

Seminarier i teoretisk filosofi i Uppsala den 25 januari 2002:

Matematikens utveckling och filosofi under 1600-talet

Anders Öberg

Inledning

Vilka faktorer har styrkt matematikens utveckling? Vilka matematiska problem, fysikaliska problem och vilka filosofiska idéer, med mera, har gjort avtryck i den matematiska utvecklingen? Har det kanske till och med varit så att filosofiska idéer har legat matematiken till last? Kan man överhuvudtaget säga så utan att mena att det finns en riktig matematik att upptäcka och att vissa filosofiska idéer hindrar oss ifrån att upptäcka den?

När det gäller filosofisk påverkan är det främst aristoteliska dogmer inom teorin för bevisföring som varit ett genomgående tema ända in på 1900-talet. Problemet är förstås att från vår utgångspunkt urskilja i vilka sammanhang dogmerna har varit positiva för den matematiska utvecklingen samt när dessa har haft en hämmande inverkan.

I sin bok *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, diskuterar Paolo Mancosu samspelet mellan filosofiska positioner och matematikens utveckling under framför allt 1600-talet. Mancosu vill belysa samspelet mellan matematikens filosofi och matematisk praxis under 1600-talet men även tidigare och senare. Med matematisk praxis avses inte matematiska tillämpningar inom andra områden än matematiken, utan i den standardbetydelse som filosofer ger en sådan term, det vill säga "matematiken som den utförs (av verksamma forskare)".

Bakgrund till Mancosus bok

Flera mycket betydande verk har skrivits under de senaste 40 åren om övergången från medeltidens vetenskapliga tänkande till renässansen. Av störst intresse har varit den revolution(?) som Galileis matematisering av fysiken utgjorde. Redan Duhems berömda 10-bandsverk *Le Système du Monde* från början av 1900-talet påvisade djupa förgreningar från Galileis tänkande bakåt till en febril aktivitet hos medeltida vetenskapsmän. Duhem påvisade alltså en kontinuitet mellan medeltidens tänkande och renässansen. 1952 kom en motsvarighet i den engelskspråkiga delen av världen; Crombies *Augustine to Galileo*. Precis som Crombie försökte senare (1961) Randall härleda den nya renässansvetenskapens framgångar hos medeltida kommentatorer av Aristoteles och i synnerhet då av dennes *Posteriora Analytik*. Wallace är en ännu senare (1984) förespråkare av kontinuitetstesen och finner hos Galilei ett stort inflytande från den Aristotelesundervisning som ägde rum hos de jesuiter som undervisade i Collegium Romanum. Men motståndet mot kontinuitetstesen konsoliderades snabbt och som exempel på förespråkare för en diskontinuerlig utveckling kan nämnas McMullin, Gilbert och Jardine.

Precis som i diskussionen "kontinuitet vs. diskontinuitet i fysiken" så har det förts en liknande diskussion om matematikens utveckling. Den fråga som har väckts gäller vilken grad (om någon) av kontinuitet som står att finna mellan den grekiska geometrin och 1600-talets matematik. Precis som i den "allmänna" vetenskapsteoretiska debatten finns företrädare för en kontinuitet (Milhaud

1921, om förhållandet mellan den grekiska och kartesianska matematiken) samt för en radikal diskontinuitet (Lachterman 1989).

Mancosu delar upp den matematiska utvecklingen i en epistemologisk del och i en parallell praxisdel. När det gäller den senare så finns det enligt Mancosu uppenbara brott i den matematiska utvecklingen. Under till exempel 1600-talet sker flera avgörande brott mot den tidigare förhärskande euklidiska sättet att bedriva geometrisk forskning. Men det som intresserar Mancosu mest är att försöka påvisa den epistemologiska kontinuitet som genom Aristoteles vetenskapsideal fungerat som en inte förrän på 1900-talet avslutad debatt(?) om matematikens natur och framför allt då en debatt om de matematiska bevisens natur. Samtidigt vill Mancosu framhålla den epistemologiska diskussionens påverkan och bidrag till nya matematiska landvinningar och brott mot tidigare traditioner.

