tenderar indefinit mot a, så tenderar på samma gång f(x) indefinit mot b.*[71]

Till skillnad mot Fogelmarck har Björling ett resonemang kring indefinit närmande, men Björling närmar sig inte den av Cauchy använda teknik med olikheter, vilket Fogelmarck gjorde i (0).

Kontinuerliga funktioner

Tidigt i boken berör Fogelmarck kontinuitetsbegreppet i samband med de reella talen. Kontinuitet definieras som när en variabel storhet, vid övergången från ett värde till ett annat, genomgår alla mellanliggande värden. Fogelmarck slår även fast att en oberoende variabel kunde betraktas som kontinuerligt föränderlig eftersom den kan ges vilka värden

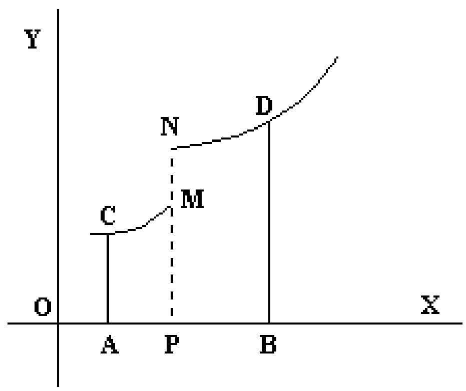
[69] Grabinger (1978), s 382

[70] Björling (1867), s 11

[71] Björling (1867), s 12

som helst.[72] En explicitare definition och då i samband med funktioner kommer dock längre bak i boken i samband med "Funktioners geometriska föreställande."

Definitionen av en kontinuerlig funktion inleds med en definition av den diskontinuerliga funktionen och här begagnas en av de få illustrationer som finns i boken. En funktion är diskontinuerlig om *f(x)* vid värdet *x=c* övergår från värdet lim *f(c-k)* till värdet lim *f(c+h)*, då de positiva kvantiteterna *k* och *h* konvergerar mot noll, utan att genomgå de mellanliggande värdena.



En kontinuerlig funktion definieras då som:

en funktion, f(x), är vid ett visst x-värde kontinuerlig, om , för detta x-värde,

$$\lim\left[f(x+h)-f(x-k)\right]=0, \qquad (5a)$$

då *k* och *h* konvergera mot noll.

Som ett komplement till (5a) anger Fogelmarck relationen

$$\lim\frac{f(x+h)}{f(x-k)}=1$$

med motivationen att den ibland var praktiskare att använda.[73] Fogelmarck använder en typ av δ-ε-resonemang som återfinns hos Cauchy. Cauchy definierade en kontinuerlig funktion som…

---

[72] Fogelmarck (1873), s 15

…the numerical [i.e., absolute] value of the difference $f(x+\alpha) - f(x)$ decreases indefinitely with that of α… [That is,] an infinitely small increment in the variable produces always an infinitely small increment in the function itself.[74] (5b)

Vid en jämförelse med Björlings lärobok finns likheter, men också skillnader.

Vi förutsätta i denna händelse alltid, att den i funktionen ingående independenta variabeln varierar kontinuerligt, och kunna, i analogi med det föregående, säga, att *y* eller *f(x)* är kontinuerlig mellan $x=a$ och $x=b$, om, under det *x* genomlöper det nämda intervallet, *y* äfvenledes genomlöper sitt motsvarande *med oändligt små steg, så att mot en oändligt liten förändring af x svarar en oändligt liten förändring af y*.[75] (6a)

Björling formulerade därefter en fullständig definition:

En funktion, $y=f(x)$, är kontinuerlig för $x=a$, om den för detta x-värde har en finit och determinerad, d. v. s. ändlig och fullt bestämd valör, och derjemte $f(a+\delta)$, vid indefinit aftagande δ, tenderar indefinit mot $f(a)$.[76] (6b)

Björling är verbalare än Fogelmarck i den mening att han inte använder algebraiserade definitioner, samtidigt som han återigen inte utnyttjade Cauchys olikhetsteknik. Däremot kan man hos Björling (6a&b) i hans resonemang om "indefinit aftagande" och "tenderar indefinit mot" spåra ett tydligare släktskap med Cauchy i (5b) än hos Fogelmarck.

Grabinger påpekar i sin artikel att Cauchys (1821) såväl som Bolzanos (1817) definitioner av kontinuitet snarast var definitioner av likformig kontinuitet , d v s då δ är oberoende av den valda punkten x_0.[77] Definitionerna ovan skall då jämföras med en modern definition av likformig kontinuitet:

En funktion *f* från **R** till **R** är *kontinuerlig* i ett intervall *I*, om för varje punkt $x_0 \in I$ gäller att till varje $\varepsilon>0$ existerar $\delta>0$, sådant att $|f(x) - f(x_0)|<\varepsilon$ för alla $x \in I$, sådana att $|x - x_0|<\delta$. I allmänhet beror δ på den valda punkten x_0. Om så *ej* är fallet, kallas *f likformigt kontinuerligt* i intervallet *I*.[78]

---

[73] Fogelmarck (1873), s 30f

[74] Grabinger (1978), s 382

[75] Björling (1867), s 23

[76] Björling (1867), s 23

[77] Grabinger (1978), s 382

[78] Thompson (1994), 265f

Tittar vi lite närmare på Fogelmarcks och Björlings definitioner (5a, 6b) av kontinuitet finner vi faktiskt hos dem en koppling mellan den valda punkten x_0 och δ. Fogelmarck slår fast att funktionen är kontinuerlig "vid ett visst x-värde" och "då *k* och *h* konvergera mot noll". Björling gör kopplingen mellan den valda punkten x_0 och δ ännu tydligare när han ger *x* ett bestämt värde *a* och konstaterar "***derjemte f(a+δ), vid indefinit aftagande δ, tenderar indefinit mot f(a).***" Björling kommenterar även en funktions kontinuitet i grannskapet av en valör.

> *Kontinuerlig i grannskapet af en valör*[1]) säges en funktion vara, om den är kontinuerlig mellan tvenne valörer af den ingående variabeln, belägna huru nära som helst, blott att de innesluta mellan sig den förstnämnde valören.

Noten 1 lyder:

> Ganska ofta säger man ock, med hänsyn till funktionens geometriska representation, att den är *kontinuerlig* i grannskapet af en punkt.

Fogelmarck och Björling och i synnerhet definierade alltså kontinuitet som påminner om det vi idag benämner som punktvis kontinuitet, vilket tyder på att matematiken och analysen hade utvecklats sedan Cauchy och att Fogelmarck höll sig ajour utvecklingen.

Tillämpning av Fogelmarcks kontinuitetsdefinition

Fogelmarck visar även hur (5a) kunde tillämpas. Om

$$f(x) = \frac{d^2}{x}$$

så är

$$f(x+h) - f(x-k) = \frac{d^2}{x+h} - \frac{d^2}{x-k} = -d^2 \frac{k+h}{(x+h)(x-k)}.$$

Fogelmarck fortsatte.

