Lösningsskisser för tentamensförberedande uppgifter

Tentamensförberedande uppgift 1

1. Beteckna koefficientmatrisen i VL med A och HL med $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_4)$. Totalmatrisen $T = \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ är radekvivalent med en trappstegsmatris $T' = \begin{bmatrix} A' & \mathbf{b}' \end{bmatrix}$ där nollraderna i A' svarar mot rader i $\mathbf{b}'$ som är linjärkombinationer av (b_1, b_2, b_3, b_4). Systemet är lösbart om och endast om dessa uttryck är 0.

2. Skriv systemet som en totalmatris T. Reducera matrisen till reducerad trappstegsform. Varje gång du måste använda en multipel av en rad med en skalär som är ett rationellt uttryck $p(a)/q(a)$ i a, måste nämnaren vara skild från 0. Behandla då fallet $q(a) = 0$, separat genom att sätta in rötterna till $q(a) = 0$ som a i matrisen och lösa motsvarande system. (Mycket tid kan sparas genom att vara klurig – för det här systemet kan man börja med att subtrahera de två första raderna från den tredje.)

3. B är inverterbar $\iff \det B \neq 0$. Determinante $\det B$ beräknas exempelvis med utveckling efter kolonn 1.

   För att finna B^{-1}, för de värden på b där $\det B \neq 0$, kan man använda determinant-formeln för inversen, dvs,
$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} C^T$$
   där C är *kofaktor-matrisen.* En annan möjlighet är att använda inversionsalgoritmen, fast då får man göra symboliska beräkningar med uttryck i b, vilket kan vara krångligt.

4. Vi har
$$\begin{aligned}
(A + DXB)^{-1} = C &\iff A + DXB = C^{-1} && \text{(inversen entydig)} \\
&\iff DXB = C^{-1} - A \\
&\iff XB = D^{-1}(C^{-1} - A) && \text{(mult. VL o HL med } D^{-1} \text{ från vänster)} \\
&\iff X = D^{-1}(C^{-1} - A)B^{-1} && \text{(mult. VL o HL med } B^{-1} \text{ från höger)}
\end{aligned}$$
   Beräkna inverserna B^{-1}, C^{-1} med inversionsalgoritmen. Inversen till D erhålls genom att invertera diagonalelementen i diagonalmatrisen D. Beräkna slutligen produkten $D^{-1}(C^{-1} - A)B^{-1}$ som ger svaret.

5. Beräkna determinanten genom en kombination av rad- och kolonnoperationer följt av utveckling efter lämplig rad och kolonn. Resultatet blir ett polynom i x. Undvik i den mån det är möjligt att använda multipler av rader som har nämnare som uttryck i x. Är detta nödvändigt skall man

   För att lösa ekvationen skall man försöka få detta resultatet på faktoriserad form, dvs som en produkt
$$K \cdot (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k).$$
   Observera att denna faktorform uppstår naturligt när man utvecklar efter en rad eller kolonn med bara ett uttryck i x skilt från 0.

   För just denna matris är det lämpligt att börja med att subtrahera $x \cdot$ rad 2 till rad 1 vilket ger att problemet är ekvivalent med
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 - 2x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 2x & 1 \\ 2x & x - 1 & 2 & 3x \\ 2 & x + 1 & x + 3 & x - 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (4 - 2x^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2x & x - 1 & 3x \\ 2 & x + 1 & x - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Här kan man sedan reducera översta raden till $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ med kolonnoperationer och man får att

$$D = (4 - 2x^2) \cdot 1 \cdot \text{2:a grads polynom i } x.$$

Rötterna är alltså $x = \pm\sqrt{2}$ tillsammans med rötterna för andragradspolynomet, som lämpligen ställs på faktoriserad form med hjälp av kvadratkomplettering.

Observera att man bör *aldrig* multiplicera in faktorn $4 - 2x^2 = 2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$; detta gör det bara svårare att hitta rötterna. Observera också att man inte behöver vara rädd att multiplicera rader el. kolonner så länge den faktor man använder är nollskild, eftersom detta endast ändrar determinanten med samma faktor.

