Föreläsningar

Anders Johansson

2011-08-30 tis

Föreläsningsplanering

Föreläsn	Adams bok	Ämne
1	Kap. 10.1-5	Introduktion. Koordinatgeometri i rummet. Ytor och kurvor i rummet
2	Kap. 11.1,3	Vektorvärda funktioner av en variabel och rumskurvor.
3	Kap. 11.3,12.1	Funktioner av flera variabler: kontinuitet och gränsvärden.
4	Kap.$_1$2.2	Kontinuitet. Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.
5	Kap. 12.3-5,10.1	Topologi. Problem om kurvor och gränsvärden. Parametrisering efter b
6	Kap. 12.3-5	Deriverbarhet, Jacobianen, partiella derivator.
7-8	Kap. 12.4-7	Kedjeregeln, gradienten. Högre ordningens derivator. PDE.
9-10	Kap. 12.8-9	Implicita funktionssatsen, Taylorserier
11	Kap. 12	Problemdemonstration.
12-13	Kap. 13.1-3,5	Egenskaper hos kritiska punkter. Globala extremvärdesproblem. Extrem
14-15	Kap. 14.1-2,5	Multipelintegraler, itererade integraler.
16-17	Kap. 14.4,6	Variabelbyte, polära koordinater, cylindriska och sfäriska.
19-19	Kap. 14.7,15.1-2	Vektorfält, konservativa vektorfält.
21-22	Kap. 15.3-	Kurvintegraler. Ytor och ytintegraler.
25-27	Kap. 16	Vektoranalys: divergens och rotation, Greens sats, Gauss sats och Stok

Introduktion och koordinatgeometri

Koordinatgeometri i rummet och planet

Introduktion

- Till vad använder vi analysen?
  Analysen och matematiken i helhet tillhandahåller verktyg, språk, för att kommunicera exakt och klart. Analys ger verktyg för att studera kontinuerliga och "deriverbara" fenomen.

– Hur beskriver tillståndet hos en kemisk reaktion i en reaktor?

– Ett flygplans position och orientering.

– En triangel inskriven i en cirkel?

Sålunda används n-/tupler/ $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ av reella tal att ge kvantitativa beskrivningar av fenomen. Fenomenet vi studerar svarar mot den delmängd $S \subset \mathbb{R}^n$ som motsvaras av ett tillstånd p hos fenomenet. ($\mathbb{R}^n$ är mängden av n-tupler.)

Hur beskrivs temperaturfördelningen på en värmeplatta?

Även oändligt-dimensionella tillståndsrum kan behandlas med elementär analys. (Funktionalanalysen behandlar sådana här funktionsrum men man behöver inte alltid dessa verktyg.)

Rummet $\mathbb{R}^n$

I planet $\mathbb{R}^2$ betecknas elementen ofta med (x, y), (u, v), etc. I det tredimensionella rummet 3D-rummet $\mathbb{R}^3$ används (x, y, z), (u, v, w) etc.

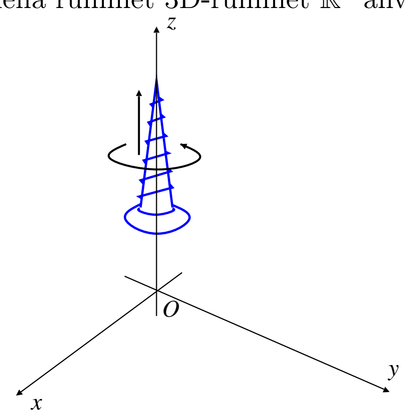

Figure 10-1-a

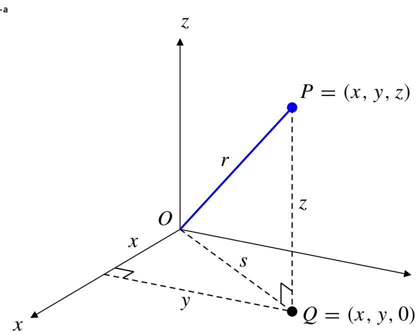

Figure 10-1-b

Vi använder oftast dessutom den Euklidiska strukturen på $\mathbb{R}^n$ som kan uttryckas med att punkter i rummet kan jämställas med *vektorer* och att vi har en *skalärprodukt* som gör koordinataxlarna ortogonala.

- Punkter och vektor sammanfaller
  Hur tänker vi oss förändring av position i rummet? Hastighet?

  Vi låter *vektorer* representera "ändring" av position eller förflyttning. *Vektorn* mellan punkten $P \in \mathbb{R}^n$ och $Q \in \mathbb{R}^n$, betecknas $\overrightarrow{PQ}$, är den entydiga "förflyttning" - *translation* - som tar punkten P på Q. En translation är en avbildning som avbildar $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

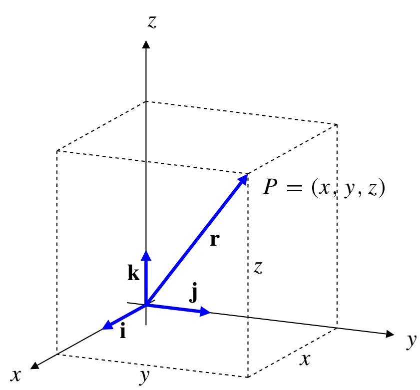

Figure 10-16

En punkt $P \in \mathbb{R}^n$ svarar entydigt mot ortsvektorn $\overrightarrow{OP}$ och vi kan därför identifiera punkter med ortsvektorer. Vi har

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ},$$

det är därför inget fel (i $\mathbb{R}^n$!) att jämställa vektorer med punkter. Dessutom är avståndet mellan två punkter P och Q given av längden på vektorn $\overrightarrow{PQ}$. I fortsättningen låter vi alltså n-tupeln $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ beteckna både vektorn och punkten (orts-vektorn).

Låt $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ vara enhetsvektorerna i koordinatriktningarna i 3D-rummet, så vektorn $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ kan skrivas som $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$. I boken används genomgående denna notation. I $\mathbb{R}^n$ kan vi skriva

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

- Skalärprodukt och vektorprodukt

  En viktig egenskap hos det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$ uttrycks i att vi utgår från den cartesiska skalärprodukten: Om $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ så är

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

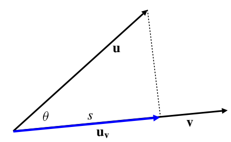

Figure 10-20

Vi vet att

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}$$

Och att

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$$

där θ anger den *vinkeln* mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Geometriskt uttrycker valet av denna skalärprodukt att koordinataxlaran är ortogonala, dvs vinkelräta, eftersom

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Vi tolkar alltid vektorer i matrisuttryck som kolonnvektorer, dvs,

$$(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

I matrisnotation kan skalärprodukten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$.

Implicit form (ekvationer) och explicit form (parametriseringar)

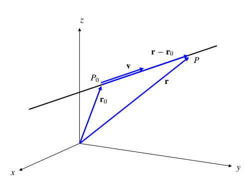

Figure 10-30

Vi beskriver delmängder av $\mathbb{R}^n$ med ekvationer och olikheter. (Relationer)

Ex 1. 1. Linje i planet

$$\ell = \{(x, y) : y = 3x + 1\}.$$

2. Cirkel

$$C : \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(enhetscirkeln)}.$$

3. Plan

$$P : \quad x + y + z = 1.$$

4. Snitt av två plan (linje i rummet)

$$L : \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$$

5. Cylinderkropp

$$K : x^2 + y^2 \leq a^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Eller med *parametriseringar*

Ex 2. 1. $\ell = \{(t, 3t + 1) : t \in \mathbb{R}\}$.

2. $C = \{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$. (Viktig skillnad mot linjens parametrisering: Endast lokal injektivitet.)

3. Linjär algebra ger att planet ges av en punkt plus en linjärkombination av riktningsvektorer i planet.

$$P : \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Observera att rikningsvektorerna är ortogonala mot planets normalvektor $(1, 1, 1)$.

4. För skärningen av planen behövs endast en riktningsvektor

$$L : \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Observera att denna är ortogonal mot båda planens normalvektorer.

5. K ges av parametriseringen

$$(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$$

med de tre parametrarna $0 \le r \le a$, $\theta, z \in \mathbb{R}$. (Man parmetriserar inte ofta kroppar. Varför?)

Att överföra från implicit ekvationsform till explicit parametriserad form är en viktig typ av problem.