> Vid samtidigt försvinnande *k* och *h* blir den ifrågavarande differensen uppenbart alltid noll, så ofta som *x* har ett från noll skildt värde och *f(x)* är följaktligen alltid kontinuerlig, undantagandes vid värdet *x*=0, för hvilket den betraktade blir

$$f(+h) - f(-k) = -d^2 \frac{k+h}{-kh} = d^2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{k}\right)$$

alltså

$$\lim\left[f(+h) - f(-k)\right] = d^2\left[\lim\frac{1}{h} + \frac{1}{k}\right] = d^2 \cdot \infty = \infty\,.$$

Den betraktade funktionen erfar alltså ett kontinuitetsavbrott vid värdet *x*=0, på så sätt, att den derstädes öfvergår från värdet

$$f(-0) = \frac{d^2}{-0} = -\infty \text{ till värdet } f(+0) = \frac{d^2}{+0} = +\infty \quad (7)$$ [79]

Vi märker här hos Fogelmarck ett annorlunda bruk av gränsvärde och notationen av densamma. Att idag överhuvud skriva noll i nämnaren är meningslöst, då funktionen inte är definierad för *x*=0. Idag skulle (7) skrivas ungefär

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{d^2}{x} = -\infty \quad \text{samt} \quad \lim_{x\to o^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{d^2}{x} = \infty$$

och vi hade konstaterat att gränsvärdet ej existerade.

Fogelmarcks resonemang att $f(x)=d^2/x$ skulle vara kontinuerlig med undantag för $x=0$, ett s k “kontinuitets avbrott”, och hans resonemang kring kontinuitet i allmänhet skiljer sig från en modernare framställning. Fogelmarcks exempel med funktionen $f(x)=d^2/x$ och huruvida den är kontinuerlig eller ej belyser det vi idag benämner höger och vänster gränsvärden, d v s att en funktion är kontinuerlig i en punkt då höger och vänster gränsvärdena är lika.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c) \\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c) \end{cases}$$

[79] Fogelmarck (1873), s 31f

Idag säger vi att funktionen $f(x)=1/x$ är kontinuerlig eftersom $x=0$ inte tillhör definitionsmängden. En funktion kan bara vara kontinuerlig eller diskontinuerlig i en punkt där den definierad.

I sitt exempel ovan där han ska visa på sin definitions användbarhet resonerar han med bristande precision utifrån en modern analys. Fogelmarck är dock inte ensam om att göra samma "felaktighet". Björling slog fast att:

> Betrakta vi nu våra hittills kända funktioner, så inses lätt sanningen av följande satser.
>
> En algebraisk, rationell och hel funktion är alltid kontinuerlig.
>
> En algebraisk, rationel och bruten funktion blir infinit och följaktligen diskontinuerlig, så ofta som nämnaren försvinner, åtminstone så vida täljaren inte gör det samtidigt[80].
>
> …

Björling finner alltså på samma grunder som Fogelmarck att funktionen $f(x)=d^2/x$ skulle vara diskontinuerlig. Fogelmarck, liksom Björling, använder sig alltså i denna situation inte av ett resonemang där en funktion är kontinuerlig på ett intervall.

Kontinuitet och slutpunkter

Fogelmarck behandlar även en funktions s k slutpunkter definierade som att funktionen har en kontinuerlig följd av reella värden åt ena hållet, men inte åt det andra. Han berör i sitt resonemang om slutpunkter det vi idag benämner kontinuitet på ett intervall.

> Begynnelse- och slutvärdena på x i hvar och en af dessa kontinuerliga följder angifva hvad man, för korthets skull, kan benämna *slutpunkter*.[81]

Fyra typer av slutpunkter anges:

1. Då funktionen övergick från reellt till imaginärt värde och tvärt om.
2. Då funktionen blev diskontinuerlig genom att för vissa värden på x anta två olika värden.
3. Då funktionen för "$x=-\infty$" och "$x=\infty$" hade ett reellt värde, d v s

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = C$$

---

[80] Björling (1867), s 24

[81] Fogelmarck (1873), s 33

4. “Då funktionen, till följd af serskilda inskränkande villkor, i en framställd fråga skall anses gälla endast mellan gifna reela gränser $x=a$ och $x=b$, i hvilket fall emot hvardera gränsen svarar en slutpunkt. Hvarje funktion af ifrågavarande slag har således åtminstone *två* slutpunkter*”

I noten * till punkt nummer fyra hänvisar Fogelmarck till en uppsats av Hj. Holmgren i *Tidsskrift för Mathematik och Fysik*, 1868.[82] Holmgren berör funktioners slutpunkter i samband med maxima- och minimaberäkningar. Liksom Fogelmarck konstaterar Holmgren att alla funktioner åtminstone hade två slutpunkter, men Holmgren fastslår, till skillnad från Fogelmarck, att slutpunkterna bestäms av “funktionens definition.”[83]

Angående exemplet ovan med d^2/x och kontinuitet på ett intervall gjorde Fogelmarck och Björling inte någon anmärkning mot att ett sådant villkor i punkt fyra skulle kunna motsvara en funktions definitionsmängd. Till skillnad från Fogelmarck, deklarerade Cauchy i sin definition av derivatan att funktionen var kontinuerlig på ett visst intervall, vilket också Björling gör.

Derivata

Den definition av derivata som återfinns i dagens läroböcker, både på gymnasieskolan och universitetet, återfinns redan i Fogelmarcks lärobok, nämligen:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (8)$$

Derivatan är enligt Fogelmarck den deriverade eller härledda funktionen av funktionen *f(x)* och är kvoten mellan tillväxten eller förändringen av funktionsvärdet och av den oberoende variabeln då förändringen *h* närmar sig noll.[84] Derivatan är också i allmänhet ett ändligt och av *h* oberoende gränsvärde.