6. Samma allmänna lösningsmetod som i problemet ovan.

   Lämpligt att subtrahera $(1/2) \cdot$ rad 2 från rad 3 och vilket ger den nya rad $\begin{bmatrix}0 & -4 & -3 & 0\end{bmatrix}$. Med en kolonn-operation får man exempelvis raden $\begin{bmatrix}0 & -4 & 0 & 0\end{bmatrix}$ och man kan lämpligen utveckla efter denna rad.

Tentamensförberedande uppgift 2

1. Rita figur! Låt R beteckna det återstående hörnet. Figur ger att den parallellogram som vi söker spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$. Beräkna $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP}$.

   (a) Figur ger att $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \mathbf{v}$.

   (b) Vi söker en normalvektor $\mathbf{n} = (A, B, C)$ till planet som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Eftersom vi är i $\mathbb{R}^3$ är det lämpligt att ta en multipel av vektorprodukten, dvs $\mathbf{n} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Vi vet att planets ekvation nu kan skrivas

   $$\mathbf{n} \bullet (x, y, z) + D = 0.$$

   Eftersom vi vet att P tillhör planet så kan vi erhålla konstanten D som $D = -\mathbf{n} \bullet \overrightarrow{OP}$.

   (c) Den geometriska beskrivningen av vektorprodukten ger att arean är lika med längden av vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ som vi beräknade ovan, dvs arean $= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

   (d) Kalla vinkeln α. Figur ger att

   $$\|u\|\|v\| \cos\alpha = (-\mathbf{u}) \bullet (\mathbf{v}).$$

   Så

   $$\alpha = \arccos\left(\frac{(-\mathbf{u}) \bullet (\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right).$$

2. (a) Genom att lösa ekvationssystemet

   $$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

   erhålls parameterform för $\ell_2 : s\mathbf{v}_1 = s(-1, 1, 1)$ som lösning.

   (b) Låt $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 1)$ var de riktningsvektorer som erhålls för l_1 respektive l_2, ur parameterformerna. Vi får en normal till de parallella planen genom att sätta

   $$\mathbf{n} = (A, B, C) \parallel \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-2, -3, 1).$$

   (Vi kan ta vilken nollskild vektor som helst parallell med $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.)
   Ur parameterformerna får vi också en punkt $P_1(2, 2, 3) \in l_1$ och en punkt $P_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2$. Vi beräknar D_1 och D_2 genom att

   $$A2 + B2 + C3 + D_1 = 0, \qquad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0.$$

   vilket då ger ekvationerna för de två planen.

3. En allmän ortsvektor på l_1 ges av $\mathbf{x}_1(t) = (2,2,3)+t(2,-1,1)$ och på l_2 av $\mathbf{x}_2(s) = s(-1,1,1)$. För de punkter där linjen ℓ mellan $\mathbf{x}_1(t)$ och $\mathbf{x}_2(s)$ är vinkelrät mot både l_1 och l_2 gäller att

$$\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(s) = r\mathbf{n},$$

vilket ger ekvationssystemet

$$(2,2,3) + t(2,-1,1) - s(-1,1,1) = r(-2,-3,1)$$

$\iff$

$$\begin{array}{cccc} t & s & r & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\implies$ $t = -3/2$, $s = 2$ och $r = -1/2$. En punkt på linjen ℓ är alltså $x_2(2) = (-2,2,2)$ och riktningsvektor är $-\mathbf{n} = (2,3,-1)$. Parameterform ges av

$$\ell : (-2,2,2) + q(2,3,-1).$$

Avståndet ges av

$$\|\mathbf{x}_1(-3/2) - \mathbf{x}_2(2)\| = (1/2)\|\mathbf{n}\| = \sqrt{14}/2.$$

