UPPSALA UNIVERSITET

Författare:
Andreas Strömbergsson, astrombe@math.uu.se
Helen Avelin, helen@math.uu.se

Matematiska institutionen
Box 480
75106 Uppsala

Forskargruppen i analytisk talteori:

Helen Avelin, doktorand, helen@math.uu.se
Pierre Bäcklund, doktorand, pierre@math.uu.se
Dennis Hejhal, professor, hejhal@math.uu.se
Andreas Juhl, professor, andreasj@math.uu.se
Andreas Strömbergsson, forskarassistent, astrombe@math.uu.se
Anders Södergren, doktorand, sodergren@math.uu.se

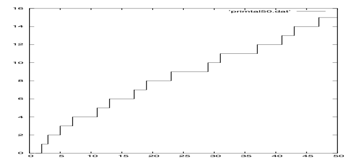
Analytisk talteori

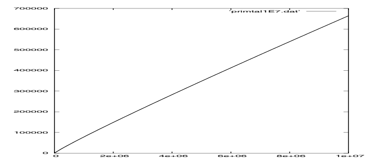
Analytisk talteori uppstod för att lösa frågor om grundläggande egenskaper hos heltalen, och särskilt om *primtalen* och deras fördelning. Forskningen har resulterat i en stor samling metoder och teoribyggen som har lett vidare till nya frågeställningar. Primtalen "bygger upp" heltal på ett lättbegripligt sätt; ändå bildar de en mycket oregelbunden och svårgripbar följd av tal.

> ETT **PRIMTAL** ÄR ETT HELTAL $p > 1$ SOM INTE ÄR DELBART MED NÅGRA ANDRA TAL ÄN 1 OCH *p*.

De första primtalen är: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,.....

Grafer över $\pi(x)$ = [antal primtal $\leq x$]:





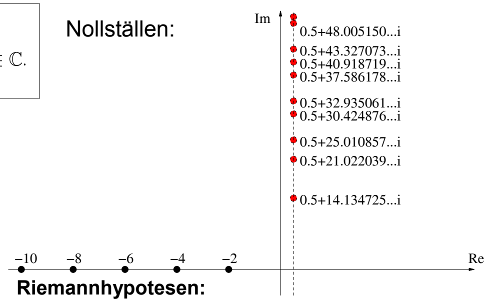
Det har visat sig att frågor om primtalens egenskaper och deras placering på talaxeln ofta är mycket svåra, och några av de mest kända och äldsta olösta problemen i hela matematiken är just frågor om primtal. Den mest kända är den så kallade *Riemannhypotesen* från 1859, som handlar om nollställena till *Riemanns zetafunktion*. Om Riemannhypotesen är sann så betyder det att primtalen fördelar sig maximalt slumpmässigt!

Riemanns zetafunktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primtal}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Bernhard Riemann (1826-1866)

Nollställen:



Riemannhypotesen:

Ligger alla nollställen utom -2,-4,-6,… på den streckade linjen??

Försöken att bevisa Riemannhypotesen har lett till att forskarna också blivit intresserade av zeta-funktionens kusiner: *L-funktionerna.* De är generaliseringar av Riemanns zetafunktion och har liknande egenskaper.

ETT "ZOO" AV L-FUNKTIONER:

$$L(s,f) = \prod_{p \text{ primtal}} \left(1 - \frac{\alpha_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \cdots \left(1 - \frac{\alpha_d(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

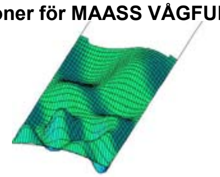
DIRICHLET L-funktioner

Fångar upp primtal i *aritmetiska följder!*
Exempel:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primtal}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$\chi(n)$	1	-1	-1	1	0	1	-1	-1	1	0	1	$\cdots$

L-funktioner för MAASS VÅGFUNKTIONER



L-funktioner för ELLIPTISKA KURVOR, GALOIS-REPRESENTATIONER, MODULÄRA FORMER, andra AUTOMORFA FORMER, ….

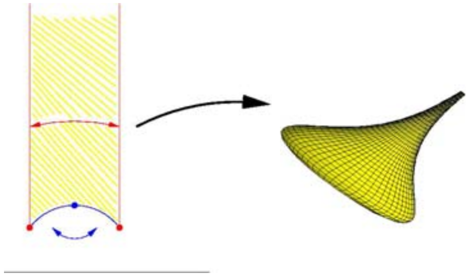
Uppsalas grupp i analytisk talteori bedriver forskning inom bland annat de matematiska områdena kvantkaos, automorfa former, spårformler, ergodteori, dynamiska system, dynamiska zetafunktioner, och numerisk beräkning av egenfunktioner och L-funktioner med hjälp av högpresterande datorer.

KVANTKAOS

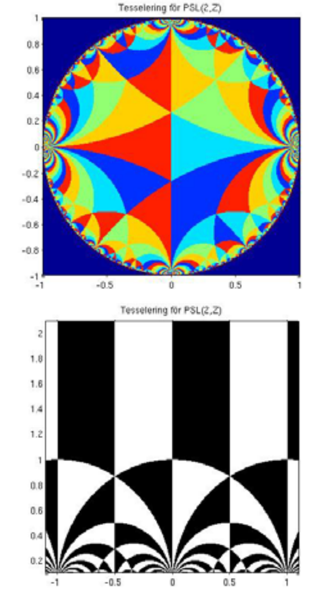
Klassisk mekanik	Kvantmekanik
Biljardboll	Elektron
Kaos	*Kvantkaos???*

För att räkna ut var en elektron som rör sig på en yta befinner sig löser vi vågekvationen: $\Delta\Phi=\lambda\Phi$. Samma ekvation beskriver vågorna på en vattenyta och vibrationerna på en trumma. Vi vill undersöka om vågfunktionen Φ har "kaotiska" egenskaper. Ytan som vår elektron rör sig på är en *hyperbolisk yta;* den är inte platt som en pannkaka utan den ser ut som en sadel.

Hyperbolisk yta



Tesseleringar av hyperboliska planet



På en sådan yta vet vi att en biljardbolls rörelse är kaotisk. En liten förändring i riktningen vi skickar iväg bollen i ger efter ett tag en helt annan bana. För elektronen är situationen annorlunda: vågfunktionen talar inte om var exakt vi har elektronen utan vi får bara veta sannolikheten att den finns på en viss plats. Vår forskning om kvantkaos handlar om att formulera och förstå motsvarigheterna till kaos i elektronens värld.

Vågfunktioner på hyperboliska ytor, $\Delta\Phi=\lambda\Phi$