UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Anders Johansson

Prov i matematik
ES, Frist, KandMa
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2010–10–21

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.
Student som har klarat duggan (12p) den 23 september, får den första uppgiften på tentan godkänd med 5 poäng och behöver inte lösa denna uppgift på tentan. (Gäller enbart detta tentamenstillfälle.)

1. Bestäm för vilka a och b ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 3 \\ ay = b-3 \\ (b-3)\,z = 0 \end{cases}$$

har (a) entydig lösning, (b) oändligt många lösningar och (c) ingen lösning.

2. En triangel ABC i $\mathbb{R}^2$ har två av sina hörn i punkterna $A(1,0)$ och $B(0,1)$. Det tredje hörnet C ligger på linjen $\ell : x + y = 2$.

(a) Bestäm linjen ℓ's ekvation på parameterform.

(b) Bestäm alla punkter C på ℓ så att vinkeln $\angle ACB$ vid C blir rät?

3. Bestäm den punkt Q i planet $\Pi : x - 2y + 2z = 3$ för vilken avståndet till punkten $P(1,0,0)$ är minst.

4. Betrakta det linjära ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som ges av totalmatrisen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & b \\ 2 & 1 & 6 & 6 & -2+3\,b \\ -2 & 0 & -4 & -1 & -2\,b \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 3\,b-3 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm för vilka värden på den reella konstanten b som ekvationssystemet är lösbart.

(b) Lös systemet för dessa värden på b så att lösningsrummet beskrivs på parameterform

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_k\mathbf{v}_k,$$

där $\mathbf{v}_i$ är riktningsvektorer för lösningsrummet och $\mathbf{x}_0$ en fix lösning.

(c) Beräkna skalärprodukterna $\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{n}_j$, där $\mathbf{n}_j$, $j = 1, \ldots, 4$, är radvektorerna, $\mathbf{n}_1 = (1,0,2,1)$, $\ldots$, $\mathbf{n}_4 = (2,0,4,4)$ i koefficentmatrisen A.

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Lös matrisekvationen

$$XA = B.$$

(b) För en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gäller att

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm standardmatrisen $[T]$ för avbildningen T.

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm för vilka x matrisen AB^{-1} är definierad.

(b) För dessa x, lös ekvationen

$$\det(AB^{-1}) = 1.$$

7. Bestäm standardmatrisen för den geometriska operator $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som definieras genom att man först speglar i linjen $l : 2x - y = 0$ och därefter roterar $\pi/2$ radianer moturs.

8. (a) Ge villkor på kolonnvektorerna i A som beskriver alla matriser $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sådana att $A^T A = I$. Visa också påståendet.

(b) Visa att alla 2×2-matriser B sådana att

$$B^T B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \det B > 0$$

har formen

$$B = \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -3\sin\theta \\ 2\sin\theta & 3\cos\theta \end{bmatrix},$$

för något $\theta > 0$.

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2010–10–21

1. (a) $a \neq 0$ och $b \neq 3$ (b) $b = 3$ (c) $a = 0$ och $b \neq 3$.

2. (a) $\ell : (1, 1) + s(1, -1)$. (b) $C(1, 1)$.

3.

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} \dfrac{11}{9} \\ -4/9 \\ 4/9 \end{bmatrix}.$$

4. (a) $b = 3$. (b) $\mathbf{x} = (3, 1, 0, 0) + t(-2, -2, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. (c) Dessa är alla lika med noll enligt känd sats, ty riktningsvektorerna för lösningsrummet spänner upp nollrummet.

5. (a)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) $[T] = X$ där X är som ovan.

6. (a) Odefinierad om $x = 0$ och $x = 2$. (b) $x = 3/2$.

7. Matrisen för den sammansatta avbildningen är

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

8. (a) Kolonnvektorerna utgör en ortogonal mängd av enhetsvektorer.

Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2010–10–21

Lösning till problem 1. Låt A vara koefficientmatrisen för högerledet. Notera att A är på trappstegsform om $a \neq 0$. Vi ser att $\det A = a^2(b-3)$ så A är inverterbar $\iff$ $a \neq 0$ och $b \neq 3$ vilket är ekvivalent med att systemet har unik lösning. Om $a = 0$ så gäller att systemet saknar lösning om $b \neq 3$ eftersom andra raden har en nollrad i koefficientledet. Om $b = 3$ så har systemet en eller två (om $a = 0$) nollrader, varför systemet då har oändligt många lösningar.

