

# Linjär algebra och geometri I för

X, geo, frist, lärare

## Kurslitteratur

H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra (Application version)*, 9:e upplagan, Wiley, 2005. Kapitel 1-4.

**Kurshemsida:** <http://www.math.uu.se/staff/pages/index.php?uname=ostensson>

Här finner du aktuell information om kursen, exempelvis utdelade papper i pdf-format.

## Undervisning

Undervisning sker i form av föreläsningar (17 st.) och lektioner (8 st.).

Föreläsningarna kommer främst att behandla den grundläggande teorin, medan lektionerna helt ägnas åt konkret problemlösning.

## Preliminär tidsplan

Föreläsning	Avsnitt	
1	1.1–1.2	Linjära ekvationssystem, Gausselimination
2	1.1–1.2	Mer om linjära ekvationssystem
3	1.3	Matriser, matrisräkning
4	1.4–1.7	Matrisinvers, speciella typer av matriser
5	2.1–2.2	Determinanter
6	2.3–2.4	Determinantregler
7		Räkneövning
8	3.1–3.2	Vektorer
9	3.3	Skalarprodukt
10	3.4	Vektorprodukt
11	3.5	Linjer och plan i rymden
12		Räkneövning
13	4.1	Det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$
14		Linjärt oberoende av vektorer, baser, koordinater
15	4.2	Linjära avbildningar från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$
16	4.3–4.4	Egenskaper hos linjära avbildningar, polynom
17		Räkneövning

## Examination

Under kursens gång kommer en dugga att äga rum. Duggan kommer att vara 2 timmar lång och bestå av fyra uppgifter. Uppgifterna rättas och poängsätts. För att klara duggan krävs det 12 av 20 möjliga poäng.

Sluttentamen består av 8 uppgifter om vardera 5 poäng. En student som har klarat duggan får den första uppgiften på tentan godkänd med 5 poäng och behöver inte lösa denna uppgift på tentan.

På tentan krävs 18 poäng för betyget 3, 25 poäng för betyget 4, 32 poäng för betyget 5. Den skriftliga sluttentamen äger rum måndagen den 8/3.

**Resultatet från duggan tillgodoräknas enbart vid detta tentamenstillfälle.**

## Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna lösa linjära ekvationssystem med Gausselimination och kunna redogöra för hur lösningen beror av koefficient- och totalmatrisernas ranger;
- kunna räkna med matriser, beräkna matrisinverser och determinanter;
- kunna redogöra för vektorbegreppet, känna till och kunna använda räknelagarna för vektorer, kunna avgöra om vektorer är linjärt oberoende, känna till begreppen bas och koordinat;
- kunna redogöra för begreppen skalärprodukt och vektorprodukt, samt kunna beräkna sådana produkter och tolka dem geometriskt;
- känna till linjens och planets ekvationer samt kunna använda dessa för att beräkna skärningar och avstånd;
- veta vad som menas med rotationer, speglingar och ortogonala projektioner i planet och i rymden, samt kunna beräkna matriserna för sådana avbildningar;
- kunna tolka en  $m \times n$ - matris som en linjär avbildning från  $\mathbb{R}^n$  till  $\mathbb{R}^m$ ;
- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa matematiska problem.

## Tips

- Bearbeta varje föreläsning, helst samma dag men senast till nästa föreläsning, genom att läsa föreläsningssanteckningar och motsvarande avsnitt i kursboken. Anteckna det som är oklart. Fråga vid nästa undervisningstillfälle.
- Diskutera uppgifter och teori med dina kurskamrater. Om något är oklart under en föreläsning eller en lektion, fråga direkt.
- Inför lektionerna, förbered dig genom att räkna så många som du hinner av de uppgifter som finns föreslagna på lektionsplaneringen nedan. På själva lektionen kan du då be om hjälp med sådana uppgifter som du har fastnat på.
- Ta vara på den s.k. Mattesupporten. Den är schemalagd i sal 2145 måndagar - torsdagar kl. 17.00 - 19.00. Där finns amanuenser att fråga om man behöver hjälp.