[82] Fogelmarck (1873), s 33

[83] Tidsskrift för Matematik och Fysik (1868), s. 31ff

[84] Fogelmarck (1873), s 35f

Definitionen (8) används sedan för att bevisa olika satser, t ex deriveringsregeln för potenser, $f(x)=x^m$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=x^m\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^m-1}{h}$$

$$\text{där } \frac{h}{x}=\delta \text{ och därmed } h=x\delta \text{, således}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x^{m-1}\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}$$

Då *h* närmar sig noll, gör även δ så, och gränsvärdet av det högra bråket blir medels binomialutveckling lika med *m*. Således

$$f(x)=x^m \qquad f'(x)=mx^{m-1}$$ [85]

Efter ett antal bevis av andra deriveringsregler, behandlar Fogelmarck differentialer, d v s Δx och Δy, och poängterar det för sammanhanget viktiga bruket av skillnader och differenser framför positiva eller negativa förändringar. Fogelmarck konstaterar att

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \qquad \text{(9a)}$$

då Δx närmar sig noll. Ytterligare beteckningar införs: $dx=\Delta x$ och $dy=\Delta y$, varefter följande likheter identifieras

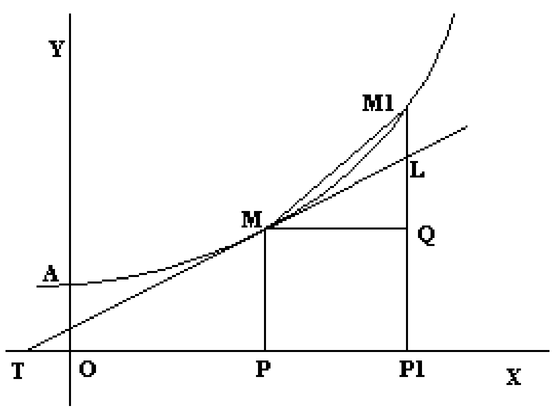
[85] Fogelmarck (1873), s 37

$$dy = f'(x)\cdot dx \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (9b)$$

som avslutas med en verbal tolkning:

> *differentialer äro qvantiteter, hvilkas inbördes förhållande är lika med gränsvärdet af förhållandet mellan de motsvarande variablernas samtidiga tillvexter. Den oberoende variabelns differential är en åt denna variabel gifven tillvext af godtycklig storlek. Funktionens differential är ej godtycklig, utan lika med produkten af funktionens derivata och den oberoende variabelns differential.*[86]

Hos Fogelmarck saknas ett resonemang om en funktions kontinuitet och deriverbarhet på ett intervall. Emellertid behandlas nödvändigheten av kontinuitet i ett efterföljande avsnitt om derivatans geometriska betydelse:



> Låt
>
> $$y = f(x)$$
>
> vara eqvationen för en kroklinie, AMM_1, hänförd till två rätvinkliga axlar, *OX* och *OY*, och antag, att denna kroklinie åtminstone till en viss utsträckning är kontinuerlig; sätt vidare…[87]

(10)

[86] Fogelmarck (1873), s 41

[87] Fogelmarck (1873), s 43f

Kontinuitet tas upp i samband med en geometrisk avbildning, vilket också var fallet när kontinuitetsbegreppet behandlas i samband med funktioner.

Kontinuitetsbegreppet intog hos Fogelmarck alltså inte den centrala plats i analysen som idag, vilket det också gjorde hos t ex Cauchy. Fogelmarck förutsatte dock i (10) derivatans geometriska tolkning att deriverbarhet förutsätter kontinuitet.
Björling behandlar i sin lärobok derivatans grunder mycket kortfattat, vilket kan ha sin förklaring i att Björlings bok var en lärobok för universitetet och varför studenten förväntades ha elementära kunskaper i differentialkalkyl. Derivatan till *f(x)* definieras som

$$\lim \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

samtidigt som Björling konstaterar att

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

där Δy och Δx kallades variablernas oändligt små "*inkrementer* (tillskott)". Något mera allmänt nämns inte om derivata, utan därefter övergår Björling till att redogöra för olika deriveringsregler, deriveringstekniker, partiella derivator m m, men även bildande av differentialekvationer.[88]

Emellertid berör Björling intuitivt sambandet mellan funktioners kontinuitet och deras deriverbarhet i ett senare kapitel om Taylor- och MacLaurinutvecklingar.

> Nödvändigheten af det gjorda förbehållet, att både *f(x)* och *f´(x)* skola vara kontinuerliga, inses lätt. Ty om icke *f´(x)* vore kontinuerlig, utan antingen infinit eller indeterminerad, så existerade ju i förra händelsen ingen limes för $\Delta y / \Delta x$… …följaktligen måste *f´(x)* vara kontinuerlig.[89]

---

[88] Björling (1867), s 60f

[89] Björling (1867), s 142

Att $f(x)$ då också är kontinuerlig motiveras med att om $f(x)$ blev diskontinuerlig, så blev även $f'(x)$ det, åtminstone om $f(x)$ diskontinuitet består i att den blev oändlig, vilket var det "ojemförligt vanligaste fallet!"[90] Något bevis ansågs ej nödvändigt.

Liksom hos Fogelmarck nämns sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet i samband med en geometrisk illustration, varför kontinuitetsbegreppet inte heller hos Björling intar en framträdande plats.

En detalj som är värd att uppmärksamma hos Björling och som visar på en strävan bort från det geometriska arbetssättet är just bokens "geometriska illustrationer". Några illustrationer i form av figurer är det inte frågan om, utan snarare verbala beskrivningar av hur en geometrisk figur skall konstrueras. Figurerna återfinns sedan längst bak i boken i en bilaga.

Fogelmarck och Björlings definitioner av derivatan skall då jämföras med Cauchys, där kontinuitet intog en självklarare plats.

> If the function $y=f(x)$ is always continuous between two given bounds [his word is "limites"] of the variable x, and if we choose a value of the variable between these limits, than an infinitely small increment given to the variable will produce an infinitely small increment in the function itself. Therefore, if we set $\Delta x=i$, the two terms of the *ratio of the differences* $\Delta y/\Delta x=f(x+i)-f(x)/i$ will be infinitely small quantities. But when the two terms indefinitely and simultaneously approach the limit zero, the ratio itself can converge toward another limit, which may be positive or negative. This limit, when it exists, has a determined value for each particular value of x; but it varies with x…. The form of the new function which serves as the limit of the ratio $f(x+i)-f(x)/i$ will depend only on the form of the proposed function $y=f(x)$. In order to indicate this dependence, we give the new function the name *derived function* [fonction derivée, our "derivative"], and we denote it, by means of an accent mark, by the notation y' or $f'(x)$.[91] (4)

Man ser ändå tydligt att Cauchys definition av derivatan som ett gränsvärde har övertagits av både Fogelmarck och Björling.

