Rekommenderade övningar i Adams och Simmons-Krantz (SK)

Lektion	Avsnitt	Uppgifter
1	10.1, s.567-568	3, 5, 6, 10, 15-19, 21, 22, 25-29, 31,
	10.5, s.596	1, 3, 5-15, 17, 19,
	11.1, s.627-628	1-5, 7, 9, 17, 18, 19.
2	11.3, s.641-642	5, 7, 9, 13, 16, 19,
	12.1, s.675-677	1-5, 13-15, 17, 21, 23, 24, 27, 33, 35, 37, 39, 40,
	10.1, s.567-568	33-37, 40,
	12.2, s.680-681	1, 4, 7, 9-13, 15, 20.
3	12.3, s.687-688	3-8, 11, 12, 26, 27, 28, 31,
	12.4, s.692-693	1, 5, 7, 9-11, 15,
	12.6, s.712-714	1, 2, 11,
	12.3, s.687-688	13, 15, 17, 23, 35.
4	12.5, s.702-703	1, 3, 5, 9, 11, 13, 15,
	12.6, s.712-714	17, 18,
	12.7, s.723-724	5, 7, 11, 15, 19, 22, 26.
5	12.8, s.734-735	1, 3, 11, 13, 16, 25,
	12.9, s.740	7, 8, 9, 10 (endast grad 2)
6	13.1, s.750	1, 3, 4, 5, 9, 14, 17, 19, 22, 29
	13.2, s.756	1, 2, 3, 4, 6, 9, 10.
7	13.3, s.764-765	1, 2, 7, 8, 9, 11, 19, 22, 24,
	14.1, s.795-796	13-19, 21
	14.2, s.802-803	1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 19, 23.
8	14.3, s.807-808	1, 3, 4, 5, 7, 8, 23, 26,
	14.4, s.817-818	1, 3, 5, 9, 11, 13, 21, 30, 31, 32, 33.
9	14.5, s.823-824	1, 2, 3, 4, 7, 9, 14, 15, 17, 27,
	10.6, s.600	1, 2, 3, 5, 7,
	14.6, s.830	1, 3, 6, 8, 11, 13,
	14.7, s.838-840	1, 3, 5, 7, 19, 21.
10	15.1, s.848-849	2, 3, 5, 6, 13,
	15.2, s.857	1-5,
	15.3, s.861-862	1, 2, 8,
	15.4, s.869-870	1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13.
11	16.3, s.906	1 - 5,
12	15.5, s.880-881	4, 7, 8, 13, 15,
	15.6, s.886	1, 2, 5, 7.
13	16.1, s.896	3, 6, 7,
	16.4, s.912-913	1, 2, 6,
	16.5, s.916-917	2, 3, 4, 8
14	SK 1.5, s.20-21	7, 15, 21
	SK 1.7, s.28-29	1(d),(e),
	SK 1.8, s.32-33	1(a),(b),(i), 2, 1(c),
	SK 2.3, s.71	1(b),(f), 5(a),(d),
	SK 2.7, s.98-99	3, 11, 15, 17, 19(b),(c)
15	SK 10.1, s.374	1,
	SK 10.2, s.380-381	2, 3,
	SK 10.3, s.387-388	1, 3, 5.

Extra övningar

Följande övningar utöver dem i boken rekommenderas också inför lektionerna.

Inför lektion nr 1

1. Bestäm ortogonala projektionen i xy-planet av skärningskurvan mellan ytorna $3x^2 + 4y^2 - 4x - z = 0$ och $x^2 + 3y^2 + 2y - z = 1$.

2. Samma uppgift för kurvan som ges av $z = x^2 + 4y^2$, $2x + 8y + z = 4$.

Svar: 1. $(x-1)^2 + (1/2)(y-1)^2 = 1$ 2. $\frac{1}{9}(x+1)^2 + \frac{4}{9}(y+1)^2 = 1$

Inför lektion nr 2

1. Parametrisera kurvan i extraövning (2) från förra lektionen!

2. Studera kurvan $r = 1 - \cos\theta$ (polära koordinater i xy-planet). Den kan parameterframställas genom att man använder formlerna

$$x = r\cos\theta = (1-\cos\theta)\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = (1-\cos\theta)\sin\theta$$

och använder θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, som parameter. Skissera kurvan! Undersök särskilt hur den ser ut i närheten av $\theta = 0$. Beräkna längden av kurvan. (Kurvan kallas cardioiden eller hjärtkurvan.)

