UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jörgen Östensson

Prov i matematik
X, geo, frist, lärare
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2010–03–08

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = c \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

(a) Bestäm för vilka värden på den reella konstanten c som ekvationssystemet är lösbart.

(b) Lös ekvationssystemet för dessa värden på c.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$(XA + B)^{-1} = C.$$

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 1 \\ 2 & 2 & x & x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Visa att linjen $l:\ (x, y, z) = (1, 3, 2) + t(1, 2, 2),\ t \in \mathbb{R}$, inte skär planet $\Pi:\ 4x + y - 3z = 5$. Bestäm också avståndet mellan l och Π.

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ 2x + ay + 5z = a + 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a.

Var god vänd!

6. Låt $A = (1, 0, -2)$, $B = (2, 2, -1)$ och $C = (4, c, -1)$. Vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ spänner upp en parallellogram. Bestäm konstanten c så att arean av denna parallellogram blir minimal. Bestäm även den minimala arean.

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\pi :\ 2x - y + 2z = 0$.

(a) Finn T:s standardmatris $[T]$.

(b) Bestäm bilden av $(1, 1, 1)$ under avbildningen T.

8. (a) Antag att vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ parvis ortogonala och av längd 1.
Visa att vektorerna $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ är linjärt oberoende.

(b) Visa att vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Bestäm även koordinaterna för vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ i denna bas.

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2010–03–08

1. (a) $c = -2$.

(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2,\ 1-3t,\ 1-5t,\ t),\ \ t \in \mathbb{R}$.

2.

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $x_{1,2} = 1,\ \ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

4. Avståndet är $\frac{4}{3}$.

5. $a \neq 1, 3:$ $\quad (x, y, z) = (\frac{a+1}{a-3},\ -\frac{a-4}{a-3},\ -\frac{1}{a-3})$,

$a = 3:$ $\quad$ inga lösningar,

$a = 1:$ $\quad (x, y, z) = (1-3t,\ 3t,\ t),\ \ t \in \mathbb{R}$.

(Det här svaret är litet fel!)

6. $c = 4$ och minsta arean är $\sqrt{12}$.

7. (a)

$$[T] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$.

8. (b) $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}_1 + 3\overrightarrow{u}_2 + 2\overrightarrow{u}_3$.

Lösningar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2010–03–08

Lösning till problem 1. Låt A beteckna koefficientmatrisen, $\mathbf{b}$ högerledet och $T = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ totalmatrisen. Vi har

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & c \\ 4 & -5 & 2 & -5 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Elementära radoperationer ger

$$T \sim T' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & c+1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & 4+3\,c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4+2\,c \end{bmatrix}.$$

Villkoret för lösbarhet är att $4 + 2c = 0$, dvs $\boxed{c = -2}$.
Vi substituerar in värdet $b = -2$ i T' och får systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(rad 1 = (rad 1 + 2rad 2)-rad 3)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bakåtsubstitution ger $x_4 = t$, $x_3 = 1 - 5t$, $x_2 = 1 + -3t$ och $x_1 = 2$. Dvs,
$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 1, 0) + t(0, -3, -5, 1).}$

Lösning till problem 2. Vi kan invertera båda led och får då

$$(XA + B)^{-1} = C \iff XA + B = C^{-1}$$

vilket ger — om A är inverterbar — att

$$XA = C^{-1} - B \iff X = (C^{-1} - B)\,A^{-1}.$$

Eftersom C är en diagonalmatris så får vi inversen

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vidare så ger inversionsalgoritmen att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

så slutledningen ovan är giltig. Matrismultiplikationen ger svaret

$$\left(C^{-1} - B\right) A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösning till problem 3.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & 1 \\ 2 & 2 & x & x \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & x-1 & 1 \\ 2-x & 2-x^2 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x^2 & 1-x & x \end{vmatrix} = 1(-1)^7 \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & x-1 \\ 2-x & 2-x^2 & 0 \\ 0 & 1-x^2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2-x & 2-x^2 & 0 \\ 0 & 1+x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2-x & 2-x^2 & 0 \\ -1 & 2+x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^2 \begin{vmatrix} -x & 2-x^2 \\ -1 & 2+x \end{vmatrix} = (1-x)^2 \left(4 - x^2 + 2 - x^2\right)$$

$$= 2(1-x)^2\,(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x).$$

Vi ser att determinanten är 0 precis då $\boxed{x = 1 \text{ eller } x = \pm\sqrt{3}}$.

Lösning till problem 4. Ingen punkt $(1,2,3) + s(1,2,2)$ på linjen ligger i Π ty

$$4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + s\,(4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -3 + s \cdot 0 \neq 5.$$

Eftersom linjen är parallell med planet räcker det att bestämma avståndet från en godtycklig punkt P på linjen och planet. Vi tar punkten $P(0,0,1)$ $(s = -1)$. Låt normalvektorn till planet ges av $\mathbf{n} = (4,1,-3)$. En punkt på planet ges av $A(0,5,0)$ (sätt $x = z = 0$ i planets ekvation.) Vi bildar vektorn $\mathbf{u} = \overrightarrow{AP} = (0,-5,1)$. Dess komposant $\mathbf{w}$ i normalriktningen ges av projektionsformlen (Rita figur!)