Ex 3. Parametrisera den kurva som ges av skärningen

$$\begin{cases} z = x^2 & \text{cylinder } C \\ x + y = 2 & \text{plan } P \end{cases}$$

Lösning (Figur)

$$x = t, y = 2 - t, z = t^2.$$

Vilka egenskaper har de olika formerna av beskrivning? Med ekvationsformen kan vi snabbt avgöra om en punkt är medlem i mängden eller inte. Parameterformen sätter koordinater på mängden och är lämplig för att exempelvis beskriva en partikel som rör sig på mängden.

Variabelbyten

Som vanligt gäller att man ofta kan förenkla ett problem och beskrivning genom att införa nya koordinater eller variabler.

Ex 4. Ellipsoiden $(x-1)^2 + 4(y-3)^2 + 9z^3 = 7$ överförs på enhetssfären $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ genom att låta $u = (x-1)/\sqrt{7}$, $v = 2(y-3)/\sqrt{7}$ och $w = 3z/\sqrt{7}$.

Detta är *translation* med vektorn $-(1,3,0)$ (punkten $(1,3,0)$ som nytt origo) *sammansatt med* en *skalning* $(x,y,z) \to \frac{1}{\sqrt{7}}(1x, 2y, 3z)$.

Linjära och affina variabelbyten

Translation betyder ett variabelbyte av formen

$$(u, v, w) = (x - a, y - b, z - c) \iff (x, y, z) = (u, v, w) + (a, b, c).$$

Det kan uttryckas som att vi flyttar origo till punkten (a, b, c).

Skalning ändrar enheter på koordinataxlarna

$$(x', y', z') = (ax, by, cz) \iff (x, y, z) = (x'/a, y'/b, z'/c).$$

Linjära variabelbyten kan tolkas som att vi byter *bas* för vektorrummet $\mathbb{R}^n$.

Ex 5. *Sadelytan* (fig) $z = x^2 - y^2$ överförs på sadelytan $w = uv$ i uv-planet genom variabelbytet

$$u = x + y, \quad v = x - y, w = z.$$

Detta är ett linjärt variabelbyte; vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sammansättningen av en translation med en linjär avbildning sägs vara en *affin* avbildning: $\mathbf{u} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Polära koordinater

Ett viktigt variabelbyte i planet $\mathbb{R}^2$ är övergång till *polära koordinater.* Vi har

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

och omvänt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan(y/x) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Avbildningen $(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$ är inte *injektiv*, så inversen blir mångtydig. Enhetscirkelns ekvation i polära koordinater: $r = 1$. En *spiral*: $r = \theta$, $\theta \geq 0$.

Formellt är de variabelbyten vi arbetar med (deriverbara!) avbildningar

$$F : \mathbb{R}^n\mathbf{u} \to \mathbf{x}\mathbb{R}^n,$$

som — åtminstone lokalt — är surjektiva och *lokalt* bijektiv.

Ortonormala variabelbyten

En viktig egenskap hos linjära variabelbyten är att man ofta inte vill ändra vinklar eller avstånd. För vilka variabelbyten gäller detta?

Ex 6. Betrakta variabelbytet

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{x}$ är en vektor i xy-planet så är motsvarande vektor i uv-planet given av $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$. Observera att A är en ortogonalmatris vilket innebär att $A^T A = I$. Om $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är två vektorer i xy planet och $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ och $\mathbf{v} = A\mathbf{y}$ är motsvarande vektorer i uv-planet. Då gäller

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}.$$

Mer variabelbyten finns att hitta i 10.6. (sfäriska koordinater)

Koordinatgeometri i rummet. Andragradsytor.

De ytor i $\mathbb{R}^3$ som fås som lösningar till polynomekvationer av andra graden kallas *andragradsytor*.

Vi ger enkla standard-exempel. Alla ytor av samma slag kan erhållas ur standardytorna genom affina variabelbyten.

Den kanske enklaste klassen av ytor utgörs *ellipsoiderna*. Ekvationen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ger en ellipsoid med axlar längs koordinatriktningarna. (Allmänna ellipsoider fås genom ett linjärt variabelbyte.) (figur)

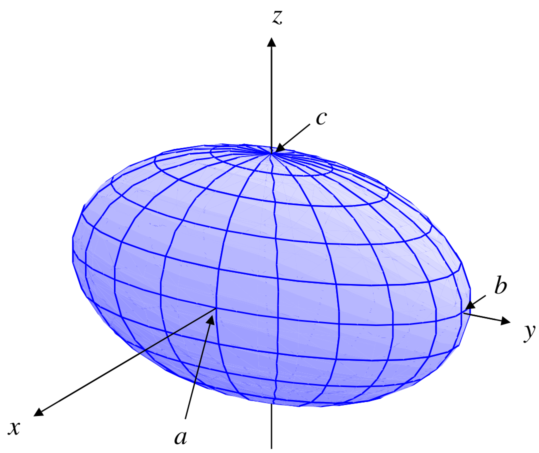

Figure 10-34-b

En *funktionsyta* är en yta vars ekvation kan skrivas på formen $z = f(x, y)$. Exempel är den (elliptiska) *paraboloiden*

$$z = x^2 + y^2$$

och *sadelytan* (den hyperboliska paraboloiden)

$$z = x^2 - y^2.$$

En funktionsyta har en naturlig *parametrisering*. Vilken?

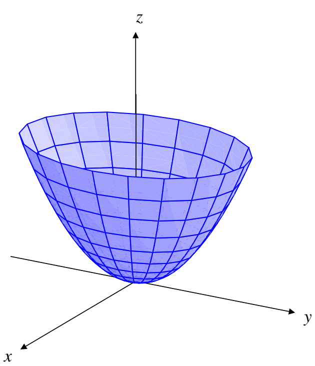

Figure 10-35-a

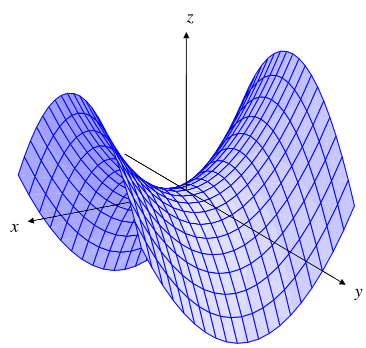

Figure 10-35-b

En *regelyta* (ruled surface) är en yta som är täckt av en familj av linjer. En *cylinderyta* uppstår när ytan täcks av *parallella* linjer. Cylindern *genereras* av den kurva den skär ut i ett plan ortogonalt mot linjerna.

Standard-exemplet på en cylinder är den *räta cirkulära cylindern* i z-riktningen (figur)

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Här är alla linjer parallella med z-axeln och skär xy-planet i enhetcirkeln. Ytor vars ekvationer saknar en variabel är räta cylindrar. (I koordinatriktningarna)

En *kon* är en regelyta som täcks av linjer som alla skär varandra i en fix punkt (kallad vertex). Konen genereras av de kurvor (plural) som skär alla linjer precis en gång. (figur)

Standard-exemplet på en kon är den *räta cirkulära konen* i z-riktningen (figur)

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Erhålls genom att rotera linjen $y = x$ omkring z-axeln.

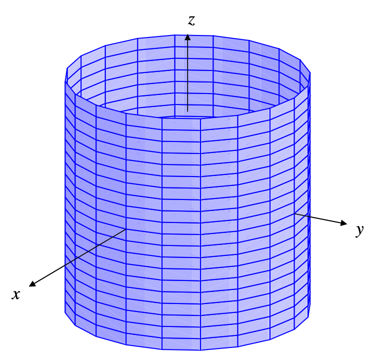

Figure 10-33-a

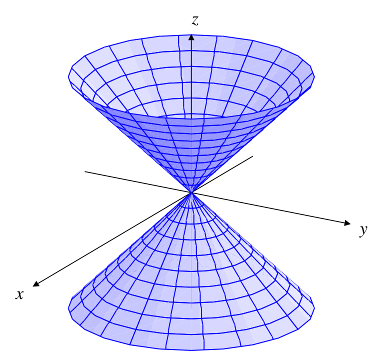

Figure 10-34-a

Den mest okända klassen av ytor är kanske *hyperboloiderna* som liknar koner som har blivit "avrundade" vid vertex. Standard exemplerna är den *en-mantlade* hyperboloiden

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

och den två-mantlade

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

Båda är rotationsytor av hyperblar i zy-planet.