---

[90] Björling (1867), s 142

[91] Grabinger (1978), s 382f

Tillämpningar av derivatans definition

Fogelmarck tillämpar sedan (9a & b) när han härleder deriveringsreglerna för summor, produkter och kvoter av funktioner. Exempelvis deriveringsregeln för produkten av två funktioner, *y=uv*.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$y + \Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

och då $y = uv$ *erhålls*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Eftersom

$$\frac{dy}{dx} = \lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

erhålls gränsvärdet

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

och *d(uv)=vdu+udv* [92]

Medelvärdessatsen

I kapitlet som behandlar "relationer mellan en funktion och dess derivata" behandlar Fogelmarck "differentialkalkylens medelvärdessats", även om han inte brukar just de orden. Fogelmarck bevisar att en funktion är avtagande då dess derivata är negativ och vice versa genom att först konstatera att om

[92] Fogelmarck (1873), s 46f

$$\lim_{(h=0)} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x)$$

så följer att

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) + \alpha \,.$$

Kvantiteten α måste då närma sig noll med *h* och då $F'(x) \neq 0$ blir α så småningom numeriskt mindre än $F'(x)$. Tecknet framför summan $F'(x)+\alpha$ blir då detsamma som framför $F'(x)$ när *h* antar tillräckligt små värden. Därav följer att tecknet för differensen

$$F(x+h)-F(x)$$

är detsamma som för termen

$$h \cdot F'(x)$$

eftersom

$$F(x+h)-F(x) = h\big[F'(x)+\alpha\big] = hF'(x)+h\alpha$$

Då $h>0$ följer att

$$\left.\begin{cases} 1.\ \mathit{Om}\ F'(x) > 0,\ \mathit{så\ är}\ F(x+h)-F(x) > 0\ \mathit{och\ därmed}\ F(x+h) > F(x) \\ 2.\ \mathit{Om}\ F'(x) < 0,\ \mathit{så\ är}\ F(x+h)-F(x) < 0\ \mathit{och\ därmed}\ F(x+h) < F(x) \end{cases}\right\}^{93} \quad (11)$$

Fogelmarck gör emellertid undantag för då $F(x)$ eller $F'(x)$ är diskontinuerliga och anger som exempel

$$F(x) = \tan x \qquad F`(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

då $x=(2k+1)\pi/2$.

Satsen (11) används sedan för att bevisa en sats, som motsvarar Rolles sats. Att om en ändlig och kontinuerlig funktion $\varphi(x)$, vid två skilda *x*-värden, erhålls samma

[93] Fogelmarck (1873), s 65

funktionsvärden, d v s $\varphi(a)=\varphi(b)$, så måste derivatan bli noll någonstans på intervallet [a,b]. Genom att anta motsatsen, att $\varphi'(x)$ alltid är positivt mellan *a* och *b*, erhåller Fogelmarck motsägelsen $\varphi(a)<\varphi(b)$. Om $\varphi'(x)$ alltid skulle vara negativ på samma intervall, erhålls motsägelsen $\varphi(a)>\varphi(b)$. Derivatan måste alltså anta värdet noll mellan *a* och *b*.[94] Fogelmarck betecknade talet mellan *a* och *b*, där derivatan är noll, som $a+\vartheta(b-a)$ och formulerade satsen:

$$Om \quad \varphi(a)=\varphi(b) \quad så\ är \quad \varphi'\left[a+\vartheta(b-a)\right]=0, \quad 0<\vartheta<1 \tag{12}$$

Fogelmarck använder sedan (12) till att formulera en variant av medelvärdessatsen som vi känner den idag.

> En funktions tillvext är lika med den oberoende variabelns tillvext multiplicerad med ett medelvärde på derivatan.[95]

Om $f(x)$ är ändlig och kontinuerlig på intervallet [a,b] och då x går från värdet a till värdet b samtidigt som $f(x)$ går från $f(a)$ till $f(b)$, så konstaterar Fogelmarck att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=K \tag{13}$$

eller att

$$f(b)-f(a)-(b-a)K=0\,. \tag{14}$$

Utifrån (14) konstruerades funktionen φ i (12) som

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-(b-x)K$$

---

94 Fogelmarck (1873), s 70f

95 Fogelmarck (1873), s 71

där konstanten *a* ersattes med variabeln *x*. Vidare så gäller då likheten

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0\,.$$

Vid derivering av $\varphi(x)$, där *b*, *f(b)* och *K* är att betrakta som konstanta, erhålls

$$\varphi'(x) = -f'(x) + K\,.$$

Där likheten i (12) ger

$$\begin{aligned} &\varphi'\left[a + \vartheta(b-a)\right] = -f'\left[a + \vartheta(b-a)\right] + K = 0 \\ &K = f'\left[a + \vartheta(b-a)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Fogelmarck konstaterar därefter med (15) insatt i (13) likheten

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'\left[a + \vartheta(b-a)\right]$$

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'\left[a + \vartheta(b-a)\right], \qquad 0 < \vartheta < 1\,, \tag{16}$$

vilket är en sats som överensstämmer med den moderna medelvärdessatsen

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

där $a+\vartheta(b\text{-}a)=c$ om $a<c<b$. Fogelmarck definierar, som tidigare nämnts, $[a+\vartheta(b\text{-}a)]$ som ett tal liggande mellan *a* och *b*. Läsaren bör här notera att Fogelmarck redan i inledningen av sina bevis av medelvärdessatsen och “<<nödvändigheten av derivatans nollställe

mellan två punkter där funktionsvärdet var noll>>” förutsätter att funktionen och dess derivata var ändliga och kontinuerliga.[96]

Även Björling behandlar medelvärdessatsen och Rolles sats, dock utan att använda dessa begrepp. I ett kapitel om “Taylors och MacLaurins Theoremer” behandlar han “relationer mellan primitiva funktionen och derivatan” och formulerar inledningsvis följande sats.

> *Om en funktion, y=f(x), och dess derivata, y´=f´(x), äro båda kontinuerliga, så växer eller aftager funktionen samtidigt med variabeln x, så ofta som derivatan är positiv. Men är derivatan negativ, så aftager funktionen y, då x växer, och tvärtom.*[97]

Till denna sats bifogar han ett verbalt bevis samt ett korollarium som motsvarar Rolles sats.

> Om en funktion f(x) och dess derivata f´(x) äro båda kontinuerliga, och funktionen blir 0 för tvenne valörer a och b på den ingående variabeln x, så blir äfven derivatan 0 för någon x-valör mellan a och b.[98]

Hos Fogelmarck och Björling återfinnes klara likheter i definitionen av motsvarande Rolles sats, dock med skillnaden att Fogelmarck på ett stringent vis deducerar likheten

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'\left[a + \vartheta(b-a)\right], \qquad 0 < \vartheta < 1\,.$$

Fogelmarcks lärobok i differentialräkning, del II

Olika former av gränsvärden

Del II av Fogelmarcks lärobok inleds med avsnittet “Sanna värdena af obestämda uttryck”. De olika formerna är uppdelade på tre grupper[99]

1. $0/0$, $\infty - \infty$
2. ∞/∞, $0 \bullet \infty$

---

[96] Fogelmarck (1873), s 71f

[97] Björling (1867), s 141

[98] Björling (1867), s 143

[99] Fogelmarck (1877), s 30f

3. 0^0, ∞^0, 1^∞

Likadana former av gränsvärden återfinns i moderna läroböcker i analysens grunder, t ex *A complete course, Calculus* från 1995, med undantag för 0/0. Fogelmarck använder l´Hopitals regler, även om han inte benämner dem just så. En jämförelse mellan den härledning som Fogelmarck gör och den som görs av Adams visar tydliga skillnader på stringens och behandlingen av begreppen kontinuitet, deriverbarhet, intervall och gränsvärde. Fogelmarck skriver:

> Qvoten $\varphi(x)/\psi(x)$ blir, om $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=0$, för $x=a$, $\varphi(a)/\psi(a)=0/0$. Men *för detta särskilda värde*, $x=a$, är uppenbart
>
> $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim_{(h=0)} \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \lim_{(h=0)} \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)} \quad \text{, och}$$
>
> $$\lim_{(h=0)} \frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)} = \lim_{(h=0)} \frac{\left(\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}\right)}{\left(\dfrac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}\right)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$
>
> hvaraf
>
> $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$ [100]

Härledningen ovan skall då jämföras med motsvarande bevis i *A complete…*:

> PROOF. We prove the case involving $\lim_{x\to a+}$ for finite a. Define
>
> $$F(x) = \begin{cases} f(x) & if\ a < x < b \\ 0 & if\ x = a \end{cases} \quad \text{and} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & if\ a < x < b \\ 0 & if\ x = a \end{cases}$$
>
> Then F and G are continuous on the interval $[a,x]$ and differentiable on the interval (a,x) for every x in (a,b). By the Generalized Mean- Value Theorem (Theorem 5) there exists a number c in (a,x) such that

[100] Fogelmarck (1877), s 30

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Since $a < c < x$ if $x \to a+$, then necessarily $c \to a+$, so we have

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$ [101]

Även om likheterna finns där så är skillnaderna i framställningen stora. Adams undviker inledningsvis den idag oriktiga kvoten 0/0, vilket inte Fogelmarck gör då han i sin härledning utgår från att $\varphi(a)=0$ och $\psi(a)=0$. Adams använder medelvärdessatsen där Fogelmarck istället väljer att använda derivatans definition.

Funktioners maximum- och minimumpunkter

Fogelmarck definierar två typer av maximivärden och minimivärden.

a) af *första slaget* = alla sådana värden af *f(x)*, till hvilka en kontinuerlig följd av reella värden på *f(x)* ansluter *blott åt ena sidan*. Dessa slags maxima och minima finnas uti alla *slutpunkter* för funktionen *f(x)*; sistnämmda punkter åter måste anses vara gifna genom funktionens egen definition (***D***. sid. 33).

b) af *andra slaget* = alla sådana värden af *f(x)*, hvilka äro antingen större eller ock mindre än de *å båda sidor* i kontinuerlig följd närmast anslutande reella funktionsvärden, d. v. s., om ettdera inträffar för t. ex. $x = a$, så är funktionsvärdet

$$f(a) = \begin{Bmatrix} ett \ \max imum \ af \ \ f(x), om \ f(a-h) < f(a) > f(a+h) \\ >> \ \min imum \ af \ \ f(x), om \ f(a-h) > f(a) < f(a+h) \end{Bmatrix},$$

hvarest *h* betecknar en positiv, mot noll konvergerande qvantitet.[102]

Vi märker här att Fogelmarck inte som idag använder begreppen extremvärden och lokala minimi- och maximipunkter. I hans uppdelning i två typer av maximi- och minimivärden, motsvarar *a*) dagens ändpunkter på ett intervall och *b*) lokala maximi- och minimipunkter.

[101] Adams (1995), s 281

[102] Fogelmarck (1877), s 34f

En jämförelse med Björling visar på denna punkt en tydlig skillnad på vilka nivåer läroböckerna skulle användas. Björling redovisar "Den fullständiga theorien om maxima och minima" grundat på Taylors theorem med taylorutvecklingen av $f(x+h)$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''\left(x + \theta h\right).$$

Han visar att då $f'(x) = 0$, fastslås maximipunkt resp. minimipunkt genom att undersöka andraderivatan, d v s huruvida $f''(x)<0$ resp. $f''(x)>0$. I det sammanhanget visar Björling på sambandet mellan derivatans nollställe, andraderivatans nollställe och maximi- och minimipunkter med ett geometriskt resonemang.[103] Fogelmarck bevisar inget i sin framställning, utan han visar endast att derivatan måste vara noll i en maximi- eller minimipunkt. För att bestämma maximi- eller minimipunkt anger Fogelmarck två metoder. Först genom en teckenstudie av $f'(x)$ med ett tillskott h till x och ett avdrag h från x. Den andra metoden är, liksom hos Björling, att studera andraderivatan.

Noterbart är att hos Björling nämns inget som motsvarade Fogelmarcks "slutpunkter". Björling nöjer sig alltså med att studera det vi idag benämner extremvärden.

Obestämda integraler

Avsnittet om integraler inleder Fogelmarck med "grundläror" och "integrationsmethoder" rörande obestämda integraler. I punkt 56 belyser han sambandet mellan derivata och integral:

> Med *integrering* af en differential förstås uppsökandet af alla de funktioner, hvilkas differential den gifna utgör. Hvarje sådan funktion benämnes en *obestämd integral* till den gifna differentialen och betecknas genom att framför differentialen satt långt ∫ (begynnelse bokstav i ordet *summa*).
>
> Eftersom hvarje konstant term försvinner vid differentiering, finnes ett oändligt antal integraler till en och samma differential, hvilka integraler skilja sig endast genom en konstant. Om alltså $\varphi(x)$ betecknar ett särskildt värde (utan godtycklig konstant) af den obestämda integralen till differentialen $\varphi'(x)\cdot dx$, d. v. s. om

[103] Björling (1867), s 166

$$\int \varphi'(x)dx = \varphi(x),$$

så är det generella värdet av denna integral

$$\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C$$

hvarest *C* betecknar en *godtycklig konstant*; …[104]

Fogelmarck konstaterar att tecknen *d* och $\int$ upphäver varandra, d v s

$$d\int \quad \text{och} \quad \int d,$$

men där det i det senare fallet tillkommer en godtycklig konstant.[105]

De "förnämsta" integrationsmetoderna är enligt Fogelmarck:

1. Omedelbar integration, d v s

   Om $d\left(\dfrac{u^{m+1}}{m+1}\right) = u^m du$, så $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + C$

2. Integration genom substitution eller införandet av en ny oberoende variabel
3. Partiell integration
4. Integration genom utveckling i en summa eller i en serie.[106]

Metoderna är alltjämt en del av den grundläggande undervisningen i analys, men de tre senare metoderna får på gymnasienivå numera anses som överkurs eller fördjupningsuppgifter.

Bestämda integraler

Efter obestämda integraler och integreringsmetoder behandlas bestämda integraler.