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}} \mathbf{n}$$

och dess längd anger avståndet mellan Π och punkten P

$$\|\mathbf{w}\| = \frac{|\mathbf{n} \bullet \mathbf{u}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \left|4 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1\right| = \boxed{8/\sqrt{26}}.$$

Lösning till problem 5. Radoperationer ger totalmatrisen

$$T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -a & 3 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2 + 4a - 3 & a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -a & 3 & 1-a \\ 0 & 0 & -(a-1)(a-3) & a-1 \end{bmatrix}$$

Om $\boxed{a \neq 0 \text{ och } a \neq 1, 3}$, så är determinanten för koefficientmatrisen $\neq 0$ och systemet har entydig lösning. V får då att $z = 1/(3-a)$ och att

$$-ay = -\frac{3}{3-a} + \frac{(1-a)(3-a)}{3-a} \iff y = -\frac{a-4}{a-3}$$

Slutligen, blir

$$x = 1 - \frac{4}{3-a} = \frac{a+1}{a-3}.$$

Så svaret blir då $\boxed{(x, y, z) = (\frac{a+1}{a-3}, \frac{a-4}{a-3}, -\frac{1}{a-3})}$.

När $\boxed{a = 0}$ är systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & +1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} . \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

vilket ger lösningarna $\boxed{(x, y, z) = (-1/3, 0, 1/3) + t(0, 1, 0)}$. Vi ser att villkoret för lösbarhet är att $a \neq 3$ så $\boxed{\text{lösning saknas}}$ om $\boxed{a = 3}$.

Vi har ∞ många lösningar då $\boxed{a = 1}$, givna av systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bakåtsubstitution ger, med $z = s$, att $\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-4, 3, 1).}$

Lösning till problem 6. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (3, c, 1)$. Arean av parallellogrammen ges av längden hos kryssprodukten

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & c & 1 \end{vmatrix} = (2-c, 2, c-6)$$

så arean ges av

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(2-c)^2 + 4 + (c-6)^2}.$$

Istället för att minimera arean minimerar vi arean i kvadrat som ges av

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (2-c)^2 + 4 + (c-6)^2 = 4 + c^2 - 4c + 4 + c^2 + 36 - 12c = 2\left(c^2 - 8c + 22\right) = 2(c-4)^2 + 12.$$

Genom kvadratkomplettering ser vi att arean i kvadrat (och därmed arean) har minimum i $\boxed{c = 4}$ och att arean där ges av $\boxed{\sqrt{12}}$.

Lösning till problem 7. En normalvektorn $\mathbf{n}$ till planet ges av koefficienterna i ekvationen

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har $\|\mathbf{n}\|^2 = 9$.
Låt

$$B = \mathbf{n}\mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Projektionen ned på normallinjen ges av

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}(\mathbf{n}^T\mathbf{u}) = \frac{1}{9}(\mathbf{n}\mathbf{n}^T)\mathbf{u} = \frac{1}{9}B\mathbf{u}$$

och speglingen av

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{2}{9}B\mathbf{u} = (I - \frac{2}{9}\mathbf{B})\mathbf{u}$$

Standardmatrisen för speglingen $\mathbf{u} \mapsto T(\mathbf{u})$ är alltså

$$[T] = I - \frac{2}{9}B = \begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & -8/9 \\ 4/9 & 7/9 & 4/9 \\ -8/9 & 4/9 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har

$$T(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & -8/9 \\ 4/9 & 7/9 & 4/9 \\ -8/9 & 4/9 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Lösning till problem 8. (a) Vi skall visa att om

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \tag{*}$$

så är $c_1 = c_2 = \cdots = 0$. Tar vi skalärprodukten av VL (*) med $\mathbf{u}_i$ erhålls

$$c_1\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{u}_i + c_2\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_i + \cdots + c_i\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_i + \cdots + c_k\mathbf{u}_k \bullet \mathbf{u}_i$$

vilket pga ortogonaliteten är

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_i\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_i + \cdots + c_k \cdot 0 = c_i.$$

Men eftersom skalärprodukten HL(*) med $\mathbf{u}_i$ är $\mathbf{0} \bullet \mathbf{u}_i = 0$ sluter vi oss till att $c_i = 0$. $\square$
(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Då är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ en bas omm A är inverterbar. Inversionsalgoritmen ger att A är inverterbar och

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}.$$

För att uttrycka $\mathbf{v} = (7,4,3)$ löser vi systemet $A\mathbf{y} = \mathbf{v} \iff \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{v}$, så

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Alltså,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3.$$