

Läsanvisningar till flervariabelanalys

Anders Johansson (Bearbetning från Gunnar Bergs)

2011-08-30 tis

Kapitel 10-11

Denna första anvisning handlar om innehållet i kapitel 10 och 11. Huvuddelen av det som står i kapitel 10 bör du känna igen från algebrakursen. Bläddra igenom dem för att konstatera att/om så är fallet och för att bekanta dig med bokens skrivsätt och terminologi, i vissa avseenden skiljer den sig från de du tidigare använt.

- 10.1** Fundamentala saker om analytisk geometri. Vi tar upp avsnittet om topologiska begrepp senare.
- 10.2** Här handlar det om att kunna handskas med vektorer och särskilt att känna sig hemma med skalärprodukten (“the dot product”).
- 10.3** Vektorprodukten kommer vi att använda för att konstruera en vektor i rummet som är vinkelrät mot två givna vektorer. För ytintegraler kommer vi också att använda att längden på vektorprodukten ger arean av den parallelogram som spänns upp av vektorerna.
- 10.4** Vi kommer att arbeta mycket i tre dimensioner och det är viktigt att kunna handskas med linjer och plan, de i många avseenden enklaste objekten där. Läs noga Example 1 som handlar om plan och se till att du förstår det som står där. När det gäller räta linjer så spelar Example 5 samma roll.
- 10.6** Materialet här kommer vi att använda i begränsad omfattning senare, så ni kan gärna vänta med detta avsnitt.

En stor del av denna kurs rör det tredimensionella *euklidiska rummet*, som på ett intimt sätt är relaterat till det cartesiska rummet \mathbb{R}^3 , vilket är

mängden av alla reella taltripplar (x, y, z) . Vi kommer att använda beteckningen \mathbb{R}^3 och underförstå den euklidiska strukturen: Avstånd mellan två punkter, P och Q , ges av längden på motsvarande *förflyttningsvektor*, \vec{PQ} .

Det är viktigt att du snabbt känner dig hemma där och lär känna de viktigaste invånarna: linjer och plan; sfärer, ellipsoider, paraboloider, cylindrar, koner och hyperboloider. Vi räknar ofta på delmängder av dessa, kurvor uppkomna via skärningar av olika slag. Avsnitten 10.1 och 10.5 (samt senare 12.1) är särskilt viktiga i detta avseende.

Kapitel 11

I kapitel 11 tar man upp kurvor i rummet och deras parametriseringar. En kontinuerlig funktion $\mathbf{r}(t)$ från ett intervall $t \in I = (a, b)$ till rummet \mathbb{R}^n är en *vektor-värd funktion*. Under lämpliga förutsättningar är dess bildmängd $\mathbf{r}(I)$ en *kurva* C i rummet. Vi kan då säga att $\mathbf{r}(t)$ är en *parametrisering* av kurvan C . En parametrisering kan sägas åskådliggöra en partikels rörelse längs kurvan och viktiga kinematiska storheter som hastighet och acceleration tas upp. De deriveringsregler för vektor-värda funktioner som tas upp borde kännas naturliga. I avsnitt 11.3 koncentrerar man sig på de geometriska egenskaper hos kurvan som är *oberoende av parametrisering*. Det viktigaste gäller *längden* av kurvor och hur dessa erhålls ur en integral för en given parametrisering.

Aktuella avsnitt: 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, (10.6), 11.1, 11.3.

Kapitel 12.1-5

Gränsvärden

Här handlar det om att utvidga de grundläggande begreppen: gränsvärde, kontinuitet och speciellt derivata från en till flera dimensioner. Gränsvärdetsbegreppet fungerar väsentligen som tidigare; definitionen är densamma med ett till \mathbb{R}^2 (eller \mathbb{R}^3) justerat närhetsbegrepp: Dvs att $f(\mathbf{x})$ närmar sig $f(\mathbf{x}_0)$ om $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ närmar sig 0. Skillnaden är \mathbf{x} kan närma sig på många olika sätt; i envariablefallet fanns väsentligen bara två möjligheter: från höger eller från vänster.