Svar: 1. $r(t) = (-1+3\cos(t), -1+\frac{3}{2}\sin(t), 14-6\cos(t)-12\sin(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, 2. Kurvans längd är 8.

Inför lektion nr 4

1. Transformera differentialekvationen

$$yf_x + xf_y + f_z = 0$$

($f = f(x,y,z)$), genom att införa nya variabler $u = (x+y)e^{-z}$, $v = (x-y)e^{z}$, $w = z$. Ange också den allmänna lösningen till differentialekvationen i hela $\mathbb{R}^3$.

2. Antag att $f(x,y)$ satisfierar den partiella differentialekvationen $f_x + 2f_y = 0$. Visa att för alla a är linjerna $y = 2x + a$ (delmängder av) nivåkurvor för f. Ledning: sätt $g(x) = f(x, 2x+a)$.

Svar: 1. $g_w = 0$. Den allmänna lösningen: $f(x,y,z) = h((x+y)e^{-z}, (x-y)e^{z})$, där $h(u,v)$ är en godtycklig funktion av två variabler av klass C^1.

Inför lektion nr 5

1. Visa att sambandet $\ln(xy) - (x-1)e^{y-1} = 0$ definierar y som funktion av x i en omgivning av $(1,1)$. Visa också att denna funktion har en stationär punkt i $x = 1$ och bestäm dennas karaktär!

2. Visa att sambandet $x^2 - xyz + y^2 + z^3 = 4$ definierar z som funktion f av (x,y) i en omgivning av punkten $(2,1,1)$ och beräkna $\nabla f(2,1)$.

3. Visa att sambandet $z^3 + xyz^2 - x^2y = 8$ definierar en funktion $z = f(x,y)$ i någon omgivning av punkten $(x,y,z) = (4,0,2)$. Visa vidare att $(x,y) = (4,0)$ är en stationär punkt till $f(x,y)$, dvs. att de båda partiella förstaderivatorna är noll där.

Svar: 1. Lokal minimumpunkt. 2. $\nabla f(2,1) = (-3,0)$.

Inför lektion nr 6

1. Låt $f(x,y) = x^2(1+y)3+y^2$. Visa att f har en enda stationär punkt (a,b), som är ett lokalt minimum. Visa att $f(a,b)$ inte är funktionens minsta värde, eftersom f antar alla reella värden. (Lägg märke till skillnaden mellan detta fall och situationen för funktioner av 1 variabel där inget sådant vore möjligt. Man kan försöka göra sig en bild av funktionens graf, fast det är inte så lätt!)

Inför lektion nr 9

1. Beräkna volymen av den kropp som ligger innanför de båda cylindrarna $x^2 + z^2 = a^2$ och $y^2 + z^2 = a^2$.

Svar: 1. $16a^3/3$

Inför lektion nr 11

1. Beräkna kurvintegralen
$$\int_C (e^{x+y} - y)dx + (e^{x+y} - 1)dy$$
längs halvcirkelbågen i första kvadranten från origo till punkten $(1,0)$.

2. Beräkna
$$\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$
där γ löper i positiv led längs ellipsen $x^2 + y^2/4 = 1$ från (1, 0) till (0,-2) .

3. Beräkna arean av området mellan x-axeln och cykloidbågen
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Svar: 1. $e-1-\pi/8$. 2. $3\pi/2$. 3. 3π

Inför lektion nr 12

1. Beräkna arean av en sfärisk zon, dvs. den del av en sfär som ligger mellan två parallella plan. Konkret: den yta som beskrivs av $x^2+y^2+z^2=a^2$, $b\leq z\leq c$. (Resultatet är på ett visst sätt lite överraskande. Hur då?) **Svar:** Area $=2\pi|a|(c-b)$ för $-|a|\leq b\leq c\leq|a|$.)

Dessutom blandade övningar på sidan 11 i detta häfte, nummer 1, 2.

Inför lektion nr 13

Gör blandade övningar på kurv och ytintegraler i detta häfte, nummer 8, 9, 14, 18.