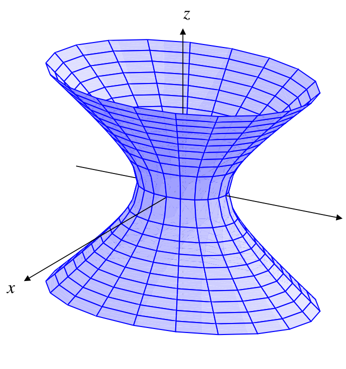

Figure 10-36-a

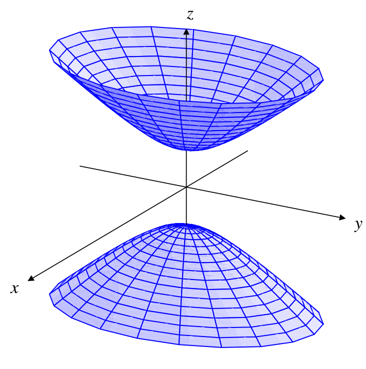

Figure 10-36-b

Reduktion till standardytorna

Hur hittar vi ett linjärt variabelbyte som överför en polynomekvation till standard-ekvationen? Den allmänna formen på ekvationen är alltså

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + axy + byz + cxz + dx + ey + fz = g. \qquad (*)$$

Ex 7. Givet

$$x^2 + 2xy + 2xz + y^2 - z^2 + 4x = 1.$$

Vilken typ av yta är detta?

Lösn. Kvadratkomplettera tills den homogena delen av andra ordningen är på formen $a_1u^2 + a_2v^2 + a_3w^2$, där u, v, w representerar ett linjärt variabelbyte. Vi kan kvadratkomplettera så att de linjära termerna förssvinner (motsvarar translation) om koefficienten framför motsvarande kvadrat-term inte är noll. Detta går alltid! (Försök finna en metod.)

Eller: använd teorin om kvadratiska former. Vi kan använda matriser för representationen

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \text{konst.},$$

där A är en *symmetrisk* 3×3-matris och $\mathbf{a} = (d, e, f)$. Metoden ger ett ortogonalt variabelbyte + skalning + translation som ger formen

$$A_1u^2 + A_2v^2 + A_3w^2 + a_1u + a_2u + a_3u = \text{konst.}$$

där A_i, a_j antar värdena ± 1 eller 0 och dessutom gäller $A_ia_i = 0$. $\square$

Parametriserade kurvor i rummet

Parametriserade kurvor i rummet

I kapitel 11 tar man upp kurvor i rummet och deras parametriseringar. En kontinuerlig funktion $\mathbf{r}(t)$ från ett intervall $t \in I = (a, b)$ till rummet $\mathbb{R}^n$ är en *vektor-värd funktion.* Under lämpliga förutsättningar är dess bildmängd $\mathbf{r}(I)$ en *kurva* C i rummet. Vi kan då säga att $\mathbf{r}(t)$ är en *parametrisering* av kurvan C. En parametrisering kan sägas åskådliggöra en partikels rörelse längs kurvan och viktiga kinematiska storheter som hastighet och acceleration tas upp. De deriveringsregler för vektor-värda funktioner som tas upp borde kännas naturliga. I avsnitt 11.3 koncentrar man sig på de geometriska egenskaper hos kurvan som är *oberoende av parametrisering.* Det viktigaste gäller *längden* av kurvor och hur dessa erhålls ur en integral för en given parametrisering.

Definition av parametriserad kurva i $\mathbb{R}^3$

Betrakta en kontinuerlig *vektor-värd funktion*

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$$

definierad på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ med ändpunkter a och b till $\mathbb{R}^n$. (Figur: Intervall+kurva.)

En sådan funktion kan ses som en n-tupel $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ av funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi tolkar värdet som en vektor (eller ortsvektor) och i $\mathbb{R}^3$ kan vi skriva

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

En naturlig tolkning är också

$$\mathbf{r}(t) = \text{en partikels position i } \mathbb{R}^n \text{ vid tiden } t$$

.

Vi kan ibland säga att funktionen $\mathbf{r}(t)$ är en *parametriserad kurva*, där *kurvan* syftar på bildmängden $C = \mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^n$. (Huruvida detta är en bra eller dålig parametrisering återkommer vi till.) Många egenskaper vi är intresserade av beror endast på kurvan C och inte på $\mathbf{r}(t)$, men $\mathbf{r}(t)$ kan vara ett stöd för räkningarna.

Ex 8. Beskriv bildmängden av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^4)$, $-1 \le t \le 1$, med ekvationer.

Lösn. Parametrisering säger att $x = t$, $y = t^2$ och $z = t^3$. Värdetabell + figur

t	$\mathbf{r}(t)$
1	(1,1,1)
0	(0,0,0)
-1	(-1,1,-1)
1/2	(1/2,1/4,1/8)

Vi ser också att kurvan satisfierar ekvationerna $y = x^2$ och $z = x^3$. Den utgör alltså skärningen mellan två *cylindrar*; en parallell med z-axeln och en parallell med y-axeln. (Figur)

(Allmänt: en cylinderyta är en yta som täcks med en familj av parallella linjer. Vi upptäcker cylindrar i koordinatriktningarna genom att en av variablerna saknas i ekvationen.) $\square$

Ex 9. Bestäm parametriseringen av skärningskurvan mellan ytorna $z = x^2 + 4y^2$ (paraboloid) och $2x + 8y + z = 4$ (plan).

Lösn. Vi ser först att vi kan eliminera z och få ekvationen (kvad. kompl.)

$$x^2+4y^2-2x-8y = -4 \iff (x-1)^2+4(y-1)^2-1-4 = -4 \iff (x-1)^2+4(y-1)^2 = 1.$$

Detta är en *ellips* i xy-planet med centrum i punkten $(1,1)$. Efter variabelbyte $u = x-1$ och $v = 2(y-1)$ får vi enhetscirkeln i uv-planet som vi vet parametriseras med $u = \cos t$ och $v = \sin t$, dvs

$$x = 1 + \cos t, \quad y = \frac{1}{2}\sin t + 1.$$

Insättes detta i ekvationen för planet erhåller vi

$$z = 4 - 2(1+\cos t) - 8(\frac{1}{2}\sin t + 1) = -2\cos t - 4\sin t - 6.$$

Svar:

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos t, \frac{1}{2}\sin t + 1, -2\cos t - 4\sin t - 6). \quad \square$$

$\square$

Definition av derivatan (hastigheten)

Def 1. *Derivatan* av en vektorfunktion $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ i en variabel definieras som

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &:= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}, \frac{y(t+h)-y(t)}{h}, \frac{z(t+h)-y(t)}{h}) \\ &= (x'(t), y'(t), z'(t)).\end{aligned}$$

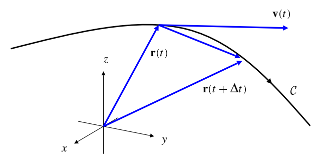

Figure 11-1

Figure 1: Derivatans definition.

Med andra ord deriverar vi helt enkelt vektorfunktionen $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *komponentvis* och $\mathbf{r}(t)$ är *deriverbar* om och endast om koordinatfunktionerna är det. (Detta kan vi göra så länge vi uttrycker vektorn $\mathbf{r}(t)$ i en *bas* som inte beror på t.) Vi ser att derivatan $\mathbf{r}'(t)$ är en *tangent* till kurvan och kan benämnas (tolkas som) *hastigheten* för $\mathbf{r}(t)$ vid tiden t. Tar man derivatan av $\mathbf{r}'(t)$ erhålls *accelerationen* $\mathbf{r}''(t)$.

Obs 1. Det finns ett överflöd av notation: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\dot{\mathbf{r}}$, etc. I boken används också beteckningen $\mathbf{v}(t)$ för hastigheten och $\mathbf{a}(t)$ för accelerationen.

Längden av hastighetsvektorn kallas *fart*

$$|\mathbf{r}'(t)| := \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Ex 10. Om $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^4)$, $-1 \leq t \leq 1$, så är

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 4t^3), \qquad \mathbf{r}''(t) = (0, 2, 12t^2).$$

Ex 11. En *funktionskurva* $y = f(x)$ i xy-planet ger upphov till den vektorvärda funktionen $\mathbf{r}(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$. Detta är den naturliga parametriseringen för en funktionskurva.

Derivata är $\mathbf{r}'(x) = (1, f'(x))$. (Vi kan låta x vara parametern.) Acceleration $\mathbf{r}''(x) = (0, f''(x))$ är alltså alltid nedåtriktad.