I första kapitlet behandlar Mancosu den klassiska matematiken i termer av Euklides, Arkimedes, Apollonius, Pappus och deras efterföljare. Dessa verk utgjorde en mycket stabil korpus av resultat vilkas absoluta sanning sällan hade ifrågasatts. Under medeltiden hade man i den skolastiska traditionen, som i stor utsträckning stödde sig på Aristoteles, hävdade att matematiken exakt konformerade till de aristoteliska specifikationerna för en perfekt vetenskap som de hade uttryckts i Aristoteles *Posteriora Analytik*.

Men under mitten 1500-talet hade flera röster höjts emot denna tidigare uppfattning om matematikens ställning. Den debatt som tog vid brukar gå under namnet *Quaestio de Certitudine Mathematicarum*. De huvudsakliga frågorna var

- (a) Passar matematiken in i den definition på en vetenskap som Aristoteles ställt upp? – Detta ledde till en mycket noggrann analys av matematisk bevisföring. Flera kommentatorer hävdade att matematiken inte hade den slutledningsstruktur som man måste kräva av en aristotelisk vetenskap.
- (b) Om matematikens utsagor inte kan rättfärdigas inom den aristoteliska vetenskapsläran genom sin logiska struktur, på vilken grund står då egentligen matematiken?

Quaestio de Certitudini Mathematicarum

I sin *Posteriora Analytik* hade Aristoteles artikulerat en teori om vetenskaplig kunskap, en vetenskapsteori. För att kunna vara i besittning av vetenskaplig kunskap måste vi enligt Aristoteles känna orsakerna till de resultat som vi baserar vår kunskap på. Orsak syftar här på någon av de fyra aristoteliska orsakerna: formella, materiella, verkande och finala.

Vetenskaplig kunskap erhåller vi, fortsätter Aristoteles, genom slutledningar. För att garantera en vetenskaplig överföring från premisser till slutsatser, så måste dessa inte bara vara sanna, utan de måste dessutom stå i vissa bestämda förhållanden till varandra. Aristoteles gör en viktig distinktion mellan vad han kallar slutledningar av faktum respektive slutledningar av grundat faktum. De förra slutledningarna går från verkningarna till orsakerna, medan de senare förklarar verkningarna genom deras orsaker.

Exempel

Antag att vi vill bevisa att planeterna ligger nära jorden. Man skulle då kunna resonera på följande vis:

Planeterna blinkar inte
Vad som inte blinkar ligger nära jorden
Alltså, planeterna ligger nära jorden

Denna slutledning är enligt Aristoteles en slutledning av ett faktum men inte av ett grundat faktum. Det nämligen inte så att planeterna är nära jorden på grund av att de inte blinkar, utan det är tvärtom så att de inte blinkar för att de ligger nära jorden. Nedan får vi alltså istället en slutledning av ett grundat faktum:

Vad som är nära jorden blinkar inte
Planeterna är nära jorden
Alltså, planeterna blinkar inte

Den främsta typen av slutledning, den vetenskapliga syllogismen (av totalt tre stycken), kallades *potissima* av Aristoteles medeltida kommentatorer.

1547 publicerade Piccolomini en avhandling med titeln *Commentarium de Certitudini Mathematicarum Disciplinarum*. I detta arbete utmanade Piccolomini den traditionella uppfattningen om att de matematiska vetenskaperna ägde den högsta graden av vetenskaplighet i kraft av sin användning av *potissima*-slutledningar. Det fanns vid denna tid mycket skilda uppfattningar vad som egentligen skulle avses med en *potissima*-slutledning, men de skulle i alla fall innehålla minst de krav som Aristoteles ställt på de vetenskapliga syllogismerna.

Den efterföljande debatten skulle komma att fokuseras på huruvida de matematiska slutledningarna är kausala eller inte. Eftersom det var ett nödvändigt villkor för *potissima*-förklaringar att vara kausala, så räckte det att visa att matematiska slutledningar inte var kausala för att visa att de inte passar in i det aristoteliska vetenskapsidealet. Denna position hölls av Piccolomini, Pereira (en jesuitpräst) och senare av Gassendi. Pereiras uppfattning var att även om matematiken inte kunde göra anspråk på att vara en vetenskap, så kunde faktiskt fysikens slutledningar uppnå *potissimae* status och på så sätt godkännas som genuin aristotelisk vetenskap. Gassendi skulle senare (1624, men publicerat först 1658 efter hans död) skriva att det inte finns någon vetenskap i aristotelisk mening överhuvud taget.