Uppsala, den 13 januari 2010.

Jörgen Östensson

# Lektion 1

Till lektion 1 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 1.1, s. 6-8:**

**Uppgifterna 1, 2, 3(b),(c), 4(c), 5(c), 6, 8, 12.**

**Avsnitt 1.2, s. 19-23:**

**Uppgifterna 3, 4(c),(d), 8, 9, 16(b), 17, 22.**

**Avsnitt 1.3, s. 34-38:**

**Uppgifterna 1(a)-(c), 4(e),(f), 5(a),(b),(d),(e), 13(b), 14(a).**

**Ytterligare ett par uppgifter:**

1. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} -ax + y + 2z = 3 \\ 2x + (a+2)y + z = 2 \\ (1-a)x + y + z = 2 \end{cases}$$

för alla värden på konstanten  $a$ .

2. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y + bz = 1 \\ bx + y + z = 1+b \\ bx + 2by + b^2z = 1+b-b^2 \\ 2bx + (1+2b)y + 2z = b \end{cases}$$

för alla värden på konstanten  $b$ .

**Facit:**

- $a \neq \pm 1$ :  $(x, y, z) = (\frac{1}{1-a}, -\frac{1}{1-a}, \frac{2-a}{1-a})$ ,  
 $a = -1$ :  $(x, y, z) = (t, 1-3t, 1+t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  
 $a = 1$ : inga lösningar.
- $b \neq -1$ : inga lösningar,  
 $b = -1$ :  $(x, y, z) = (\frac{1}{3} + t, \frac{1}{3}, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

# Lektion 2

Till lektion 2 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 1.4, s. 48-51:**

**Uppgifterna 4(c), 7(d), 9(c), 14, 17, 21.**

**Avsnitt 1.5, s. 57-60:**

**Uppgifterna 7(b),(d), 8(e).**

**Avsnitt 1.6, s. 66-68:**

**Uppgifterna 8, 15, 17, 21, 25.**

**Avsnitt 1.7, s. 73-76:**

**Uppgifterna 11, 18.**

**Ytterligare en uppgift:**

1. För vilka värden på den reella konstanten  $a$  är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm  $A^{-1}$  för dessa värden på  $a$ .

**Facit:**  $A$  inverterbar  $\Leftrightarrow a \neq 0, \pm 1$ . Om  $a \neq 0, \pm 1$  är

$$A^{-1} = \frac{1}{a(1-a^2)} \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ a & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

## Lektion 3

Till lektion 3 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 2.4, s. 117-118:**

**Uppgifterna 6-9, 13.**

**Avsnitt 2.2, s. 101-103:**

**Uppgifterna 2, 9, 12, 13.**

**Avsnitt 2.3, s. 109-111:**

**Uppgifterna 4(a),(b), 7, 8, 10, 14, 15, 16.**

**Avsnitt 2.1, s. 94-96:**

**Uppgifterna 3(a),(b), 4, 9, 12, 18, 31.**

**Ytterligare några uppgifter:**

1. Beräkna följande determinant  $D$  av ordning  $n \geq 2$ :

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ b & b & b & \dots & b & x \end{vmatrix}.$$

Lös även ekvationen  $D = 0$  i de fall då  $a \geq 0, b \geq 0$ .

2. Beräkna följande determinant  $D$  av ordning  $n + 1$ :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Facit:**

1.  $D = x^{n-2}(x^2 - ab)$ ,  $D = 0$  har rötterna  $\pm\sqrt{ab}$  och 0 (om  $n \geq 3$ ).
2.  $D_{n+1} = (1 - a)^n$ .