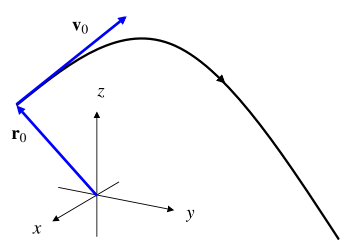

Figure 11-3

Produktregeln vid derivering av matrisprodukter

Låt $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^m$ vara *matrisvärda funktioner.* Om vi deriverar matrisuttrycket (komponentvis derivering)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{b}(t),$$

så erhålls

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}'(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{r}'(t) + \mathbf{b}'(t).$$

Beviset för detta är elementärt: det följer direkt ur deriveringsregler för produkter i envariabelfallet.

(Intressant när $x \to A(t)x + b(t)$ är ett tidberoende variabelbyte.)

Från detta erhåller man bland annat att derivering av *vektorprodukten och skalärprodukten* följer Leibniz regel, dvs

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t).$$

Ex 12. Låt

$$\mathbf{r}(t) = (4\sin\omega t, 3\sin\omega t, -5\cos\omega t).$$

Då gäller att (vinkelhastigheten ω) kan faktoriseras ut som inre derivata och vi får

$$\mathbf{r}'(t) = \omega(4\cos\omega t, 3\cos\omega t, 5\sin\omega t),$$

och

$$\mathbf{r}''(t) = \omega^2(-4\sin\omega t, -3\cos\omega t, 4\sin\omega t).$$

Notera att

$$\mathbf{r}'(t) \bullet \mathbf{r}(t) = \omega\sin(\omega t)\cos(\omega t)(16 + 9 - 25) = 0,$$

dvs $\mathbf{r}'(t) \perp \mathbf{r}(t)$. (Positionsvektorn är ortogonal mot hastighetsvektorn).

Detta betyder att tidsderivatan av positionsvektorns längd i kvadrat

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \bullet \mathbf{r}(t)) = 2\mathbf{r}'(t) \bullet \mathbf{r}(t) = 0.$$

Alltså är $|\mathbf{r}(t)|^2$ (= avståndet till origo) en konstant över tiden. Vi kan sluta oss till att $\mathbf{r}(t)$ befinner sig på en sfär med medelpunkt i origo. Ur den trigonometriska ettan följer också lätt att

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = 25\cos^2\omega t + 25\sin^2\omega t = 25,$$

så $\mathbf{r}$ ligger på en sfär med radie 5 och centrum i origo.

Dessutom gäller likheten

$$3x - 4y = 12\cos\omega t - 12\cos\omega t = 0.$$

så $\mathbf{r}(t)$ ligger i *skärningen* (snittet) av planet $3x - 4y = 0$ och sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Detta inses vara en cirkel med radie 5. Vi får också att

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}(t),$$

där Ω är en konstant vektor av längd ω och riktning i planets normalriktning. I $\mathbb{R}^3$ kan man alltid representera cirkulära rörelser med en sådan vektorvärd vinkelhastighet $\mathbf{\Omega}$.

Att

$$\mathbf{r}''(t) = -\omega^2\mathbf{r}$$

betyder att accelerationen är en centripetalacceleration.

Båglängd

Tillräckliga villkor för parametriseringar

Inte alla kontinuerliga vektorfunktioner $\mathbf{f}(t)$, $t \in I$, är bra parametriseringar av en given kurva $C \subset \mathbb{R}^3$. Bra betyder (åtminstone lokalt) injektiv. I praktiken kräver man

1. Att $\mathbf{f}'(t)$ existerar för alla $t \in I$ och är kontinuerlig, dvs $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ är *kontinuerligt deriverbar*.

2. Och att $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$, för alla $t \in I$.

Villkoren innebär att $\mathbf{r}(t)$ är lokalt injektiv och har en kontinuerligt varierande *tangentlinje* parallell med $\mathbf{r}'(t)$. Dvs, inga hörn.

I de punkter där detta inte gäller måste man göra specialstudier. Men man kan för många ändamål bortse från dessa singulära punkter om de är ändligt till antalet.

Ex 13. Kurvan $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ i $\mathbb{R}^2$ har derivata $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ och är singulär i punkten $t = 0$. I denna punkt är kurvan inte heller deriverbar i betydelsen att den inte har en väldefinierad tangentlinje.

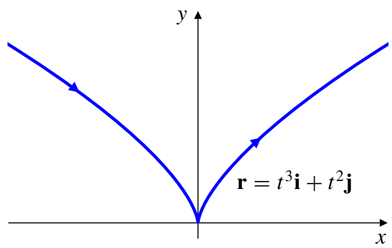

Figure 11-2

Figure 2: En kurva med en singulär punkt.

Ex 14. En parametrisering som inte är så lyckad är till exempel

$$x = t^2, \quad y = t^4, \quad -1 \le t \le 1. \tag{A}$$

Den parametriserar kurvan $y = x^2$, $0 \le x \le 1$. Vi ser att derivatan $\mathbf{v}(0) = (0,0)$ och för varje (x, x^2) nära 0 finns det två t så att $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) = (x, x^2)$ och att $|t_1 - t_2| \to 0$ då $x \to 0$.

Den är alltså inte lokalt injektiv i punkten $t = 0$. Dessutom går den över sig själv två gånger.

Definitionen av båglängd

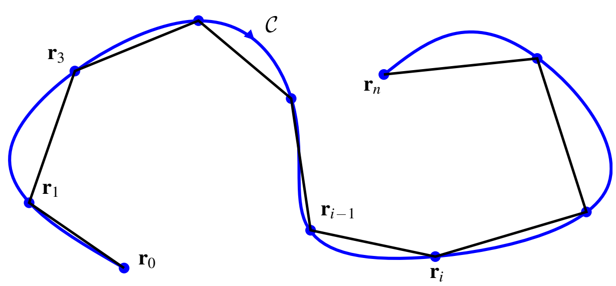

Figure 11-8

Vi vill definiera en längd $\ell(C)$ till varje kurva C. Betrakta kurvan C som ges av

$$\mathbf{r}(t), \quad a \le t \le b.$$

Vi antar att $\mathbf{r}(t)$ är *injektiv*, så att den inte skär sig själv.

Dela in intervallet $[a, b]$ i N delintervall $[t_i, t_{i+1}]$ genom att välja $N - 1$ inre punkter

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Låt C_N vara motsvarande *polygonkurva* (styckvist linjär) med hörn i punkterna $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Längden av polygonkurvan är

$$\ell(C_N) = \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| \tag{L}$$

och längden *ökar* om vi gör indelningen finare, dvs lägger till punkter i indelningen.

$\ell(C)$ som det minsta tal som är större än $\ell(C_N)$ för varje indelning $t_0, \ldots, t_N$. Eller

$$\ell(C) = \sup \{\ell(C_N) : C_N \text{ polygonapproximation}\}$$

där C_N genomlöper alla polygon-approximationer av C.

Om $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, är en *injektiv* parametrisering av C så gäller att varje indelning av intervallet $[a, b]$ ger en polygon-approximation C_N av längd

$$\ell(C_N) = \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}| = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i,$$

där

$$\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}.$$

Integralformen av längden

Låt C^1 betyda kontinuerligt deriverbar.

Thm 1. *Om $\mathbf{r}(t)$ är injektiv och C^1 och $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ så gäller att längden av kurvan ges av integralen*

$$\ell(C) = \sup \ell(C_N) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Notera att $\ell(C)$, per definition, är *oberoende av parametriseringen*, så vi kan ta vilken injektiv C^1-parametrisering som helst.

Notera tolkningen

$$\text{tillryggalagda sträckan} = \text{integralen av farten}.$$

Detta gäller också när $\mathbf{r}$ är C^1 förutom i ett ändligt antal punkter. (Varför?)

Ex 15. Om $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, $t \in [a, b]$, så gäller att

$$\ell(C) = (b - a)|\mathbf{v}|.$$

Vi kan tillåta att parametriseringen är icke injektiv i ett ändligt antal punkter; dvs kurvan skär sig själv i ett ändligt antal punkter. Samma sak gäller deriverbarhet och om $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ i ett antal punkter.

Man brukar införa *båglängdselementet* ds för att understryka att integralen är parametriseringsoberoende. För en given C^1-parametrisering $\mathbf{r}(t)$ har vi alltid

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Vi kan skriva integralen som $\ell(C) = \int_C ds$.

Ex 16. Om $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$, $x \in [a, b]$, är en funktionskurva i xy-planet så ges längden av

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Ex 17. Den cirkulära spiralkurvan ges av parametrisering

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

Beräkna längden av segmentet mellan $(a, 0, 0)$ och $(a, 0, b2\pi)$.