Bestämd Integral. Låt *f*(*x*) en funktion, som är ändlig och kontinuerlig för alla *x*-värden mellan *a* och *b* (inclusive)*); om man då bildar summan af alla de värden, hvilka produkten

[104] Fogelmarck (1877), s 47

[105] Fogelmarck (1877), s 48

[106] Fogelmarck (1877), s 48ff

$f(x)\cdot dx = f(x)\cdot \Delta x$, erhåller, då man uti densamma åt x ger de n succesiva värdena a, $a+\Delta x$, $a+2\Delta x$, …, $a+(n-1)\,\Delta x$, hvarest Δx uppfyller villkoret $b=a+n\Delta x$ d. v. s.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

så benämnes det gränsvärde, som denna summa antager, för obegränsat växande n och mot noll konvergerande Δx, *den bestämda (definita) integralen till f(x)dx, tagen mellan a och b,* och tecknas

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(\Delta x=0)}\left[f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + \ldots + f\left(a+\overline{n-1}\,\Delta x\right)\Delta x\right],$$

eller kortare, med användande af summatecknet Σ,

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{(\Delta x=0)} \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\Delta x$$ [107]

I detta sammanhang berör Fogelmarck inte det vi idag benämner som över- och undersummor, men just i samband med integraler ändrar Fogelmarck sitt matematiska språk i den mening att han på ett annat sätt än tidigare betonar kontinuitet och dessutom kontinuitet på ett intervall. I noten * i citatet ovan etablerar han en beteckning

$$f(x) = \begin{pmatrix} ä.o.k \\ a\,|\,x\,|\,b \end{pmatrix},$$

vars innebörd är att $f(x)$ är en funktion som är ändlig och kontinuerlig på ett intervall $[a,b]$. Fogelmarck konstaterar i den nästföljande geometriska illustrationen att

$$\int f(x)dx = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C \qquad (1)$$

och att

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (2)$$

[107] Fogelmarck (1877), s 78

Utifrån (1) och (2) konstaterar Fogelmarck sedan den bestämda integralen

$$\int_a^b f(x)dx$$

som en funktion av:

1. Gränserna *a* och *b* och ej utav *x*, såvida inte gränserna innehåller eller är en funktion av *x*.
2. De konstanter som kan finnas i integralfunktionen.[108]

Fogelmarck anger längre bak i boken en approximativ metod för beräkning av bestämda integraler. I ett teorem slår han fast att om olikheten $F(x)>f(x)$ gäller på ett slutet intervall [a,b], så gällde även

$$\int_a^b F(x)dx > \int_a^b f(x)dx\,.$$

Just passagen om ett slutet intervall formulerar Fogelmarck som "för alla *x*-värden mellan *a* och *b* (inclusive)." Det är bara på detta ställe som ordet "inclusive" förekommer i samband med intervall. I tidigare sammanhang skulle alltså Fogelmarck behandla öppna intervall.

Av olikheten närmast ovan följer att, om

$$F(x) > f(x) > \psi(x) \quad \text{så var} \quad \int_a^b F(x)dx > \int_a^b f(x)dx > \int_a^b \psi(x)dx$$ [109]

Som exempel anges integralen $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

För $0 < x < 1$, är $\sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^3} < 1$, och $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} > \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} > 1$, följaktligen

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} > \int_0^{1/2} 1\cdot dx \text{, eller } \arcsin\frac{1}{2} > \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} > \frac{1}{2}$$

---

[108] Fogelmarck (1877), s 80

[109] Fogelmarck (1877), s 87

$$\Theta\ \frac{\pi}{2} = 0{,}5236 > \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} > 0{,}5.$$ [110]

Här finner vi helt klart ett tryckfel då *arcsin* ½ = π/6.

En bestämd integral kan enligt Fogelmarck också approximeras via serieutveckling. Om

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + R_n\,, \tag{3}$$

så erhålls genom multiplikation med *dx*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_0 dx + \ldots + \int_a^b u_{n-1} dx + \int_a^b R_n dx\,.$$

Om då $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, så kan man alltid göra $-\varepsilon < R_n < +\varepsilon$, där ε betecknar ett hur litet tal som helst.. Därav

$$-\int_a^b \varepsilon\, dx < \int_a^b R_n dx < +\int_a^b \varepsilon\, dx\text{, d v s } -\varepsilon(b-a) < \int_a^b R_n dx < +\varepsilon(b-a)\,,$$

så länge gränserna *a* och *b* är ändliga. Eftersom ε har gränsvärdet 0 gäller enligt Fogelmarck:

$$\lim \int_a^b R_n dx = 0 \qquad \text{för } n = \infty$$

Resttermen kan därför ignoreras och då *x* sätts som övre gräns erhålls

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \ldots + \int_a^x u_{n-1} dx + \ldots \tag{4}$$ [111]

Under förutsättning att integralens gränser är ändliga och att funktionen kan utvecklas i en konvergent serie, så kan likaså integralen utvecklas i en konvergent serie. Fogelmarck påpekar att för det fall då *x* är lika med någon av integralens gränser och då funktionens serieutveckling (3) blir divergent, så kan (4) ändock fortsätta att gälla om det högra ledet i (4) är konvergent. I ett av exemplen använder sig Fogelmarck återigen av integralen

[110] Fogelmarck (1877), s 88

[111] Fogelmarck (1877), s 88

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

samt den "*Mac-Laurinska serien*"

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\underline{|2}} f''(0) + \frac{x^3}{\underline{|3}} f'''(0) + \ldots \qquad [\underline{|a} = a!\text{, förf anm.}]$$

och integralen

$$\int_0^x f(x)dx = xf(0) + \frac{x^2}{\underline{|2}} f'(0) + \frac{x^3}{\underline{|3}} f''(0) + \frac{x^4}{\underline{|4}} f'''(0) + \ldots$$

Då $x^2<1$ erhålls

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = 0{,}5 + 0{,}00781 + 0{,}00041 + \ldots = 0{,}50822\ldots \quad \text{(värdet för litet).}$$ [112]

Observera här att Fogelmarck inte använder absolutbeloppstecken utan skriver $x^2<1$.

I den nästföljande metoden för en approximativ uppskattning av en bestämd integrals värde, formulerar Fogelmarck det vi idag känner som "integralkalkylens medelvärdessats", utan att använda just de orden. Utgående från

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(\Delta x = 0)} \left[f(a)\Delta x + f(a+\Delta x)\Delta x + \ldots + f\left(a + \overline{n-1}\,\Delta x\right)\Delta x \right]$$

skriver Fogelmarck, att om…

> *f*(*a*), *f*(*a*+*Δx*), *f*(*a*+2*Δx*) etc. insättes, ena gången det största värdet, *A*, andra gången det minsta värdet, *B*, som *f*(*x*) antager för *x*-värdet mellan *a* och *b*, så erhålles, i förra fallet ett för stort, i det senare ett för litet resultat, det vill säga, att
>
> $$A \cdot n\Delta x > \int_a^b f(x) \cdot dx > B \cdot n\Delta x \text{, eller eftersom } \Delta x \frac{b-a}{n},$$
>
> $$(b-a)A > \int_a^b f(x)dx > (b-a)B \qquad (5)$$
>
> Om *f*(*x*) är kontinuerlig mellan *a* och *b*, så måste äfven, då *x* går kontinuerligt från *a* till *b*, produkten (*b*-*a*) *f*(*x*) ändra sig kontinuerligt mellan de yttersta värdena (*b*-*a*)*A* och (*b*-*a*)*B* och

---

[112] Fogelmarck (1877), s 89, "Värdet för litet" är Fogelmarcks anmärkning.