## Lektion 4

Till lektion 4 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 3.1, s. 130-131:**

**Uppgifterna** 1(a)-(e), 2(d),(g)-(i), 3(e), 6(a),(b), 7, 8, 9, 11, 13.

**Avsnitt 3.2, s. 134-135:**

**Uppgifterna** 1(b),(e), 2(c), 4, 7, 9, 10.

**Avsnitt 3.3, s. 142-144:**

**Uppgifterna** 1-2(b),(c), 3, 4-6(b),(c), 8, 10, 12-15, 16(a),(b),(d), 17-21, 25, 26.

**Ytterligare en uppgift:**

1. Finn alla egenvärden och alla egenvektorer till matrisen

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Facit:**

1. (a) Egenvärden:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$  och  $\lambda_3 = 4$ . Egenvektorer:  $\vec{u} = t(-5, -2, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ , (med  $\lambda = -1$ ),  $\vec{v} = s(1, 0, 1)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , (med  $\lambda = 1$ ) och  $\vec{w} = q(-5, 3, 1)$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq 0$ , (med  $\lambda = 4$ ).

(b) Egenvärden:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  och  $\lambda_3 = 3$ . Egenvektorer:  $\vec{u} = t(-1, 0, 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ , (med  $\lambda = 1$ ) och  $\vec{v} = s(-1, -1, 1)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , (med  $\lambda = 3$ ).

(c) Egenvärden:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  och  $\lambda_3 = 3$ . Egenvektorer:  $\vec{u} = (s, 0, t) = s(1, 0, 0) + t(0, 0, 1)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $(s, t) \neq (0, 0)$ , (med  $\lambda = 1$ ) och  $\vec{v} = q(-1, -1, 1)$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $q \neq 0$ , (med  $\lambda = 3$ ).

## Lektion 5

Till lektion 5 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 3.4, s. 153-155:**

**Uppgifterna** 1(a)-(c), 2(b), 3(a), 4(a), 10(a), 11(a),(b), 13, 15-18, 19(a).

**Avsnitt 3.5, s. 162-165:**

**Uppgifterna** 2(a), 4(a), 5(a),(c), 6(a)-11(a), 17, 19(b), 22, 24, 32, 35, 39(a), 41(c).

## Lektion 6

Till lektion 6 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 4.1, s. 178-180:**

**Uppgifterna 3, 4, 6(a)-(c), 10, 14(e),(f), 15, 16, 17(d), 19-23, 26.**

Dessutom uppgifterna

**1, 3, 5, 8 från bladet "Blandade övningar i Linjär Algebra", s. 8-9 i detta häfte.**

## Lektion 7

Till lektion 7 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 4.2, s. 193-197:**

**Uppgifterna 1(b),(c),(d), 5, 6, 8(b), 12(a),(b), 13(b), 16, 18, 20.**

**Avsnitt 4.3, s. 206-209:**

**Uppgifterna 1, 2, 4, 6(a),(b), 7, 8(b),(c), 13, 14(b),(c), 15, 16.**

## Lektion 8

Till lektion 8 rekommenderas följande uppgifter:

**Avsnitt 4.3, s.206-209:**

**Uppgifterna 18, 20, 22, 23.**

**Avsnitt 4.4, s.217-219:**

**Uppgifterna 1-5, 8, 9.**

samt de uppgifter från denna lista som ni inte hann med tidigare.

## Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt  $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$ ,  $\vec{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$  vara vektorer i  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  är linjärt beroende eller oberoende.

(b) Avgör om vektorerna  $\vec{v} = (1, 3, -1, 4)$  och  $\vec{w} = (2, -1, 1, 2)$  tillhör det linjära höljet  $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ . Om vektorn  $\vec{v}$  resp.  $\vec{w}$  tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ .

2. För vilka värden av konstanten  $a \in \mathbb{R}$  tillhör vektorn  $\vec{v} = (1, a, 4, 1 - a)$  det linjära höljet av vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$  och  $\vec{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$  i  $\mathbb{R}^4$ ?

3. Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -2, 0)$  i  $\mathbb{R}^3$  är linjärt beroende eller oberoende. I fall de är linjärt beroende, finn bland  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .

4. Visa att vektorerna  $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$ ,  $\vec{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$  är linjärt beroende. Uttryck en av de som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av linjärt oberoende vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ .

5. Låt  $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$  vara två vektorer i  $\mathbb{R}^3$ . Finn en ekvation som komponenterna  $x_1, x_2, x_3$  måste uppfylla för att vektorn  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  skall tillhöra det linjära höljet  $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ . Tolka resultatet geometriskt. För vektorer  $\vec{v}$  som uppfyller ekvationen finn en framställning av  $\vec{v}$  som en linjärkombination av  $\vec{u}_1$  och  $\vec{u}_2$ .

6. (a) Avgör om vektorerna  $\vec{v}_1 = (1, 2)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, -1)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^2$ . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas  $\underline{\mathbf{v}}$  för vektorn  $\vec{F} = (1, 1)$  och för vektorn  $\vec{w} = (x_1, x_2)$ .

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn  $\vec{F} = (1, 1)$  i  $\mathbb{R}^2$  i komponenter parallella med vektorerna  $\vec{v}_1$  och  $\vec{v}_2$  (d.v.s. finn  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  sådana att  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  med  $\vec{F}_1 \parallel \vec{v}_1$  och  $\vec{F}_2 \parallel \vec{v}_2$ ).

7. (a) Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$ . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas  $\underline{\mathbf{u}}$  för vektorn  $\vec{F} = (1, 1, 1)$  och för vektorn  $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3)$ .

(b) Vektorerna  $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 2)$  spänner upp ett plan  $\pi$  genom origo i  $\mathbb{R}^3$ . Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn  $\vec{F} = (1, 1, 1)$  som summa av två komponenter  $\vec{F}_1$  och  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , där komponenten  $\vec{F}_1$  är parallell med vektorn  $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$  och komponenten  $\vec{F}_2$  är parallell med planet  $\pi$ .

8. Avgör om vektorerna  $\vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$ ,  $\vec{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^4$ . Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas  $\underline{\mathbf{u}}$  för vektorn  $\vec{F} = (1, 1, 2, 1)$  och för vektorn  $\vec{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

**Facit:**

1. (a) Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  är linjärt beroende.  
(b)  $\vec{v} \in \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ ,  $\vec{v} = (-\frac{2}{3})\vec{u}_1 + \frac{7}{3}\vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4$  (t.ex.),  
 $\vec{w} \notin \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ .
2.  $a = 2$ .
3. Vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  är linjärt beroende. Vidare är t.ex.  $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  och  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  är linjärt oberoende.
4. T.ex.  $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$ . Det gäller att  $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ .
5. Ekvationen är  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ . Geometrisk tolkning: vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  spänner upp ett plan  $\pi$  genom origo i  $\mathbb{R}^3$ . Planet  $\pi$  har ekvationen  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ . Vektorn  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  tillhör det linjära höljet  $\text{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  om  $\vec{v}$  ligger i (= är parallell med) detta plan. Om  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  med  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$  blir  $\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$  med  $c_1 = \frac{1}{2}x_2$ ,  $c_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2$ .
6. (a) Ja,  $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^2$ .  
 $\vec{F} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})_{\underline{\mathbf{v}}}$ .  
 $\vec{w} = (x_1, x_2) = (\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2)_{\underline{\mathbf{v}}}$ .  
(b)  $\vec{F}_1 = \frac{3}{5}\vec{v}_1 = \frac{3}{5}(1, 2)$  och  $\vec{F}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}(2, -1)$ .
7. (a) Ja,  $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$ .  
 $\vec{F} = (-2, 1, 1)_{\underline{\mathbf{u}}}$ .  
 $\vec{w} = (\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3)_{\underline{\mathbf{u}}}$ .  
(b)  $\vec{F}_1 = -2\vec{u}_1 = (-2, 2, -2)$  och  $\vec{F}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (3, -1, 3)$ .
8. Ja,  $\underline{\mathbf{u}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^4$ ,  
 $\vec{F} = (5, -1, -1, -1)_{\underline{\mathbf{u}}}$ ,  
 $\vec{w} = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4, -x_3 + x_4, x_1 - x_2 - x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)_{\underline{\mathbf{u}}}$ .