Men en motreaktion skulle inte låta vänta på sig särskilt länge. Matematiker och filosofer skulle skynda till matematikens försvar; bland andra Barozzi, Biancani, Barrow och Wallis. Men även Clavius, som tjänstgjorde på den berömda jesuitiska läroanstalten Collegium Romanum skulle under 1580-talet bekymrat konstatera en splittring mellan matematiker och naturfilosofer. Mancosu menar att man på goda grunder kan anta att många av den som angrep vetenskapsanspråken i matematiken var lärare i naturfilosofi och de vände sig ofta mot matematiseringen av fysiken. Pereira var till exempel under många år kollega till Clavius vid Collegium Romanum och han undervisade där i naturfilosofi.

Vi ska nu titta på ett konkret exempel som Pereira hänvisade till i sin argumentation mot vetenskapligheten hos matematikens slutledningar. Det är fråga om sats I.32 i Euklides Elementa:

”Summan av de inre vinklarna i en triangel är lika med två räta vinklar.”

Beviset lyder som följer:

Låt ABC vara en triangel. Förläng BC till D. Dra en med BA parallell sträcka genom C, låt säga CE (E är faktiskt mångtydigt definierad utan en figur). Genom att hänvisa till tidigare bevisade satser har vi nu $BAC=ACE$ och $ECD = ABC$. Alltså, $ABC+ACB+CAB=ACB+ACE+ECD =$ två räta vinklar.

Den skolastiska traditionen skulle ha hävdats att detta är ett kausalt bevis i kraft av att triangeln har en essens (given av en definition) som ger resten av triangelns egenskaper, speciellt att vinkelsumman är två räta. Orsaken är mera specifikt en formell orsak.

Men Pereira riktar nu uppmärksamheten på svårigheten att isolera orsaken som ger triangeln den egenskapen att vinkelsumman är två räta. Pereira menar att det dessutom inte borde vara riktigt att hänvisa till den yttre konstruktion som hela beviset bygger på, eftersom vinkelsumman måste vara två räta oavsett om de två hjälpsträckorna dras eller inte. Det kan alltså inte vara så att den egentliga orsaken till att vinkelsumman är två räta står att finna i yttrevinklarnas och hjälpsträckornas egenskaper.

Detta exempel ansågs av många var ett tydligt motexempel till matematikens kausala natur.

Biancani

Giuseppe Biancani (1566—1624), som tillhörde jesuitorden, var professor i matematik vid universitetet i Parma. Han hade studerat matematik vid Collegium Romanum för Clavius och kände väl till Quaestio, eftersom Pereira undervisade i naturfilosofi vid samma lärosäte. 1615 publicerade han som ett appendix till en större verk (*Aristotelis Loca Mathematica*) ett längre inlägg om Quaestio, *De Mathematicarum Natura*. Biancani vänder sig framför allt mot de uppfattningar som tidigare hade förfäktats av Piccolomini och Pereira, men även mot de så kallade *Coimbriska kommentarerna*, en filosofikurs som gavs ut av jesuiterna vid Coimbra (i Portugal) 1594. Det är framför allt de två första (av totalt fem) kapitlen av Biancanis appendix som är av intresse för Mancosu.

Första kapitlet innehåller en diskussion om matematikens objekt och huruvida dessa existerar samt en diskussion om definitionernas natur. Biancanis uppfattning är att matematikens objekt är kvantiteter som vi har abstraherat ur sinnesintryck. Aritmetiken och geometrin, som tillsammans utgör den rena matematiken, beskriver de diskreta respektive kontinuerliga storheterna. Biancanis uppfattning om de matematiska objekten är en typisk ”skolastisk” (eller kristen) version av den aristoteliska matematikfilosofin i det att de matematiska objekten existerar som rena former i Guds medvetande. Vissa kommentatorer har, som Mancosu påpekar, här velat se en anstrykning av platonism i Biancanis tänkande och det är inte en oviktig fråga på vilka grunder Biancani och andra bygger sina argument eftersom det är en central fråga vid bedömningen av det platonska inslaget i den galileiska fysiken och den övriga vetenskapliga utvecklingen.