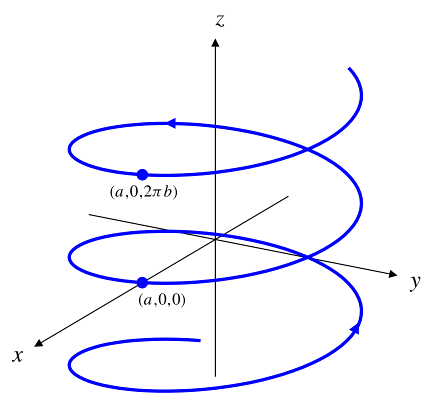

Figure 11-9

Lösn. Segmentet S ges av delintervallet $t \in [0, 2\pi]$. Vidare gäller att $\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ så $|\mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vi får

$$\ell(S) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\square$

Parametrisering efter båglängd

Ex 18. Skissera kurvan $\mathbf{r}(t) = e^{-t/6}(\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t < 1$, i planet. Bestäm längden $s(t)$ av den del av kurvan som ligger mellan $\mathbf{r}(0)$ och $\mathbf{r}(t)$. Finn båglängdsparametrisering av kurvan.

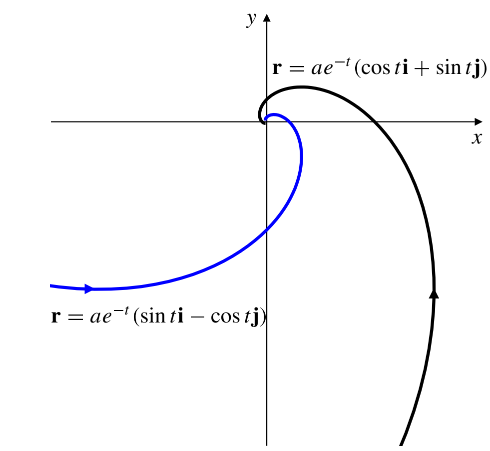

Figure 3: En annan logaritmisk spiral

Lösn. Spiral där avståndet till origo avtar exponentiellt. Figur. Öppen kurva där $t = 1$ ej är med.

Vi beräknar hastigheten

$$\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{6}e^{-t/6}(\cos(t), \sin(t)) + e^{-t/6}(-\sin(t), \cos(t)).$$

Farten $v(t)$ fås ur Pythagoras sats eftersom termerna ovan är ortogonala

$$v(t) = e^{-t/6}\sqrt{(1/6)^2 + 1} = e^{-t/6}\sqrt{37}/6.$$

Vi har sträckan som funktion av tiden ges av integralen

$$s(t) = \int_0^t v(s)ds = \sqrt{37}\int_0^t e^{-s/6}ds/6.$$

Vilket evaluerar till

$$s(t) = \sqrt{37}(1 - e^{-t/6}).$$

□

Parametrisering efter båglängd

Men vad är *parametriseringen efter båglängd* för något? För en C^1 vektorfunktion $\mathbf{r}(t)$, där $a \leq t \leq b$, gäller att den tillryggalagda sträckan (figur) som funktion av tiden ges av

$$s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}(s)| ds.$$

Denna är strikt växande om farten

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0.$$

Alltså injektiv med invers $t(s)$, som tar $[0, s(b)]$ på $[a, b]$. Figur.

Vektorfunktionen $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, där $0 \leq s \leq s(b)$, parametriserar kurvan med avseende på båglängd. Notera att $\dfrac{dt}{ds} = 1/\dfrac{ds}{dt} = 1/v(t)$, så

$$\mathbf{q}'(s) = \mathbf{r}(t)\frac{dt}{ds} \implies |\mathbf{q}'(s)| = |\mathbf{r}'(t)|/v(t) = 1.$$

Parametriseringen har *enhetsfart*.

Vi fortsätter uppgiften

Lösn. Vi löser ut t som funktion av s

$$s = \sqrt{37}(1 - e^{-t/6}) \iff e^{-t/6} = 1 - s/\sqrt{37}$$
$$\iff t = -6\log(1 - s/\sqrt{37}).$$

Notera att $e^{-t/6} = (1 - s/\sqrt{37})$ så vi får

$$\mathbf{q}(s) = (1 - s/\sqrt{37})(\cos(-6\log(1 - s/\sqrt{37})), \sin(-6\log(1 - s/\sqrt{37}))).$$

□

Blandade derivator

Slutligen ett exempel på en typ av uppgifter som kräver att vi kan använda kedjeregeln.

Ex 19. En punkt $\mathbf{r}(t)$ rör sig i xy-planet på kurvan $y = x^2$ med farten $|\mathbf{v}(t)| = 3$ i stigande x-värde. Bestäm dess hastighet och acceleration $\mathbf{a}(1)$ om $\mathbf{r}(1) = (\sqrt{2}, 2)$.

Lösn. Vi skriver $\mathbf{r}(t) = (x, x^2)$, där $x = x(t)$.

Vi får hastigheten

$$\mathbf{r}' = \frac{dx}{dt}(1, 2x).$$

och accelerationen

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2x}{dx^2}(1, 2x) + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (0, 2).$$

Samtidigt vet vi att $|r'| = 3$, vilket ger att vi kan beräkna

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4x^2}} > 0.$$

(Teckenfrågan avklaras med att $\dfrac{dx}{dt} > 0$ enligt förutsättningarna.) Dessutom gäller enligt kedjeregeln

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}\frac{dx}{dt},$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + 4x^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\sqrt{1 + 4x^2}}\right)$$

dvs, efter derivering,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3}{\sqrt{1 + 4x^2}} \cdot \left(\frac{-24x}{2(1 + 4x^2)^{3/2}}\right)$$

Evaluera med $t = 1$ och $x = \sqrt{2}$, vilket ger

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1} = 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=1} = 1 \cdot \frac{-4\sqrt{2}}{9} = \frac{-4\sqrt{2}}{9}.$$

Vi kan sätta in dessa värden i uttrycken för $\mathbf{r}'$ och $\mathbf{r}''$ och vi får

$$\mathbf{r}'(1) = 1 \cdot (1, 2x) = (1, 2\sqrt{2}).$$

$$\mathbf{r}''(1) = (\frac{-4\sqrt{2}}{9})(1, 2\sqrt{2}) + 1^2 \cdot (0, 2). = (\frac{-4\sqrt{2}}{9}, -14).$$

$\square$

Funktioner i flera reella variabler

Början på kapitel 12 handlar om att utvidga de grundläggande begreppen: gränsvärde, kontinuitet och speciellt derivata från fallet med funktioner i en variabel till flera variabler.

Det allmänna funktionsbegreppet

Def 2. Givet två mängder X och Y. En *funktion*[1] från X till Y är en regel som tilldelar varje punkt (element) $x \in X$ ett unikt funktionsvärde (element) $y \in Y$.

Mängden X utgör *definitionsmängd* ($D_f = X$) för f och Y dess *värdeförråd*[2]. *Bildmängden*[3] är den delmängd av Y

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

som utgörs av fs funktionsvärden.

Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Det allmänna funktionsbegreppet är väldigt tillämpbart i många sammanhang. Vårt intresse är främst inriktat på funktioner (figur) som har sin definitionsmängd i $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, och antar värden i $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Vi talar lite slarvigt om sådana funktioner som funktioner $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, även om definitionsmängden D_f bara är en delmängd av $\mathbb{R}^n$. Om $n > 1$ så har vi en funktion i *flera variabler*, vilket också förklara namnet på kursen.

Om värdeförrådet har dimension $m > 1$, så skriver vi funktionen i fetstil (eller med streck på tavlan), exemeplvis $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$. Vi kallar sådana funktioner *vektorvärda*. (Detta är litet oegentligt eftersom de ofta snarare är punktvärda; men punkter i $\mathbb{R}^m$ kan identifieras med vektorer som vi talat om tidigare. Funktioner med värden i $\mathbb{R}$ kallas reellvärda.)

Det flesta begrepp och definitioner (gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet, integralen, etc.), vi kommer att införa, *generaliserar* begrepp i envariabelsanalysen. Vissa begrepp låter sig dock inte generaliseras

Ex 20. Vi kan inte direkt tala om *monotona* reellvärda funktioner. Vi kan dock säga att en funktion är växande längs en viss typ av kurvor. ($\mathbb{R}$ är totalt ordnad.)

