

Tentamensförberedande uppgift 1

1. (a) Vilka villkor måste talen b_1, b_2, b_3, b_4 uppfylla för att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = b_1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b_2 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 8x_4 + x_5 = b_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = b_4 \end{cases}$$

skall ha någon lösning?

- (b) Lös ekvationssystemet för $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 2, 1, 2)$.

2. Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + (a+1)y + z = a \\ ax + 2y + z = 1 \\ (a+1)x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

för alla värden på den reella konstanten a .

3. För vilka värden på den reella konstanten b är matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm B^{-1} för dessa värden på b .

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$(A + DXB)^{-1} = C.$$

5. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 4 & x \\ 1 & 2 & 2x & 1 \\ 2x & x-1 & 2 & 3x \\ 2 & x+1 & x+3 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x & 1 \\ 2x & 6x & 10 & 2 \\ x & 3x-4 & 2 & 1 \\ x & 3 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Facit

1. (a) Ekvationssystemet har någon lösning $\Leftrightarrow 3b_1 + b_2 - b_3 - 2b_4 = 0$.
(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (9 - s + t, 5 - 2s - t, s, t, -1)$, $s, t \in \mathbb{R}$.

2. Om $a \neq -2, 1$: $(x, y, z) = \left(-\frac{3}{a+2}, \frac{a-1}{a+2}, 2\right)$,
om $a = 1$: $(x, y, z) = (t, 0, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$,
om $a = -2$: inga lösningar.

3. B är inverterbar $\Leftrightarrow b \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Om $b \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$B^{-1} = \frac{1}{1 - 2b^2} \begin{pmatrix} 1 - b^2 & -b & b^2 \\ -b & 1 & -b \\ b^2 & -b & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

4.

$$X = \begin{pmatrix} -14 & 14 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $x_3 = 3$, $x_4 = -\frac{1}{4}$.

6. $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -5 \pm \sqrt{20}$.