Andra kapitlet riktar uttryckligen mot Piccolomini, Pereira och de *Coimbriska kommentarerna*. Biancanis tes är att det finns matematiska slutledningar som stödjer sig på formella och materiella orsaker. Han utesluter verkande och finala orsaker som möjliga i detta sammanhang.

Ett exempel på hur en formell orsak kan vara orsaken i en matematisk slutledning är vid konstruktionen av en liksidig triangel utifrån en given sträcka AB (sats I.1 i Elementa): Beskriv två cirklar med lika stor radie med centrum i A respektive B. Låt C vara en punkt där cirklarna skär varandra. Sammanbind A med C och C med B. Då är ABC en liksidig triangel. Orsaken till de lika sidorna är att cirklarna har lika stora radier. Argumentet/konstruktionen bygger enligt Biancani ytterst på definitionen av en cirkel, som alltså utgör den formella orsaken.

Ett exempel när en materiell orsak fungerar som slutledningens bärande element, är just sats I.32, som Pereira tidigare använt om exempel på en sats vars bevis inte kunde vara kausalt. Biancanis motivering för att det är en materiell orsak som är förklaringen är att slutledningen ytterst går tillbaka på att helheten är lika stor som delarna tillsammans.

Barrow och Gassendi

Barrow författade två uppsatser i ett större verk (*Lectiones*):

(A) "Containing answers to the objections which are usually brought against mathematical demonstrations",

(B) "Of the causality of mathematical demonstrations".

Barrow citerar både Biancani och Pereira i sina arbeten. Han påpekar att de matematiska axiomens ställning hade varit under debatt redan under antiken. En vanlig antik skeptisk position byggde på att axiomen erhålls medelst induktion och att de därför måste vara fallibla. Barrow lanserar en alternativ uppfattning om de matematiska objektens natur som svar på den kristna aristotelianism (och/eller ev platonism) som föranlett Biancani att förneka att de matematiska objekten skulle kunna finnas utanför Guds/människans medvetande. Barrow menar att de matematiska objekten har en potentiell aktualiserbarhet i den materiella världen och på så sätt "lyckas" Barrow motivera ett inslag av användningen för våra sinnen för att heuristiskt visa på möjligheten av en matematisk hypotes – även om han inte vill sträcka sig så långt som till att matematiken vilar på induktion från våra sinneserfarenheter.

Barrow såg framför allt Pereiras invändningar som en utmaning. Först och främst påstår Barrow att det finns kausala matematiska slutledningar. Han anmärker att Aristoteles enda exempel på kausala slutledningar är hämtade från matematiken. Barrow anser det som mer eller mindre självklart att matematiska slutledningar är kausala, närmare bestämt baserar han de matematiska resultaten på formella orsaker; han argumenterar mot förekomsten av verkande och finala orsaker, men nämner inte materiella. Den kanske viktigaste aspekten av Barrows analys av den matematiska kausaliteten är att han tänjer på den aristoteliska kausalitetsdefinitionen (se även nedan under rubriken Motsägelsebevis). Barrow menar att det är tämligen godtyckligt vilken definition av flera ekvivalenta (för Aristoteles måste en definition vara helt entydig) som vi använder oss av i ett matematiskt bevis; vi kan t ex definiera en cirkel på flera ekvivalenta vis och vi bör välja en som passar till att visa en specifik sats. Utgångspunkten för ett matematiskt bevis

kan vi alltså påverka och denna utgångspunkt får vara den formella orsaken till det resultat vi bevisar.

Speciellt hade Barrow uppfattningen att bland flera möjliga definitioner av en geometrisk figur så är den som ges genom rörelse (en cirkel kan genereras genom att man tänker sig en sträcka rotera kring sin ena ändpunkt) den bästa eftersom man på så sätt bakar in en kausal mekanism i definitionerna; en cirkel låter sig alltså förklaras genom den rörelse som är dess orsak. Denna mer precisa uppfattning levererar Barrow i *Mathematical Lectures* och Mancosu ser här den aristoteliska kunskapsteorins inflytande på matematisk praxis. Barrow använder rörelsedefinitioner av kurvor för att bestämma tangenter till dessa.