[1] FOOTNOTE DEFINITION NOT FOUND: fn:5
[2] FOOTNOTE DEFINITION NOT FOUND: fn:6
[3] FOOTNOTE DEFINITION NOT FOUND: fn:4

Exempel

Ex 21. Följande är exempel på funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

1. Om $n = m = 1$ så har vi en "vanlig" reellvärd funktion i en variabel från den tidigare analyskursen. Ex: $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$.

2. Om $n = 1$ och $m > 1$ så har vi en vektor-värd funktion i en variabel som i kapitel 11 i Adams. Exempelvis $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $n = 1$ och $m = 2$.

3. Om $n = 2$ och $m = 1$ så har vi en reellvärd funktion i två variabler. En typisk tillämpning är när $u(x, y)$ anger en temperaturfördelning för en yta som med koordinater givna av x och y.

4. För fallet $n = m > 1$ finns två viktiga tillämpningar; dels variabelbyten $(u, v) = \mathbf{f}(x, y)$ och dels *vektorfält* där funktionsvärdet $\mathbf{X}(\mathbf{p})$ tillordnar en vektor till punkten $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

   Exempelvis, tänker man sig vektorfältet

   $$\mathbf{X}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z),$$

   som ett fält där en enhetsvektor riktad "från origo" har tillordnats till varje punkt.

5. Om $n < m$ kan $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tänkas vara en parametrisering av en "hyperyta" i den högre dimensionen $\mathbb{R}^m$. Exempelvis

   $$f(t_1, t_2) = \mathbf{p} + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{p}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$$

   parametriserar ett plan i $\mathbb{R}^3$ genom punkten $\mathbf{p}$ om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende.

Injektiva funktioner

Def 3. En funktion $f : X \to Y$ är *injektiv* om varje $y \in f(X)$ i bildmängden ges av precis en punkt i $D_f = X$.

En funktion är *surjektiv* om bildmängden $f(X)$ är hela Y, dvs varje y-värde i värdeförrådet är ett funktionsvärde. En funktion är *bijektiv* om den både är surjektiv och injektiv.

Vi definierar *inversa bilden* av delmängder $C \subset Y$ av värdeförrådet

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

Ett annat sätt att uttrycka injektivitet är att "nivåkurvorna", som vi kan skriva $f^{-1}(\{c\})$, $c \in f(X)$, utgörs enstaka punkter i X.

Def 4. Om f är injektiv finns en *funktionsinvers* $f^{-1} : f(X) \to X$ så att sammansättningarna med f ger identitetsfunktioner

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Ex 22.

1. En funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är aldrig injektiv om $m < n$, såvida den inte är väldigt "konstig" (diskontinuerlig).
2. Funktionen $y = \sin x$ är inte injektiv medan funktionen $y = \sin x$, $[-\pi/2, \pi/2]$ är injektiv och har invers $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

Ex 23. Begreppet injektivitet är främst viktigt när vi talar om parametriseringar.

1. En kurva $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ i planet är injektiv om den inte skär sig själv.
2. Den naturliga parametriseringen av en funktionsyta $(x, y) \to (x, y, f(x, y))$ i $\mathbb{R}^3$ är injektiv. Vi har funktionsinversen $(x, y, f(x, y)) \to (x, y)$ från S_f till D_f.
3. En linjär funktion $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, representerad av en matris $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, är injektiv om kolonnerna är linjärt oberoende. (Rangen av matrisen är lika med m.)

Funktionsytor och nivåkurvor

Vi studerar nu reellvärda funktioner.

Funktionsgrafer

Ytan $S = S_f$ på formen

$$S : \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D_f$$

utgör *grafen* av funktionen[4] i $\mathbb{R}^3$. När vi presenterar funktionen på ekvationsform så kallas variabeln z för värdeförrådet $\mathbb{R}$ den beroende variabeln. Variablerna x och y sägs vara de oberoende.

[4] FOOTNOTE DEFINITION NOT FOUND: fn:1

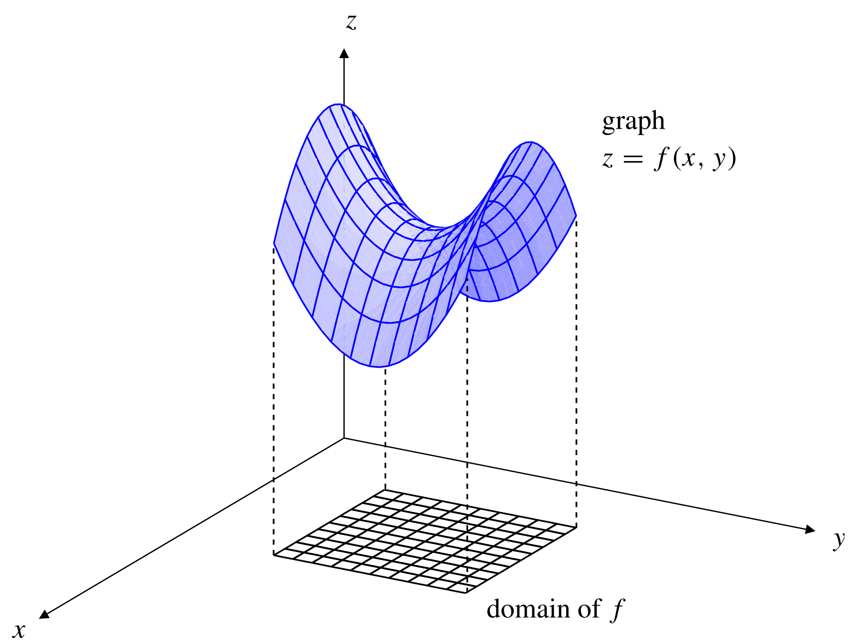

Figure 12-1

En funktionsgraf S_f har den naturliga parametriseringen

$$\mathbf{R}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \in S, \quad (x, y) \in D_f$$

som är *globalt injektiv* eftersom den ortogonala projektionen ned på xy-planet $S \to D_f$ given av

$$(x, y, f(x, y)) \to (x, y)$$

utgör funktionsinvers.

Nivåkurvor

Vi får för varje värde c i *bildmängden* av $f(x, y)$ en icke-tom *nivåkurva* $f^{-1}(\{c\})$ (nivåyta i högre dimensioner) som på ekvationsform ges av

$$f^{-1}(\{c\}): \quad f(x, y) = c, (x, y) \in D_f$$

dvs, nivåkurvan för c innehåller alla punkter (x, y) som delar samma värde $f(x, y) = c$. Nivåkurvorna skär inte varandra och täcker hela definitionsmängden.

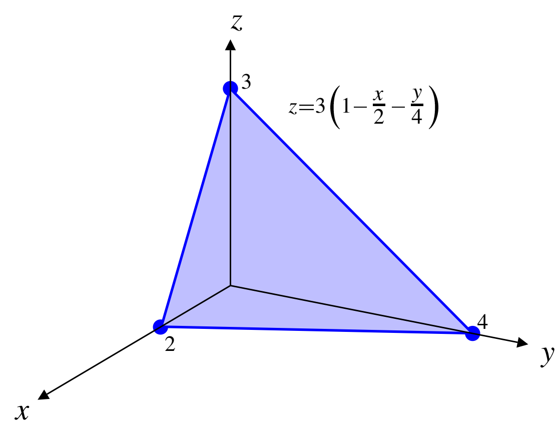

Figure 4: En funktionsyta med begränsad definitionsmängd

Om S beskriver ett "landskap" i 3-dimensioner där z anger höjd ö.h., så utgör en samling av nivåkurvor en "topografisk karta" av landskapet. Vi ser att L_c utgör ortogonala projektionen ned på xy-planet av skärningen mellan ytan S och det horisontella planet $z = c$.

Ex 24. Beskriv ytorna respektive nivåytorna för funktionerna ovan.

Frågor 1. 1. Kan nivåkurvor skära varandra? Svar: Nej.

2. Gäller det alltid att nivåkurvor som är linjestycken är parallella? Nej, motsvarande linjer kan "skära varandra" utanför definitionsmängden D_f. Betrakta $z = y/x$.