4. Rita figur. Bestäm en punkt A på planet, exempelvis $A(5,0,0)$. Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AP} = (2-5, 1-0, 3-0) = (-3,1,3)$. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (1,-2,-1)$. Vi delar upp $\mathbf{u} = \mathbf{x}+\mathbf{w}$, där $\mathbf{w} \parallel \mathbf{n}$ och $\mathbf{x} \perp \mathbf{n}$. Projektionsformeln ger att

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{n} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}}\mathbf{n} = -\frac{4}{3}\mathbf{n} = (-4/3, 8/3, 4/3)$$

Vi ser att den närmsta punkten Q på planet ges av

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \mathbf{w} = (2+4/3, 1-8/3, 3-4/3) = (10/3, -5/3, 5/3).$$

Avståndet från P till Q är

$$d(P,Q) = \|\mathbf{w}\| = (4/3)\|\mathbf{n}\| = (4/3)\cdot\sqrt{14}.$$

5. Rita figur. Observera att planet är lika med det i uppgift 4. Vi tar två punkter på linjen l, exempelvis $P_1(2,1,3)$ $(t=0)$ och $P_2(3,4,2)$, $(t=0)$. Projektionen av P_1 bestämdes som $Q_1(10/3,-5/3,5/3)$ i uppgift 4. Vi använder projektionsformeln på $\mathbf{v} = \overrightarrow{AP}_2$, $A = (5,0,0)$, och får att $(\mathbf{n} \bullet \mathbf{v})/(\mathbf{n} \bullet \mathbf{n}) = -2$ så

$$\overrightarrow{OQ}_2 = \overrightarrow{OP}_2 - (-2)\mathbf{n} = (5,0,0).$$

Projektionen av linjen innehåller alltså punkterna $Q_1(10/3,-5/3,5/3)$ och $Q_2(5,0,0)$. Så

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{Q_2Q_1} = (5/3,-5/3,5/3)$$

är en riktningsvektor för projektionen och vi får parameterformen

$$(5,0,0) + (5/3,-5/3,5/3)\cdot t.$$

6. Vi vet att vektorer parallella med rotationsaxeln inte ändras av F. Låt $\mathbf{u}_1 = (0,1,1)$ då är $F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$. Vidare så ligger $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1$ i planet $y+z=0$ ortogonalt mot rotationsaxeln och roteras därför $\pi/2$ radianer moturs sett från spetsen av $\mathbf{u}_1$. Man inser geometriskt att $F(\mathbf{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ och på samma sätt att $F(\mathbf{u}_3) = (1,0,0)$ där $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$.

Låt A beteckna matrisen $[F]$ för avbildningen F. Vi har alltså att

$$A\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F(\mathbf{u}_1) & F(\mathbf{u}_2) & F(\mathbf{u}_3)\end{bmatrix},$$

vilket ger matrisekvationen

$$A\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

Vilket har lösningen

$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

7. Låt $A = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_5\end{bmatrix}$. en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ om och endast om ekvationsystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har någon lösning. Reducera till trappstegsform totalmatrisen

$$T = \begin{bmatrix}A & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3 & -4 & -5 & 2 & b_1\\ -1 & 2 & 3 & 3 & -1 & b_2\\ 3 & -5 & -7 & -8 & 1 & b_3\\ 1 & -1 & -1 & -2 & 2 & b_4\end{bmatrix}$$

vilket ges av

$$T' = \begin{bmatrix}2 & -3 & -4 & -5 & 2 & b_1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2\,b_2 + b_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & b_3 - b_1 + b_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\,b_1 + b_2 - b_3 - 2\,b_4\end{bmatrix}$$

Ur T' framgår att vi har endast lösning om

$$3b_1 + b_2 - b_3 - 2b_4 = 0.$$

I (b) kan vi substituera in värdena $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 1, 2)$ i trappstegsmatrisen T' och bestämma värdena $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ med bakåtsubstitution. Vi sätter alla fria variabler till noll; i det här fallet $x_3 = x_4 = 0$. Detta ger lösningen $x_1 = 9$, $x_2 = 5$, och $x_5 = -1$. Vi erhåller att

$$\mathbf{w} = 9\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_5.$$