Lösningsskisser för blandade övningar

Blandade övningar i Linjär Algebra: linjärt oberoende, linjärt hölje, bas.

1. Låt $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -3, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, -2, 3, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (-1, 0, 2, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^4$. (a) Avgör om vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ är linjärt beroende eller oberoende. (b) Avgör om vektorerna $\mathbf{v} = (1, 3, -1, 4)$ och $\mathbf{w} = (2, -1, 1, 2)$ tillhör det linjära höljet $\operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$. Om vektorn $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{w}$ tillhör det linjära höljet, framställ den som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$.

Lösningsskiss. Låt

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt också $T = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vara totalmatrisen för ett allmänt högerled $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

(a) Vektorerna $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ är lin. ob. $\iff$ $\operatorname{rang}(A) = 4$. Vi ställer T på trappstegsform.

$$T \sim T' := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & b_1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 + b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\,b_1 - b_2 - 2\,b_3 + b_4 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att $\operatorname{rang} A = 3 < 4$ så (**Svar:**) vektorerna är linjärt beroende.

(b) Ur trappstegsformen T' ser vi att $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ tillhör $W := \operatorname{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ om och endast om

$$-3v_1 - v_2 - 2b_2 + v_4 = 0.$$

För $\mathbf{v} = (1, 2, -1, 4)$ gäller $-3 \cdot 1 - 3 - 2(-1) + 4 = 0$ så $\mathbf{v}$ tillhör W. För $\mathbf{w} = (2, -1, 1, 2)$ gäller att $-3 \cdot 2 - (-1) - 2 \cdot 1 + 2 = -5 \neq 0$ så $\mathbf{w}$ tillhör inte W.

För att uttrycka $\mathbf{v}$ som en linjärkombination löser vi systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Från trappstegsformen T' ser vi att x_3 är en fri variabel som vi kan sätta till 0. Vi får då systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

vilket löses lätt.

□

2. För vilka värden av konstanten $a \in \mathbb{R}$ tillhör vektorn $\mathbf{v} = (1, a, 4, 1 - a)$ det linjära höljet av vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -2, 1)$ och $\mathbf{u}_3 = (-1, 3, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$?

Lösningsskiss. Problemet är ekvivalent med bestämma de a för vilka systemet (på totalmatrisform)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & a \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 - a \end{bmatrix}$$

har en lösning. Systemet ovan är

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & a+1 \\ 0 & 0 & 14 & 13+4\,a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{bmatrix}.$$

så vi ser att $a = 2$ är villkoret för lösbarhet. $\square$

3. Avgör om vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -2, 0)$ i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende eller oberoende. I fall de är linjärt beroende, finn bland $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ en uppsättning vektorer som är linjärt oberoende och som spänner samma linjära hölje som $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

Lösningsskiss. Låt

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräknas determinanten av A erhålls $\det A = 4 \neq 0$ så A är inverterbar och $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är en bas för $\mathbb{R}^3$ och därmed linjärt oberoende. $\square$

4. Visa att vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (2, 1, 1, 3)$ är linjärt beroende. Uttryck en av de som en linjär kombination av de övriga. Finn bland dem en uppsättning av linjärt oberoende vektorer som har samma linjära hölje som vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$.

5. Låt $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. Finn en ekvation som komponenterna x_1, x_2, x_3 måste uppfylla för att vektorn $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ skall tillhöra det linjära höljet $\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Tolka resultatet geometriskt. För vektorer $\mathbf{v}$ som uppfyller ekvationen finn en framställning av $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

6. (a) Avgör om vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -1)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{\mathbf{v}}$ för vektorn $\mathbf{F} = (1, 1)$ och för vektorn $\mathbf{w} = (x_1, x_2)$.

(b) Använd resultaten i del (a) för att dela upp kraftvektorn $\mathbf{F} = (1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$ i komposanter parallella med vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ (d.v.s. finn $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ sådana att $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ med $\mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{F}_2 \parallel \mathbf{v}_2$).

7. (a) Avgör om vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 2)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^3$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{\mathbf{u}}$ för vektorn $\mathbf{F} = (1, 1, 1)$ och för vektorn $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3)$.

(b) Vektorerna $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 2)$ spänner upp ett plan π genom origo i $\mathbb{R}^3$. Använd resultaten i del (a) av uppgiften för att framställa kraftvektorn $\mathbf{F} = (1, 1, 1)$ som summa av två komposanter $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, där komposanten $\mathbf{F}_1$ är parallell med vektorn $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 1)$ och komposanten $\mathbf{F}_2$ är parallell med planet π.

8. Avgör om vektorerna $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (2, -1, 3, 3)$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Om så är fallet finn koordinaterna i denna bas $\underline{\mathbf{u}}$ för vektorn $\mathbf{F} = (1, 1, 2, 1)$ och för vektorn $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.