Lösning till problem 2. (a) En riktningsvektor för linjen är $\mathbf{v} = (1, -1)$ eftersom $(1, -1)$ är $\perp$ normalvektorn $(1, 1)$. En punkt på linjen ges av $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ eftersom $1 + 1 = 2$. Parameterformen ges av

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{v} = (1, 1) + s(1, -1).$$

(b) Låt C vara en allmän punkt på linjen så att $\overrightarrow{OC} = \mathbf{x}(s)$. (Figur) Låt

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{CA} = (0, -1) - s(1, -1) \quad \text{och} \mathbf{v} = \overrightarrow{CB} = (-1, 0) - s(1, -1).$$

Om θ betecknar vinkeln vid C så är

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

så $\theta = \pi/2$ om och endast om

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \iff$$
$$(0, -1) \bullet (-1, 0) - (0, -1) \bullet s(1, -1) - s(1, -1) \bullet (-1, 0) + s^2(1, -1) \bullet (1, -1) = 0$$
$$s^2 \cdot 2 = 0 \iff s = 0.$$

Vi får att den enda lösningen ges av $s = 0$ vilket motsvarar $\boxed{C(1, 1)}$. (Detta framgår också tydligt ur figur.)

Lösning till problem 3. Rita figur. Normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$. En referenspunkt på planet är $A(3, 0, 0)$. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AP}$ och låt $\mathbf{w} = \operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{u}$ vara den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på normalriktningen. Projektionsformeln ger att

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{n}}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}}\right) \mathbf{n} = -\frac{2}{9}(1, -2, 2).$$

Vi ser ur figur att den sökta punkten Qs ortsvektor (koordinater) ges av

$$\overrightarrow{OP} - \mathbf{w} = (1, 0, 0) + \frac{2}{9}(1, -2, 2) = \boxed{\frac{1}{9}(11, -4, 4)}.$$

Lösning till problem 4. Radoperationer ger trappstegsformen

$$T \sim T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

Varvid det framgår att lösbarhet gäller om och endast om $\boxed{b = 3}$.

(b) Substituerar man in $b = 3$ i T' så erhålls totalmatrisen

$$T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bakåtsubstitution ger parameterlösningen $x_4 = 0$, $x_3 = t$, $x_2 = 1 - 2t$ och $x_1 = 3 - 2t$, dvs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Ovan har vi ett lösningsrum med en riktningsvektor $\mathbf{v} = (-2, -2, 1, 0)$. Denna är alltid ortogonal med radvektorerna så alla skalärprodukter blir noll om vi räknat rätt.

Lösning till problem 6. (a) Matrisen AB^{-1} är definierad $\iff$ B är inverterbar $\iff$ $\det B \neq 0$. Vi får efter kolonnoperationer och utveckling efter rad att

$$\det B = \begin{vmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 4/5 & -2/5 \end{vmatrix} = x^2 - 2x = x(x-2).$$

Så $\det B \neq 0 \iff \boxed{x \neq 0 \text{ och } x \neq 2.}$

(b) Eftersom A är triangulär så är determinanten produkten av diagonalen, dvs $\det A = x(1-x)$. Produktregeln ger att

$$\det(AB^{-1}) = \frac{\det A}{\det B} = \frac{x(1-x)}{x(x-2)} = \frac{1-x}{x-2}, \quad x \neq 0, 2.$$

Vi får

$$\det(AB^{-1}) = 1 \iff \frac{1-x}{x-2} = 1 \iff 1 - x = x - 2 \iff \boxed{\text{x=3/2}}.$$

Lösning till problem 7. Låt $S =$ "speglingen" och $R=$ "rotationen". Vi har

$$[S] = I - (2/\|\mathbf{n}\|^2)\,\mathbf{n}\mathbf{n}^T = I - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

där $\mathbf{n} = (2, -1)$ är normalvektor till l och $\|\mathbf{n}\|^2 = 5$. Rotation $\pi/2$ betyder att $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_1$ så

$$[R] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen för den sammansatta operationen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av produkten, dvs

$$[T] = [R][S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lösning till problem 8. (a) Låt $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$. Matrisen A^TA har element ij lika med $\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j$. Så A^TA är lika med identitetsmatrisen $I = (\delta_{ij})$ precis om

$$\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & j \neq i \end{cases},$$

vilket betyder att $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ är en ortogonal mängd av enhetsvektorer.

(b) Låt $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Samma resonemang som i (a) ger att vektorerna $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är ortogonala vektorer (Figur!) med längderna $\|\mathbf{b}_1\|^2 = \mathbf{b}_1 \bullet \mathbf{b}_1 = 4$ och $\|\mathbf{b}_2\|^2 = \mathbf{b}_2 \bullet \mathbf{b}_2 = 9$. Med andra ord finns det en vinkel θ så att

$$\mathbf{b}_1 = 2(\cos\theta, \sin\theta), \quad \text{och} \quad \mathbf{b}_2 = \pm 3\left(-\sin(\theta), \cos\theta\right).$$

Villkoret det $B > 0$, ger att

$$\mathbf{b}_2 = 3\left(-\sin(\theta), \cos\theta\right).$$