Blandade övningar på kurv- och ytintegraler

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $4z=x^2+y^2$ som skärs ut av cylindern $z=y^2$ och planet $z=3$.
2. Beräkna arean av den del av planet $x+2y+z=1$ som skärs ut av cylindern $x^2+y^2=1$.
3. En del S av konen med ekvation $x^2+y^2=z^2$ ligger över xy-planet och dess ortogonala projektion på xy-planet har area A. Visa att arean av S är $A\sqrt{2}$.
4. Antag att ytan S har ekvationen $z=h(x,y)$, där $(x,y)\in D$ och D är ett område i $\mathbb{R}^2$. Visa att arean av S ges av
$$\iint_D\left(1+(\frac{\partial h}{\partial x})^2+(\frac{\partial h}{\partial y})^2\right)^{1/2}dxdy$$
5. S betecknar ytan $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$, med normalen riktad från origo. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)=-xy\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z(y-1)\mathbf{k}$ genom S.
6. Låt C vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2-x=0$ och paraboloiden $z=1-x^2-y^2$. Beräkna kurvintegralen $\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ och C genomlöps så att riktningen i $(1,0,0)$ ges av vektorn $(0,1,0)$.
7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}=xz^2\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}+(z^2+2)\mathbf{k}$ ut ur cylindern $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 1$.
8. Låt $\mathbf{F}(x,y,z)=xe^z\mathbf{i}+y^2e^z\mathbf{j}+(2y-2ye^z)\mathbf{k}$ vara ett vektorfält på $\mathbb{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av planet $x+y+z=1$ som ligger i första oktanten (dvs. $x,y,z>0$). Normalriktningen antas ha positiv z-komponent.

9. Beräkna
$$\left|\int_C (z-x)^2dx + (z+x)^2dy + z^2dz\right|$$
där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $2x+y+z=2$.

10. S är en sluten yta (med utåtriktad normal) för vilken Gauss' sats (divergenssatsen) är tillämplig, och $\mathbf{F} = (2x+y-x^3/3)\mathbf{i}+(y-4yz^2)\mathbf{j}+(z-4y^2z)\mathbf{k}$. Bestäm, under dessa förutsättningar, det maximala värdet av $\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}$.

11. Beräkna $\iint_S \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$, då $\mathbf{F} = \sin x^2\mathbf{i}+(y-2xy\cos x^2)\mathbf{j}+(1+y+z)\mathbf{k}$, och S är den del av ytan $z=1-x^2-y^2$ för vilken $x\geq 0$ och $z\geq 0$. Ytans positiva normalriktning bildar icke-trubbig vinkel med positiva z-axeln.

12. $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+y2\mathbf{k}$. C är en styckvis deriverbar sluten kurva på cylindern $x^2+y^2=1$ och skär inte sig själv. Beroende på hur C löper på ytan (bara ett varv, givetvis), kan $\int \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ anta tre olika värden. Beskriv de tre fallen och bestäm de tre värdena.

13. Beräkna $\iint_S \mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{N}}dS$, där S är halvellipsoiden $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$, $z\geq 0$, med uppåtriktad normal, och $F = y\mathbf{i}$.

14. Beräkna flödet av vektorfältet $xy\mathbf{i}+xyz\mathbf{j}+(x+2y+3z)\mathbf{k}$ ut ur volymen $1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4$.

15. Beräkna
$$\left|\int_C ydx+zdy+xdz\right|,$$
där C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $2x+2y+z=3$.

16. Beräkna med hjälp av Stokes' sats $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = (yz+y-z)\mathbf{i}+(xz+5x)\mathbf{j}+(xy+2y)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+z^2=1$ och $x+y=1$. C är orienterad så att dess omloppsriktning i punkten $(1,0,0)$ ges av vektorn $(0,0,1)$.

17. Visa att
$$\int_C (2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2xz+y^2)dz$$
är oberoende av vägen mellan två givna punkter A och B.

18. Låt S vara den del av cylindern $x^2+y^2=1$ som ligger mellan planen $z=0$ och $z=x+2$. Beräkna $\int_S \mathbf{F}\bullet dS$, om $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

19. Beräkna $\int_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ om $F = (xy+z)\mathbf{i}+y^2z^3\mathbf{j}+(12x^2+z^2)\mathbf{k}$ och C är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+2y^2=1$ och $z=y+1$. C:s omloppsriktning är positiv (moturs) sett från origo.

Svar: 1. $(56/9)\pi$. 2. $\pi\sqrt{6}$. 5. 0. 6. $-\pi/4$. 7. $\pi/3$. 8. $e-5/2$. 9. 0. 10. $\frac{64}{15}\pi$. 11. π. 12. $0,\pi,-\pi$. 13. 0. 14. 28π. 15. 5π. 16. $-(1/2\sqrt{2})\pi$. 18. $\pm 2\pi$. 19. $\pi/\sqrt{2}$.