3. Hur ser man att en punkt är ett lokalt maximum utifrån nivåkurvorna? Som en bergstopp på en topografisk karta.

Gränsvärden, kontinuitet och topologi

Gränsvärdesdefinitionen

Gränsvärdesbegreppet fungerar väsentligen som tidigare; definitionen är densamma med ett justerat närhetsbegrepp. Funktionen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, har gränsvärde L i punkten $\mathbf{a}$ om följande gäller: Funktionsvärdet $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *går mot* $\mathbf{L}$ så snart $\mathbf{x}$ *går mot* $\mathbf{a}$. Vi skriver:

$$f(\mathbf{x}) \to L \text{ då } \mathbf{x} \to \mathbf{a},$$

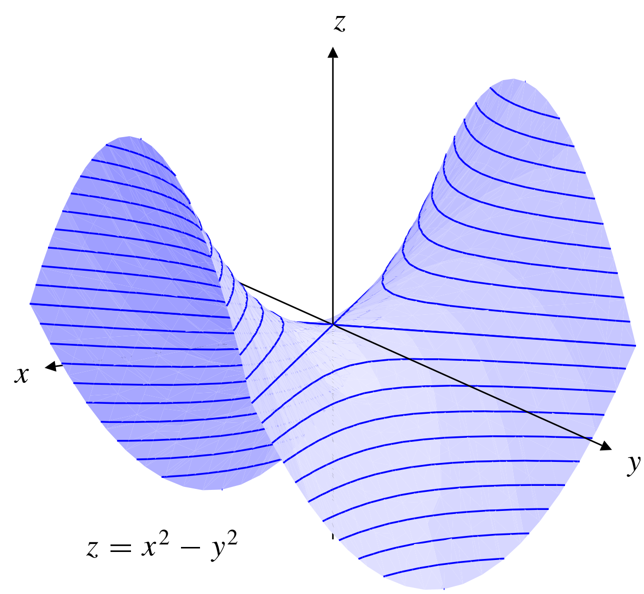

Figure 12-8-b

Figure 5: Sadelytan $z = x^2 - y^2$

eller

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L.$$

För vektorvärda funktioner $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ gäller att gränsvärdet ges av koordinaternas gränsvärden, dvs

$$\lim \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\lim f_1(\mathbf{x}), \ldots, \lim f_m(\mathbf{x})).$$

Vi kan alltså diskutera utifrån fallet att f är reellvärd.

Uttryckt i $\epsilon - \delta$-exercis har vi följande exakta definition.

Def 5. Gränsvärdet $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ existerar och är lika med L om följande gäller:

1. För varje $\delta > 0$ finns åtminstone ett $\mathbf{x} \in D_f$ så att $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$.
2. För alla $(\forall)$ $\epsilon > 0$ existerar ett $(\exists)$ $\delta > 0$ så att

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon \quad \text{om} 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta, \quad x \in D_f.$$

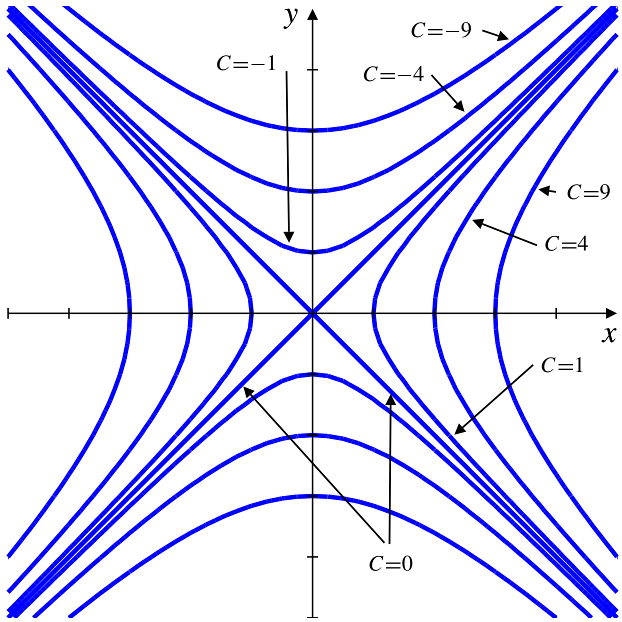

Figure 12-8-a

Figure 6: Sadelytan med nivåkurvor

Skillnaden mot envariabelfallat är att $\mathbf{x}$ kan närma sig $\mathbf{a}$ på många olika sätt; i en variabel finns väsentligen bara två möjligheter: från höger eller från vänster. I flervariabelfallet skall samma gränsvärde erhållas oberoende av längs vilken väg man närmar sig punkten $\mathbf{a}$.

Kontinuitet

Kontinuitet är ett fundamentalt, intuitivt och uråldrigt begrepp i analysen. I räkningar manifesterar sig kontinuiteten hos en funktion $\mathbf{f}$ genom att den "kommuterar med limes", dvs

$$\lim \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\lim \mathbf{x}),$$

förutsatt att högerledet är definierat, dvs $\mathbf{a} = \lim \mathbf{x} \in D_f$. Annorlunda uttryckt: Funktionsvärdena $f(\mathbf{x})$ närmar sig $f(\mathbf{a})$ när $\mathbf{x}$ närmar sig $\mathbf{a}$.

Den gränsövergång som lim syftar på kan i stort sett vara vad som helst.

Ex 25. Låt $f(u,v) = u^2 + v^2$ och $u_n = 1 + 1/n$ och $v_n = e^{-n}$. Då gäller ($\lim = \lim_{n\to\infty}$)

$$\lim f(u_n, v_n) = f(\lim u_n, \lim v_n) = f(1,0) = 1,$$

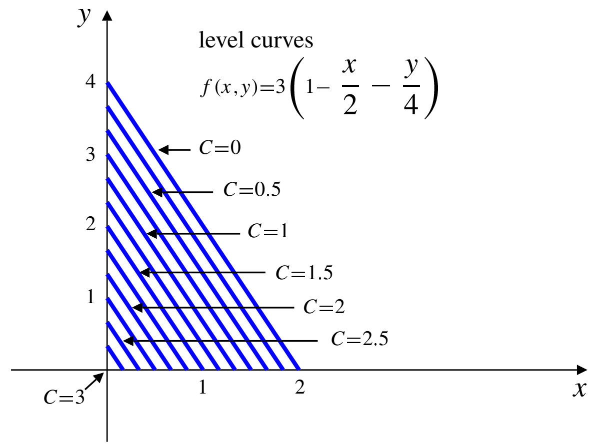

Figure 12-7-a

Figure 7: Nivåkurvor för en funktion med begränsad definitionsmängd

ty f är kontinuerlig.

Vi skriver ibland att $\mathbf{f} \in C$ eller $\mathbf{f} \in C(D_f)$ för att formulera att f är kontinuerlig. (Formellt är $C(S)$ mängden (klassen,...) av funktioner som är definierade och kontinuerliga på mängden $S \subset \mathbb{R}^n$.)

Räkneregler för gränsvärden och kontinuitet av elementära funktioner

Samma räkneregler gäller i flera variabler som i en variabel dvs. "gränsvärdet av en summa är summan av gränsvärdena" etc. Räknereglerna kan härledas ur kontinuitetsdefinitionen

$$\lim F(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = F(\lim \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

om $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och högerledet definierat.

Ex 26. Vi har (om inte annat lätt att visa direkt ur definitionen) att funktionen $Mul(x, y) = xy$, är kontinuerlig, så

$$\lim f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = \lim Mul(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = Mul(\lim f(\mathbf{x}), \lim g(\mathbf{x})) = \lim f(\mathbf{x}) \cdot \lim g(\mathbf{x}).$$

Notera dock att "HL är odefinierat" *inte* betyder att gränsvärdet inte existerar.

Ex 27. Gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1$$

men uttrycket

$$\frac{\lim \sin xy}{\lim xy} = 0/0$$

är odefinierat.

Med hjälp av dessa räkneregler fås att alla uttryck i elementära funktioner blir kontinuerliga.

Ex 28. Om $f(x,y) = \cos(e^{y^2}(x^3+y^2))$ så gäller att

$$\lim f(x,y) = \cos(\lim e^{y^2}(x^3+y^2)) = \cdots =$$

$$= \cos(e^{b^2}(a^3+b^2)) = f(a,b)$$

Där lim betyder $\lim_{(x,y)\to(a,b)}$.

Gränsvärden kan dock existera utanför definitionsmängderna, där exempelvis nämnare blir noll.

Punktföljder

Här är det kanske litet oklart vad som närmar sig vad?

Det kan därför vara bra att införa följder av punkter i $\mathbb{R}^n$. En (punkt-)/följd/ i $S \subset \mathbb{R}^n$ är en följd $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, av punkter $\mathbf{x}_k \in S$. En punktföljd $\{\mathbf{x}_k\}$ i S *går mot* (närmar sig) punkten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om avståndet $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| \to 0$ när $k \to \infty$. Vi skriver $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ i S. Gränsövergången $k \to \infty$ underförstås. När vi skriver "när/om $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ i S" skall detta översättas med "för *varje* följd $\{\mathbf{x}_k\}$ så att $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ i S".