> följaktligen för något x-värde mellan a och b, $x=a+\vartheta(b-a)$ blifva *lika* med integralen uti (125) [i denna framställning (5)][113]; under de gjorda förutsättningarne erhålles derför en ytterligare formel för approximativ uppskattning af en bestämd integrals värde, nämligen
>
> $$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left[a+\vartheta(b-a)\right], \qquad 0<\vartheta<1$$ [114]

Fogelmarck kommenterar inte på något vis att han ovan utnyttjar “differentialkalkylens medelvärdessats” i de två citaten närmast ovan.

Avslutande diskussion

De grundläggande begreppen

Fogelmarck utgår från att det finns en oändlig och kontinuerlig mängd reella tal, såväl positiva som negativa, samt talet noll. En variabel kan vara beroende av en annan oberoende och godtycklig variabel. Den beroende variabeln är då en funktion av den oberoende variabeln. Redan på den grundläggande nivån anas en pedagogisk ambition hos Fogelmarck, då han använder konkreta ord framför mer abstrakta, t ex utvecklade/explicita funktioner.

De tydliga influenserna från Cauchy återfinns i Fogelmarcks gränsvärdesdefinition. Där finns en påfallande överensstämmelse med Cauchy som Fogelmarck inte är ensam om; Björling har om inte i ännu större utsträckning använt sig av Cauchys formuleringar. Fogelmarck nyttjar dock Cauchys differensteknik i sin framställning, vilket Björling inte gjorde. Vidare så definierar Fogelmarck, påfallande likt Cauchy, det “oändligt lilla” som en variabel med gränsvärdet 0, vilket kan ses som ett försök att undkomma oklarheterna kring infinitesimalen.

Även i Fogelmarcks behandling av kontinuitetsbegreppet är likheten med Cauchy stor, men på några punkter skiljer de sig åt. Fogelmarck använder sig helt klart av Cauchys δ-ε-resonemang, om än inte med den stringens som krävs i dagens matematik, men det gjorde ju inte heller Cauchy och inte heller den med Fogelmarck samtida

---

[113] Förf anmärkning

[114] Fogelmarck (1877), s 91

Björling. Liksom i sin definition av gränsvärde använder sig Fogelmarck av differenstekniken, vilket inte Björling gjorde, men det skall nog inte tillmätas någon större betydelse. Av betydelse är dock att Cauchys definition av kontinuitet definierar likformig kontinuitet, medan Fogelmarcks och Björlings definitioner av kontinuitet närmast är definitioner av punktvis kontinuitet. Troligtvis existerade inte de begreppen eftersom varken Björling eller Fogelmarck specifikt definierade dem. Särskilt Björling hade anledning till att göra det eftersom hans lärobok var avsedd för universitetet. Skillnaderna kring kontinuitetsbegreppen mellan Cauchy å ena sidan och Björling och Fogelmarck å den andra är intressant, då det visar på att Björling och Fogelmarck i sin framställning följde den då moderna matematikens utveckling, samtidigt som det visar på den högre matematiken inflytande på Fogelmarck.

I avsnittet om “funktioners slutpunkter” tangerade Fogelmarck det vi idag benämner “kontinuitet på ett intervall”. Han beskrev dock inte sambandet mellan en funktions kontinuitet och dess definitionsmängd, ett samband som påpekades av Hjalmar Holmgren i en artikel från 1868, en artikel som Fogelmarck hänvisade till.

Användning av de grundläggande begreppen

I avsnitten om derivata och dess definition uppvisar både Fogelmarck och Björling avsteg från Cauchy. Ingen av de båda antar varken att funktionen skulle vara kontinuerlig eller kontinuerlig på ett intervall, vilket Cauchy tydligt konstaterade.

> If the function *y=f(x)* is always continuos between two given bounds...

Fogelmarck anser emellertid att funktionens kontinuitet på ett intervall var nödvändigt när han illustrerar derivata geometriskt samt i samband med beviset av medelvärdessatsen. I övrigt överensstämmer Fogelmarcks och Björlings definition av derivata med Cauchys och båda ser derivatan som ett gränsvärde. Däremot använder sig Fogelmarck i större utsträckning av gränsvärdesresonemang och undviker på så sätt bruket av det oändligt lilla eller infinitesimalen, till skillnad från Björling som i sin definition av derivata brukar ”oändligt små *inkrementer*”. Ur det perspektivet är alltså Fogelmarck modernare i sin framställning. Dessutom förändrar Fogelmarck sin användning av kontinuitetsbegreppet mellan del 1 och del 2 av sin lärobok.

Avsnitten om extremvärden och integraler tillhör del 2 av Fogelmarcks lärobok, vilken kom ut år1877, d v s fyra år senare än del 1. I avsnittet om funktioners ”maximum- och minimumpunkter” anges två typer av extremvärden. Den ena typen var slutpunkter. Funktionens ”slutpunkter” bestäms av ”funktionens egen definition” och dessa ”slutpunkter” har en kontinuerlig följd av reella värden endast åt ena hållet. Den andra typen av extremvärde är de punkter som hade en kontinuerlig följd av värden på båda sidor som var antingen mindre eller större. I det sammanhanget vilar hela hans resonemang på att funktionen är kontinuerlig på ett intervall. Dessutom belyser han implicit sambandet mellan kontinuitet och definitionsmängd i samma sammanhang som Holmgren gjorde i sin artikel från 1868. Fogelmarck betonar dock funktionens kontinuitet än tydligare i efterföljande avsnitt om integraler.

I definitionen av bestämda integraler deklarerades den kontinuerliga funktionen explicit.

> Låt *f(x)* en funktion, som är ändlig och kontinuerlig för alla *x*-värden mellan *a* och *b* (inclusive)*)…

Hans resonemang om ett intervall med *a* och *b* ”inklusive” är ju ett slutet intervall, men han kommenterar inte det ytterligare och han gör inte heller något försök att skilja på något som motsvarade öppna och slutna intervall. Fogelmarck behåller denna mening i citat ovan boken igenom i förkortad form som.

$$f(x) = \begin{pmatrix} \ddot{a}.o.k \\ a \left| x \right| b \end{pmatrix}.$$

Även i beviset av differentialkalkylens medelvärdessats deklarerar han tydligt att funktionen är kontinuerlig, samtidigt som han använder sig av den medelvärdessats som han tidigare formulerat.