Samma räkneregler gäller (dvs. "gränsvärdet av en summa är summan av gränsvärdena" etc) och med hjälp av dessa samt enkla standardgränsvärden fås att även nu är alla elementära funktioner kontinuerliga. Med räkneregler klaras de flesta gränsvärden av; de som återstår kräver att man går till definitionen. Observerar att vi kan alltid göra ett variabelbyte $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ så

att $f(\mathbf{x}) \rightarrow L$ när $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ om och endast om $f(\mathbf{u}) \rightarrow L$ när $\mathbf{u} \rightarrow 0$. Därför gäller nästan alla gränsvärdesproblem i boken fallet \mathbf{x}_0 .

Notera följande tekniker.

- Om $f(\mathbf{x})$ kan skrivas som eller uppskattas med en (eller flera) funktioner $f(r)$ av $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ så kan man använda ett variabelbyte till polära koordinater och behandla envariabelgränsvärdet $\lim_{r \rightarrow 0} f(r)$. (Ex. 5 löses enklast så.)
- För att visa icke-existens av ett gränsvärde räcker det att visa att vi får olika resultat när vi närmar oss punkten "längs olika kurvor". Genom parametrisering av kurvorna ges dessa värden som gränsvärden i en variabel. (Ex.3,4).
- algebraiska manipulationer ger oss möjlighet att reducera gemensamma faktorer i nämnare och täljare.

Partiella derivator

När det gäller avsnitt 12.3: partiella derivator, så bör du lära dig Definition 4 ibland är det nödvändigt att gå tillbaka till den för att bestämma en funktions derivata. Notera att definitionen innebär att den *partiella derivatan* av $f(x, y, \dots)$ med avseende på x erhålls genom att betrakta y och övriga variabler som konstanter. I praktiken beräknas sedan de partiella derivatorna på precis samma sätt som i envariabelfallet; alla de gamla vanliga reglerna och formlerna gäller.

Observera alla olika notationskonventioner för de partiella derivatorna; partialderivatan av $f(x, y)$ med avseende på x kan alltså skrivas $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_x(x, y)$.

Göra klart för dig att den partiella derivatan endast ger "en-dimensionell" information om funktionen i koordinatriktningarna (Fig. 12.15-16).

Om en funktion av en variabel är deriverbar i en punkt, vet man att dess graf kan approximeras väl av tangenten nära punkten. För att detta skall gälla i för flera variabler *räcker det inte att de partiella derivatorna existerar*; definition av deriverbarhet ges i senare avsnitt. I boken (sid.684 f.) definieras dock ett tangentplan i en punkt utgående från de partiella derivatorna som det plan genom punkten $(x, y, f(x, y))$ vars normal ges av *gradienten* $\nabla f = (f_x, f_y)$. Detta existerar så fort funktionens två partiella derivator existerar i punkten. Detta medför inte att funktionens graf approximeras väl av tangentplanet i alla riktningar utan bara i riktningar parallella med axlarna. Ex.8 utgår.

Högre ordningens derivator

Högre ordningens partiella derivator definieras helt analogt genom upprepade partialderivering. Den partiella derivatan av f med avseende på först x sen y ges av att derivera med avseende på y det uttryck vi erhållit som den partiella derivatan med avseende på x . Denna andra ordningens "blandade" partiella derivata skrivs som $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$. Notera att f_{xy} inte nödvändigtvis är lika med f_{yx} , men att detta gäller under villkoren i Theorem 1.

I avsnittet ingår också några viktiga exempel på partiella differentialekvationer av andra ordningen: *Laplace-ekvationen* och *vågekvationen*. Lösningar till Laplace-ekvationen kallas *harmoniska*.

