

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Linköping den 20 november 2004

1. Två cirklar i planet, båda med radien R , skär varandra under rät vinkel. Hur stor area har det område som ligger inuti *båda* cirkelarna?

2. I ett land finns mynt av valörerna 1, 2, 3, 4 och 5. Nisse har valt ett par skor. När han ska betala berättar han för försäljaren att han har en påse med 100 mynt, men att han inte vet exakt hur många han har av varje valör.

– Vad bra, då har du jämna pengar, säger försäljaren.

Hur mycket kostade skorna, och hur kunde försäljaren vara säker på att Nisse hade jämna pengar?

3. Funktionen f uppfyller

$$f(x) + xf(1 - x) = x^2,$$

för alla reella x . Bestäm f .

4. Om $\tan v = 2v$ och $0 < v < \pi/2$, gäller det då att $\sin v < \frac{20}{21}$?

5. En kvadrat med sidan n , där $n \geq 2$, delas in i n^2 kvadratiska rutor med sidan 1. Man drar sedan $n - 1$ linjer så att varje liten rutas inre skärs (inte bara längs randen) av någon av linjerna.

a) Ge ett exempel som visar att detta låter sig göras för något n .

b) Visa att två av de $n - 1$ linjerna skär varandra inuti kvadraten.

6. Visa att varje konvex n -hörning med area 1 innehåller en fyrhörning med area större än eller lika med $\frac{1}{2}$.

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!