Analysen i skolan

Fogelmarck har en rigorös framställning av analysen med tydliga influenser av Cauchy och den samtida Björling. Lärobokens struktur är spartanskt uppbyggd med punkter och de grafiska illustrationerna är få, vilket ytterligare förstärker intrycket av stringens och enkelhet. Fogelmarcks lärobok i differentialräkning bekräftar min hypotes om att den högre matematiken tydligt påverkade skolmatematiken. Analysens rigorösitet var alltså en väsentlig del från vilken analysen i skolmatematiken kunde utvecklas, det bekräftas också av samtida artiklar i *Pedagogisk Tidsskrift* och *Tidsskrift för Matematik och Fysik*. Först när man tog farväl av Newtons och Leibniz intuitiva fluxioner och infinitesimaler var analysen mogen för skolan.

Återgår vi till Englunds resonemang kring skolans form och innehåll som föremål för en "uttolkningskamp" mellan olika sociala krafter i samhället, så blir min hypotes rimlig. Oavsett om man i mitten av 1800-talet propagerade för en genetisk eller heuristisk metod inom matematikundervisning, så måste kraven på form och innehåll vila på en hållbar argumentation. Att argumentera, oavsett bevekelsegrund, för ett område som analys, där en klar och allmänt vedertagen formulering av grundläggande begrepp saknades, måste ha tett sig utsiktslöst. Än svårare måste det ha varit att formulera en läroplan, om det inte fanns något att grunda sina formuleringar på.

Läroplanen bestämde vad analysen skulle innehålla, om än i mycket ringa omfattning, varför läraren och läromedelsförfattarens nära kontakt med universitet och goda kunskaper i den högre matematiken måste ha spelat en viktig roll i undervisnings-situationen. Hur analys och matematik i allmänhet skulle undervisas och vad som var att betrakta som matematiska kunskaper var likväl ingen självklarhet.

Utifrån de båda pedagogiska tidskrifterna kan vi sluta oss till att det fanns två tydliga metoder som influerade matematikundervisningen, den heuristiska och den genetiska. Huruvida Fogelmarck skrev med en genetisk eller heuristisk metod är dock svårt att avgöra, men rimligtvis bör han ha tagit intryck av de båda.

Med respektive pedagogisk metod som utgångspunkt kan emellertid Fogelmarcks metod och lärobok förstås ur två perspektiv.

I. Låt oss anta att Fogelmarck arbetade utifrån en genetisk metod, en i uppsatsens teoretiska sammanhang essentialistisk metod. Han satte då matematiken i fokus och hade en ambition att framställa en så vetenskapligt korrekt matematik som möjligt. En rimlig förklaring till att Fogelmarck då inte berörde sambandet mellan kontinuitet och definitionsmängd och inte betonade kontinuitetsbegreppet på samma tydliga vis som Cauchy, är att han som läroboksförfattare valde bort begrepp som ännu inte var allmänt vedertagna. Han kanske ännu inte till fullo förstod dem, även om han ansåg dem viktiga. Att Fogelmarck skulle ha valt bort dem av pedagogiska skäl, p g a att de skulle ha varit för teoretiska, är mindre troligt eftersom boken i övrigt höll en hög teoretisk nivå och det motsägs också av den genetiska metoden i sig. Hans val av innehåll var primärt avhängigt den vetenskapliga disciplinen matematik.

II. Vi antar att Fogelmarck arbetade utifrån en heuristisk metod, en i uppsatsens teoretiska sammanhang progressiv metod. Han utgick då från elevens förståelse av matematik. Hans motiv till att inte betona kontinuitetsbegreppet var då att göra sin framställning enkel och lättfattlig. Fogelmarck ansåg kontinuitet vara ett så abstrakt begrepp att det först infördes i bevis och definitioner där de var absolut nödvändigt. En möjlig ambition hos Fogelmarck var då att successivt föra in kontinuitetsbegreppet i sin framställning och visa på dess nödvändighet och där igenom främja elevernas förståelse. Hans val av innehåll var primärt avhängigt elevens förståelse av matematik, emellertid med tydliga referenser till den vetenskapliga disciplinen matematik.

Dessa båda metoder visar på ett klart samband mellan den högre matematiken och skolmatematiken. Studien av Fogelmarcks lärobok visar att de vilar på den högre matematiken, skillnaden ligger i skolmatematikens syfte. Metoden bestämde alltså hur läroboken användes som pedagogiskt verktyg. Med den genetiska metoden kunde läroboken relativt den heuristiska metoden i större utsträckning användas som ett matematiskt uppslagsverk av eleven. Den senare metoden förutsatte att eleven följde läroboken i sådan utsträckning att den pedagogiska strukturen förblev meningsfull, d v s att man gick från det enkla till det abstrakta. Med den genetiska metoden användes matematiken för att lösa problem inom fysik och ekonomi, medan med den heuristiska metoden användes praktiska exempel från fysik och ekonomi för att förstå matematiken.

Käll- och litteraturförteckning

Tryckta källor

Artiklar

Grabinger, Judith V, *America Math. Monthly* (1983), “Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous of calculus”.

Grabinger, Judith V, *Historia Mathematica* (1978), “The origins of Cauchy´s theory of the derivative”.

Laugwitz, Detlef, *Archive for History of Exact Sciences* (1986), “Infinitely Small Quantities in Cauchy´s Textbooks”.

Läroböcker

Björling, Carl Ferdinand Emanuell (1867), *Elementerna af algebraiska analys och differential-kalkylen*. Uppsala

Fogelmarck, Emil (1873), *Lärokurs i differential-räkning, del 1*, Stockholm

Fogelmarck, Emil (1877), *Lärokurs i differential-räkning, del 2*, Stockholm

Myndigheters dokument

1856 års läroverksstadgar

1859 års läroverksstadgar

1878 års skollag

Tidskrifter

Pedagogisk Tidsskrift, årgång 1866-1874

Tidsskrift för Matematik och Fysik, årgång 1868-1871

Litteratur

Adams, Robert A (1995), *A complete course Calculus*, tredje utgåvan. Canada

Englund, Tomas (1991) i Uljens (red.). *Didaktik*, Lund

Edwards, Charles Henry (1979), *The Historical Development of the Calculus*. New York

Gårding, Lars (1994), *Matematik och matematiker*. Lund

Florin, Christina & Johansson, Ulla (1993), *"Där de härliga lagrarna gro…". Kultur, klass och kön i det svenska läroverket 1850-1914*. Kristianstad

Foucault, Michel (1974), *Övervakning och straff*. Lund

Liedman, Sven-Eric (1997), *I skuggan av framtiden*. Falkenberg

Lund, Jens (1995), *Från tangent till derivata*. Stockholm

Nationalencyklopedin

Richardson, Gunnar (1994), *Utbildningshistoria*, Lund

SAOB

Svenskt Biografiskt Lexikon

Thompson, Jan (1994), *Matematiklexikon*. Falun