Kedjeregeln

Kedjeregeln (eller snarare kedjereglerna) i avsnitt 12.5 kräver litet eftertanke, det finns en mängd olika varianter beroende på vilken typ av sammansättning det är frågan om. När det gäller förstaderivator inser man dock snart att det helt enkelt gäller att "summera över de mellanliggande variablerna", medan formler involverande högre derivator (Sid. 668 ff.) blir litet mer komplicerade. Här kan säkert en noggrann genomläsning av Example 9 (sid. 669) vara av värde. Jag hoppas också att den operatormetodik jag tänker ta upp på föreläsningen kan vara till hjälp vid den här typen av problem. En bra typ av övning på kedjereglerna, som tyvärr ej finns representerade i boken, exemplifieras av de kompletterande problemen nedan samt utdelad problemlapp (problemen 3-8).

Aktuella avsnitt : 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5 (ej "Homogeneous Functions" sid. 668).

Differentierbarhet, implicita funktioner och Taylorutvecklingar

Differentierbarhet

I den matematiska analysen approximerar man ofta "krökta" objekt som kurvor och ytor med sina linjära motsvarigheter - linjer och plan. En kurva växer t.ex. nära en punkt precis när dess tangent i punkten har positiv lutning, tangentens lutning "smittar av sig på kurvan". På samma sätt studeras (funktions-)ytor med hjälp av tangentplan, men för att dessa skall smita an

till ytan i alla riktningar hjälper det inte att de partiella derivatorna existerar; dessa beskriver ju bara ytans beteende i två riktningar.

En intuitivt sätt att uttrycka detta är att om vi studerar en tillräckligt stark "förstoring" av funktionsgrafens omkring den givna punkten så kommer funktionsgrafens att likna ett plan. Det villkor på en funktion som kallas *differentierbarhet* (eller *deriverbarhet*) (Def.5, sid. 673) uttrycker att en linjär approximationen fungerar bra i alla riktningar.

Differentierbarhet är uppfyllt för snälla (vanliga) funktioner. Detta framgår av det mycket bekväma resultat (Theorem 4, sid. 674), som säger att det räcker att de partiella derivatorna är kontinuerliga, något som ofta är enkelt att verifiera. I vissa fall får man göra en specialundersökning av vissa enstaka punkter.

I avsnitt 12.7 införs den mycket användbara gradienten med vars hjälp man bl.a. kan undersöka hur en funktion ändras när man rör sig i vilken riktning som helst (Def. 6 och Theorem 7), alltså inte bara parallellt med axlarna. Dess viktiga geometriska egenskaper sammanfattas nederst på sid. 683 - läs och reflektera!

Jacobianen och den allmänna operatordefinitionen av derivatan

Vi säger allmänt att en vektorvärd funktion

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

Notera att om $m = 1$ så är $Df(\mathbf{x})$ gradientvektorn $\nabla f(x)$ uttryckt som och den linjära approximationen

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{x})\mathbf{h} = f(\mathbf{x}) + \nabla f \bullet \mathbf{h}.$$

Matris-derivatan $f'(\mathbf{x})$ gör att vi kan uttrycka *kedjeregeln* kompakt på matrisform: Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ är två differentierbara funktioner så gäller att derivatan av den sammansatta funktionen $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ ges av

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}) = f'(g(\mathbf{x}))g'(\mathbf{x}).$$

Kedjeregeln erhålls alltså som "yttre derivata gånger inre derivata".

Implicita funktionssatsen

I 12.8 behandlas en frågeställning som analytiskt kan uttryckas sålunda: "när kan vi ur en (eller flera) ekvationer lösa ut en (eller flera) variabler?", medan det geometriskt är frågan om att avgöra om en kurva (yta, "hyperyta"), kan

beskrivas som funktionskurva (funktionsyta, el.dyl.). I princip gäller att vi kan lösa ut en variabel för varje ingående funktion (varje funktion lägger till ett tvångsvillkor och minskar dimensionen, dvs. antalet oberoende variabler, med ett), samt att detta, förutsatt att funktionerna är tillräckligt "snälla", garanterat gäller om funktionaldeterminanten av funktionerna med avseende på de utlösta variablerna är skild från noll. Det bästa sättet att få en känsla för hur det fungerar är att skriva upp några enkla fall; Theorem 8 (sid. 731), ser onödigt tilltrasslad ut. Observera också att det rör sig om en existenssats, vi vet att funktionen finns, men inte hur den ser ut. Att vi trots det kan räkna ut dess derivata (-or) kan tyckas märkligt (se Ex.3).