Nu kan vi definiera utan ludd i kanten.

Def 6. Vi säger att $f(\mathbf{x})$ är *kontinuerlig* i punkten $\mathbf{a} \in D_f$ om $f(\mathbf{x}_k) \to f(\mathbf{a})$ när $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ i S.

En funktion f är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i alla punkter i D_f

Problem som kräver att man går tillbaka till gränsvärdesdefinitionen

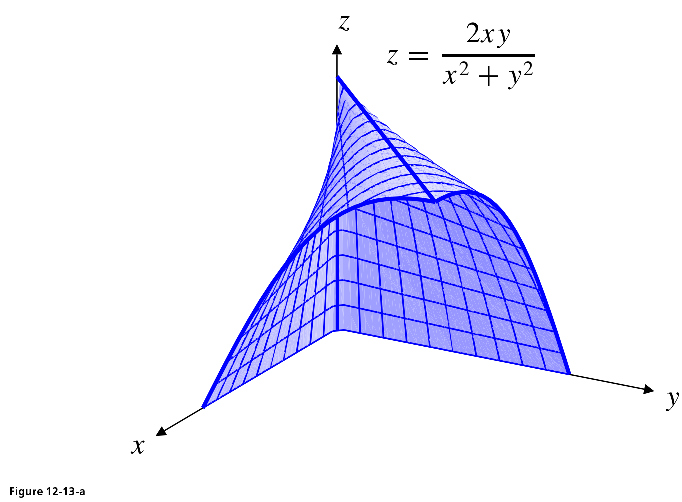

Figure 8: En funktion utan gränsvärde i $(0, 0)$

Ex 29. Låt
$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$
Visa att $f(x, y)$ saknar gränsvärde då $(x, y) \to (0, 0)$. Se figur 8.

Lösn. Vi använder polära koordinater. Notera att gränsvärdet existerar endast om $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to L$ då $r \to 0$ oberoende av θ. Men
$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\sin(2\theta)}{r^2} = \sin(2\theta).$$
Så gränsvärdet saknas. $\square$

Notera att *nivåkurvorna* för funktionen är räta linjer som skär varandra i punkten $(0, 0)$.

Ex 30. Låt
$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$
Visa att $f \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$. Se figur 9.

Lösn. Vi använder polära koordinater igen: Vi har
$$0 < |f(x, y) - 0| = \left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin(\theta)}{r^2}\right| < r.$$

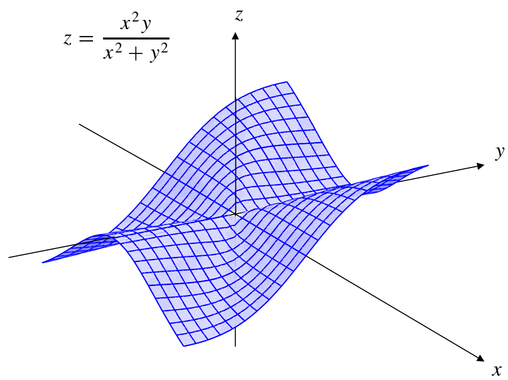

Figure 12-14

Figure 9: En funktion med gränsvärde i $(0,0)$

ty cos och sin är mindre än 1.

Eftersom $r \to 0$ när $(x,y) \to \mathbf{0}$ så erhålls gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ur instängningssatsen. $\square$

Slutna och öppna mängder

Följande definition generaliserar höger och vänstergränsvärden.

Def 7. Vi säger att $f(\mathbf{x}) \to L$ när $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ i S, om

$$f(\mathbf{x}_k) \to L \quad \text{när } \mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \text{ i } S,\ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}.$$

Vi antar också att minst en sådan följd existerar. Vad betyder detta rörande S och $\mathbf{a}$?

Vi kan använda punktföljder $\{\mathbf{x}_n\}$ för att definiera de topologiska begreppen: slutna och öppna mängder. Först litet mängdlära: *Komplementet* till $S \subset \mathbb{R}^n$, S^c, är de punkter i $\mathbb{R}^n$ som inte innehåller S. Vi kan också skriva $S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$ med mängd-differens.

Def 8. Det *slutna höljet* av en mängd S, $\overline{S}$, är de punkter som kan nås av konvergenta följder i S, dvs, $\mathbf{a} \in \overline{S}$ omm det finns en följd så att $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ i S. Ekvivalent är att varje omgivning

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

skär S, dvs $S \cap B_r(\mathbf{a}) \neq \emptyset$.

Randen av S, ∂S, ges av $\overline{S} \cap \overline{S^c}$ — de punkter som kan nås av följder både i S och i S^c. Det *inre* av S, S°, är de punkter som *ej* kan nås av följder från S^c, dvs $S^\circ = S \setminus \partial S$. Ekvivalent är $\mathbf{a} \in S^\circ$ om det finns en "skyddande" omgivning $B_r(\mathbf{a}) \subset S$, som försäkrar oss om att inga följderfrån S^c kan nå $\mathbf{a}$.

Def 9. Vi säger att S är *sluten* om $S = \overline{S}$ och att S är *öppen* om $S = S^\circ$. $\iff$ S är sluten om $\partial S \subset S$ och S är öppen om $\partial S \cap S = \emptyset$.

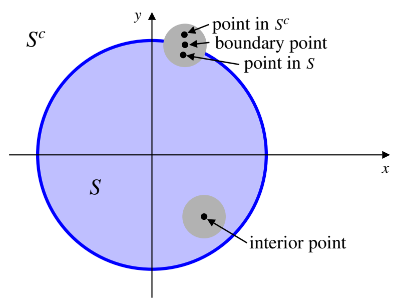

Figure 10-9

Slutenhet och öppenhet från relationspresentationen

För våra ändamål är följande observationer viktigast. Om mängder är beskrivna med olikheter eller ekvationer där båda led är *kontinuerliga uttryck* så gäller det att

mängder som ges av strikta olikheter är öppna,

medan

icke-strikta olikheter och ekvationer ger slutna mängder.

Ex 31.

Relation	Typ av mängd	
$x^2 - y^2 > 1$	Öppen mängd	ifylld hyperbel i planet
$x + y + z = 1$	Sluten mängd = randen	plan i rummet
$x^2 + y^2 + z^2 < 1$	Öppen mängd	Den öppna enhetsbollen
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$	Sluten mängd	Den slutna enhetsbollen
$\vdots$		

Gränsvärde när gränspunkten tillhör randen av $\mathbf{D}_f$.

Ex 32. Beräkna

$$\lim \frac{x^{3/2}y^2}{x^2 + y^4}$$

för gränsövergångarna $(x, y) \to (1, 1)$, $(x, y) \to (-1, 0)$ och $(x, y) \to (0, 0)$.

Lösn. Låt

$$f(x, y) = \frac{x^{3/2}y^2}{x^2 + y^4}.$$

Vi kan anta $x \geq 0$ och $y \neq 0$ när $x = 0$. (Domänkonventionen) Definitionsmängden är alltså $x \geq 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$. (Rita upp D_f.)

Gränsvärdet $(x, y) \to (-1, 0)$ är ogiltigt, gränspunkten tillhör inte slutna höljet av D_f. Kontinuitet i punkten $(1, 1)$ ger

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = f(1, 1) = 1/2.$$

(f är kontinuerlig på D_f.)

Återstår gränsvärdet när $(x, y) \to (0, 0)$. När $x = 0$ och $y^2 = 0$ gäller att uttrycket är lika med 0 om det är definierat. För $x > 0$ och $y^2 > 0$ gäller att

$$0 \leq |\frac{x^{3/2}y^2}{x^2 + y^4}| \leq \frac{x^{3/2}y^2}{2xy^2} = \sqrt{x}/2.$$

Olikheten gäller ty $x^2+y^4 \geq 2xy^2$ ($a^2+b^2 \geq 2ab$). Observera att instängningen

$$0 \leq f(x, y) \leq \sqrt{x}/2,$$

gäller för alla (x, y) där f är definierat, för $x = 0$ eller $y = 0$ är $0 = f(x, y) \leq \sqrt{x}/2$. Gränsvärdet

$$\lim f(x, y) = 0$$

följer ur "instängningssatsen". $\square$