Den främsta anledningen till Barrows omfattande angrepp på bland andra Pereira antar Mancosu vara den först 1658 utgivna *Opera Omnia*, som Gassendi skrivit redan 1624 och som 1658 hade blivit postumt publicerad. (Barrow nämner inte Gassendis namn.) I sin *Opera* lanserar Gassendi uppfattningen att det inte finns någon aristotelisk vetenskap, men säger trots det att det inte kan finnas någon som kan tvivla på matematikens resultat.

Motsägelsebevis

Ett av Piccolominis huvudargument för bristen på kausalitet i matematiska bevis var att ge exempel på satser i Euklides *Elementa* som han inte ansåg var kausala. Han riktade speciell uppmärksamhet mot satser som till exempel första delen av sats I.5 samt sats I.6 som är varandras omvändningar i det att ”i en likbent triangel är vinklarna vid basen lika” respektive att ”om vinklarna vid basen i en triangel är lika så är triangeln likbent”. Om vi nu läser ”implikation” som något mer än logisk konsekvens, genom t ex att efter Aristoteles säga att A implicerar B betyder att A orsakar B, då får vi problem om vi har en matematisk sats som säger A orsakar B och sedan en som säger B orsakar A, eftersom detta måste innebära att A orsakar sig självt, vilket vore en absurditet (åtminstone för en aristotelik).

Piccolomini kritiserades för sin attack mot det matematiska beviset av Barozzi som i sin *Oratio* försöker visa att de matematiska vetenskaperna passar in i den aristoteliska vetenskapsmodellen. Däremot ger han Piccolomini sitt erkännande för att denne påpekat att motsägelsebevisen inte är kausala – men det betyder inte att det inte finns några kausala bevis, menar Barozzi. Även Pereira och Biancani var helt eniga på denna punkt; det vill säga att motsägelsebevisen inte kan sägas vara kausala.

Denna konsensus om att motsägelsebevisen var de direkta bevisen underlägsna kunde givetvis ges olika betydelser. Tre skilda uppfattningar om betydelsen av förhållandet mellan direkta och indirekta bevis kom att göra sig gällande:

- (a) Vissa delar av matematiken är mera vetenskapliga än andra, eller värre, vissa delar av matematiken är vetenskap, medan andra inte. (Barozzi, Biancani)
- (b) Man kan försöka tumma på den aristoteliska kausalitetsdefinitionen. (Barrow, Rivalentus)
- (c) Man skulle kunna försöka eliminera motsägelsebevisen från den klassiska matematiken. (Guldin)

Rivalentus kommenterade 1615 motsägelsebevisens ställning i sin inflytelserika kommentar av Arkimedes arbeten. Arkimedes använder flitigt uttömningsmetoden i sin bevisföring (t ex för att

visa att mantelytan av en sfär är fyra gånger så stor som ytan av dess storcirkel; Arkimedes visar att mantelytan varken kan vara större eller mindre än fyra gånger ytan av storcirkeln). Rivaltus idé är nu att hävda att geometrikerna inte använder sig av orsaken till ett ting utan orsaken till sin kunskap om ett ting – orsaken till kunskap kan enligt Rivaltus erhållas genom indirekt bevisföring.

Paul Guldin skulle angripa Rivaltus i sin *Centrobaryca*, som publicerades mellan 1635 och 1641. Guldin trodde också att kausala bevis kunde ges i matematiken och för detta stödde han sig på Biancani. Men han hade dessutom idén att man skulle kunna göra sig av med motsägelsebevisen i den euklidiska och arkimediska matematiken. Men Guldins mera konkreta försök till att genomföra detta i form av volymsbestämningar – med hjälp av vad som senare skulle benämnas ”Guldins regel” – byggde implicit på antaganden som ”behövde” motsägelseargument för sina bevis. Detta observerades av Cavalieri. Senare, på 1900-talet skulle precis samma ”misstag” utföras av Hessenberg, som presenterade direkta bevis för transcendenten av π och e , men som stödde sig på resultat som visats med motsägelsebevis.

