UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jörgen Östensson

Prov i matematik
X, geo, frist, lärare
LINJÄR ALGEBRA
och GEOMETRI I
2010–06–10

Skrivtid: 8.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Linjen l_1 ges som skärningen mellan planen $x+y+z=1$ och $2x-y+z=2$, och linjen l_2 som skärningen mellan planen $2x-y+3z=1$ och $3x+2z=3$.
Avgör om linjerna l_1 och l_2 skär varandra och bestäm i så fall deras skärningspunkt.

2. Bestäm de värden på den reella konstanten a för vilka matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är inverterbar. Beräkna även A^{-1} för dessa värden på a.

3. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Bestäm den punkt P i planet $2x+y-3z=7$ för vilken avståndet till origo är som kortast. Bestäm även avståndet från P till origo.

5. Lös ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 0 \\ 2x & + & ay & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & ay & + & 5z & = & -1 \end{array} \right.$$

för alla värden på den reella konstanten a.

Var god vänd!

6. Låt $l_1 :\ (x, y, z) = (1, 0, 5) + t(2, 1, 3),\ t \in \mathbb{R}$, och $l_2 :\ (x, y, z) = (0, 1, 1) + s(1, 0, 1),\ s \in \mathbb{R}$, vara två linjer i $\mathbb{R}^3$. Planet π är parallellt med de båda linjerna och har samma avstånd till dem. Bestäm planets ekvation.

7. Låt $\vec{v} = (a, b)$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$ med längd 1, och låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i linjen genom origo med riktningsvektor $\vec{v}$.

(a) Finn T:s standardmatris $[T]$.

(b) Beräkna kvadraten $[T]^2$ av T:s standardmatris $[T]$.

8. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

LYCKA TILL!

Svar till tentamen i LINJÄR ALGEBRA och GEOMETRI I 2010–06–10

1. Linjerna skär i punkten $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$.

2. A är inverterbar om och endast om $a \neq 1$. För $a \neq 1$ gäller att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a-1} & 1 & \frac{1}{a-1} \\ 1 & -a & 0 \\ \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{-1}{a-1} \end{pmatrix}.$$

3. $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 1$.

4. $P = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Avståndet är $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

5. $a \neq -1, 2:$ $(x, y, z) = \left(-\frac{a+2}{a+1}, \frac{2}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$,
$a = -1:$ inga lösningar,
$a = 2:$ $(x, y, z) = (-1 - t,\ 1 - t,\ t)$, $t \in \mathbb{R}$.

6. $\pi : x + y - z + 2 = 0$.

7. (a)

$$[T] = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix}.$$

(b) $[T]^2 = I$.

8. Egenvärdena är $\lambda = 5$ och $\lambda = 3$.
Vektorerna $\vec{u} = s(1, -1)$, $s \neq 0$, är egenvektorer svarande mot $\lambda = 5$.
Vektorerna $\vec{v} = t(3, -1)$, $t \neq 0$, är egenvektorer svarande mot $\lambda = 3$.