Taylorutveckling

När det gäller Taylorutvecklingen (12.9) så gäller det att dels få en känsla för dess allmänna utseende, samt vara bergsäker på termerna av grad 2 (någon gång kan man behöva dem av grad 3 och 4). Vidare bör man kunna bestämma dessa termer, dels genom derivering och instoppning (Example 1), dels genom användande av kända envariabelutvecklingar (Example 2). Vi kommer mest att tillämpa detta vid undersökning av lokala extremvärden.

Aktuella avsnitt: 12.6 (sid. 710-712 kursivt), 12.7 (ej "Rates perceived..."), sid. 720), 12.8, 12.9

Tillämpningar av derivator (Kap. 13)

Nu handlar det om att tillämpa vad vi vet om derivator vid olika typer av extremvärdesundersökningar. Tänk först igenom hur det fungerar i en variabel. Vi antar att vi har en reellvärd funktion definierad på ett slutet intervall, I .

- Till att börja med har vi *lokala extrempunkter*, dvs. punkter P_0 sådana att det finns en omgivning till dem (ett litet pytteintervall, med andra ord) så att funktionsvärdet i P_0 är större än - eller mindre än - alla andra värden i omgivningen. Litet pittoreskt skulle man kunna säga att en alpinist befinner sig på en bergskam i tät dimma så att hon tror sig befinna sig på bergets högsta topp. Dessa punkter finns antingen bland dem där derivatan är noll - *stationära eller kritiska punkter* - eller där funktionen ej är differentierbar; som vid en spets (som t.ex. funktionen $f(x) = |x|$ nära $x = 0$.)
- När man bestämt de möjliga lokala extrempunkterna kan man undersöka deras karaktär, dvs. om det rör sig om maximum, minimum

eller terrasspunkter. Detta gör man enklast genom att undersöka andraderivatans tecken.

- Vad beträffar globala extrempunkter på I , - den högsta toppen, och nu har dimman lättat! - eller den djupaste gropen på hela intervallet - så finns det två moment i sökandet efter dessa. Dels att teoretiskt, armviftande argument: om funktionen är kontinuerlig och intervallet som sagt slutet så vet vi att det verkligen finns globalt maximum och minimum (känd sats). När det gäller att verkligen hitta dem så räcker det att undersöka tre kategorier av punkter: inre stationära (vars karaktär ej behöver vara känd!), punkter där funktionen ej är deriverbar (oftast finns det inga sådana) eller *randpunkterna*. Man räknar helt enkelt ut funktionsvärdena i dessa och ser var detta är störst resp. minst. Så är saken klar.

Som framgår av avsnitt 13.1 i boken fungerar det på motsvarande sätt i flera variabler. Nu är det slutna intervallet I ersatt med en sluten mängd i \mathbb{R}^2 eller \mathbb{R}^3 eller \dots . De stationära (kritiska) punkterna känns igen på att gradienten är noll i dem.

Bestämningen av karaktären hos en lokal extrempunkt blir litet mer komplicerad eftersom vi nu inte bara har en utan flera andraderivator att ta hänsyn till. Viss hjälp bör ni ha av att känna till begrepp som kvadratisk form och positivt definit och dess släktingar från den linjära algebran.

Aven bestämningen av globala extremvärden blir mer komplicerad eftersom ändpunkterna till intervallet nu ersätt med områdets rand, en kurva eller yta av något slag. I 13.2 visas hur man kan bete sig i enklare fall, medan 13.3, som rör "extremvärdesproblem med bivillkor" kan sägas ta upp problemet i allmän form. Här löses problemet antingen genom användande av Lagrangemultiplikatorer eller (ekvivalent) med användning av något determinantvillkor.