Att göra sig av med motsägelsebevisen i matematiken hade varit en tanke redan hos Aristoteles i den *Priora Analytiken*. Bolzano hade också denna vision och han såg sig för övrigt som en efterföljare till Aristoteles i sina krav på vetenskapliga orsaksförklaringar i matematiken; dessa kunde speciellt inte vara på formen av motsägelsebevis. Bolzano kritiserade framför allt Kant som menade att matematiken och filosofin hade två helt olika metoder; speciellt var filosofins metod inte den matematiska, vilket Leibniz och Wolff hade velat hävda. I själva verket menade Kant att en vattendelare mellan matematiken och filosofin stod att finna just i det legitima att använda motsägelsebevisen i matematiken och det illegitima att använda dem i filosofin. Som exempel på riskerna med att använda motsägelsebevis i filosofin kunde Kant peka på sina antinomier; om vi t ex antar att rummet är ändligt får vi en motsägelse och antar vi att rummet är oändligt får vi också en motsägelse.

Bolzano menade precis som Leibniz att den matematiska metoden var en universalmetod och framför allt den bästa metoden för att erhålla säker kunskap. Bolzano skrev i sin *Wissenschaftslehre* (1837) att matematiska bevis bör vara orsaksförklaringar som inte bara ger visshet utan även en förklaring (grund, Grund) till en matematisk sats sanning. Inte enbart motsägelsebevisen hamnar utanför dessa optimala bevis, utan även en del direkta bevis av ”rundgångskaraktär”.

Men det skulle dröja ända in på 1900-talet innan Gentzen presenterade en möjlig lösning på problemet.

Superposition

Beviset av sats I.4 (som säger att om två trianglar har två sidor och mellanliggande vinkel lika, så är trianglarna lika) i Euklides *Elementa* kritiserades troligen för första gången av Jacques Peletier i *In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri XV* som publicerades 1557. Peletier vände sig emot Euklides användning av superposition i beviset av sats I.4, som går till så att Euklides successivt lägger över de sidor som är lika (vilket är möjligt tack vare att den mellanliggande vinkeln är densamma) och erhåller att de tredje sidorna (baserna i Euklides bevis) i de två trianglarna helt sammanfaller. Tre satser (I.4, I.8 och III.24) bevisas med denna metod.

Peletier hade två argument mot detta förfarande:

- (a) Många satser skulle vara redundanta om superposition vore tillåtet, t ex sats I.2 som säger att man i en given punkt kan placera en sträcka lika stor som en given sträcka (behövs för att kunna konstruera en cirkel med given radie och given medelpunkt).
- (b) Geometrin skulle helt plötsligt ha en mekanisk anstrykning eftersom superpositionen innebär en förflyttning och/eller en rörelse.

Peletiers lösning är drastisk; han föreslår att man bör ta lydelsen av sats I.4 som en grundsats. Han gav dock ett alternativt bevis för satsen. Clavius gick 1589 i svaromål mot Peletier och lyckades visa att Peletiers alternativa bevis innehöll ett cirkelslut (först Bolzano skulle i *Betrachtungen* 1804 göra ett övertygande försök att eliminera superpositionsmetoden från geometrin).

Biancani kommenterade detta i kapitel 3 av sin *De Mathematicarum Natura* och menade att superpositionsmetoden endast skall ses som en konstruktionsmetod i geometrin och att superpositionen inte alls fungerar som mellanled i syllogismen. Det är istället, säger Biancani, kongruensen (hos t ex trianglarna i sats I.4) som fungerar som mellanled. Betyder detta att sats I.4 är ett kausalt bevis? Det beror på vilken definition av likhet man använder, säger Biancani. Om definitionen av likhet är kongruens så följer satsen ur en formell orsak. Om kongruensen endast är ett tecken på likhet, så är beviset a posteriori och går från verkan till orsak.

Mancosu påpekar dock att det i grekiskan är en mycket subtil skillnad mellan "överensstämmelse" och "påläggning" och det är värt att notera att Euklides använder kongruensbegreppet bara då han inte kan undvika det.