Det är helt enkelt så att ev. extremvärden finns bland de punkter där gradienterna för funktionen, resp. för de funktioner vars nivåytor (-kurvor) definierar området, är linjärt beroende. Som ni vet från den linjära algebran kan detta villkor formuleras på flera olika sätt.

Aktuella avsnitt: 13.1 (ej Theorem 3), 13.2 (ej Linear Programming), 13.3 (ej sid. 727).

Kapitel 14: Multipel integraler

Vi lämnar nu deriverandet och dess tillämpningar och kommer istället in på integration av funktioner av två eller flera variabler. Observera att precis som motiveringen för införandet att integralen i envariabelfallet är beräkning av arean under grafen till en funktion och över ett intervall så rör det sig nu om beräkning av volymen under en yta som beskrivs via grafen $z = f(x, y)$ till en funktion f och över ett område i (x, y) -planet. Det är viktigt att ni har denna bild (figuren 14.1 försöker illustrera det hela) klar för er, inte minst vid beräkning av integralen “by inspection” (jfr. sid 758 i boken med åtföljande problem). När det gäller den teoretiska konstruktionen så sker den helt analogt med det endimensionella fallet: man bildar indelningar och Riemannsummor (se Figure 14.3) etc. och får en definition av integrabilitet för begränsade funktioner. Utgående från denna kan man sedan dels bevisa att integralen uppfyller de regler man förväntar sig (uppräknade på sid. 758), dels att kontinuerliga funktioner och funktioner vars diskontinuitetspunkter bildar en “försumbar” mängd är integrabla.

Beräkandet av integraler sker sedan via integration av en variabel i taget, först i det enkla fallet med axelparallella rektanglar (Ex. 1, sid. 762), därefter på områden av D_x (“y-simple”) eller D_y (“x-simple”) typ, se ex. 2-4 på sid. 763-765. Användandet av symmetri-och paritets- (jämn eller udda) resonemang underlättar ofta arbetet avsevärt, studera noga Ex. 3 sid. 758 för detta. Den enda del av 14.3 som jag kommer att ta upp är den första som handlar om generaliserade integraler av en positiv funktion och jag gör det via ett par exempel som jag rekommenderar er att meditera över.

I avsnitt 14.4 kulminerar behandlingen av dubbelintegraler genom att vi tar upp variabelsubstitutioner. De absolut viktigaste fallen är byte till polära koordinater samt linjära byten. Det första fallet är behandlat i detalj i boken (sid.772-776) medan det linjära fallet är försummat där (jfr. dock ex. 7, sid. 779), men genomgången på föreläsning; se även Problem 3 nedan. Jag rekommenderar även studium av Example 8 (sid. 779).

I avsnitten 14.5 och 14.6 behandlas trippelintegraler och mycket av det som sker är helt analogt med vad vi redan mött hos dubbelintegraler; även här kan man komma långt genom att bara sitta och titta på integralen (“inspection”), jämför Example 1, sid. 782. I allmänhet blir dock den geometriska analysen av det område som integreras över litet komplicerad eftersom det ligger i tre dimensioner. För att få kläm på hur analysen av dessa områden kan se ut rekommenderar jag studium av Example 2, 3 och 4 (sid. 782-785) samt de exempel som gicks igenom på föreläsningen. Den typ av komplikation som behandlas i Example 5 och 6 (sid. 785-786) kan

ni ta litet lätt på. De koordinatbyten som går igenom i 15.6 är viktiga, kanske särskilt de rymdpolära ("spherical", sid. 790), de dyker ofta upp i olika tillämpningar. De cylindriska (sid. 788) kan litet mindre högtidligt ses som att man genomför en itererad integration genom att först integrera över z och sedan använder polära koordinater i planet.

Aktuella avsnitt: 14.1, 14.2, 14.3 (ej sid. 769-770), 14.4, 14.5, 14.6.