SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningsförslag till finaltävlingen den 20 november 2004

1. Låt A, C vara de två cirklarnas medelpunkter och B, D de två skärningspunkterna. Av förutsättningarna följer att tangenterna till de båda cirklarna i punkten B bildar rät vinkel. Detsamma gäller för tangenterna i punkten D. Men cirkelns radie bildar ju rät vinkel med tangenten i tangeringspunkten. Följaktligen är radien AB i den första cirkeln vinkelrät mot radien BC i den andra cirkeln. Detsamma gäller för radierna AD och DC. Då trianglarna ABC och ADC är likbenta, måste vinklarna vid A och C i fyrhörningen $ABCD$ vara lika. Fyrhörningen $ABCD$ är således en kvadrat med sidan R. Arean av det linsformade område som är gemensamt för de båda cirklarna får vi som den sammanlagda arean av cirkelsektorerna ABD och CBD minskad med arean av kvadraten $ABCD$, dvs är lika med $2 \cdot R^2 \cdot \frac{\pi}{4} - R^2 = R^2(\frac{\pi}{2} - 1)$.

Svar: Arean är $R^2(\frac{\pi}{2} - 1)$

2. Låt för enkelhets skull den aktuella valutan vara kronor. För att Nisse ska kunna betala med enbart 5-kronor, enbart 4-kronor osv, måste priset på skorna vara delbart med resp 5, 4, 3 och 2, dvs med $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Men en påse med enbart 1-kronor ska räcka för köpet, vilket betyder att skorna måste kosta 60 kr. Vi ska visa att Nisse kan betala med jämna pengar oavsett hur valörerna i påsen är fördelade inbördes.

Eftersom vi har fem möjliga valörer måste det enligt lådprincipen finnas minst $100/5 = 20$ mynt av någon valör. Med 20 5-kronor, 20 4-kronor eller 20 3-kronor i påsen kan uppenbarligen Nisse alltid räkna upp den begärda summan exakt.

Antag att Nisse har minst 20 1-kronor. Av dessa lägger han fyra stycken åt sidan. Av de 96 resterande mynten räcker han fram ett mynt i taget tills han för första gången erlägger 56 kr eller mer. Detta är alltid möjligt, eftersom värdet av de 96 mynten är minst 96 kr. För varje mynt ökar det erlagda beloppet med högst 5 kr, vilket betyder att det alltid är möjligt att åstadkomma något av beloppen 56, 57, 58, 59 eller 60 kr. Om Nisse inte har nått beloppet 60 kr direkt, kan han dock alltid fylla på till det önskade beloppet av de fyra undanlagda 1-kronorna.

Antag att Nisse har minst 20 2-kronor, vilket är det sista av de fem fall som vi behöver granska. Han börjar med att lägga fyra av 2-kronorna åt sidan och räknar sedan upp mynt valda bland de 96 övriga mynten tills han har nått något av beloppen 56, 57, 58, 59 eller 60 kr. Om beloppet är 56 eller 58 kan han av de undanlagda munten fylla på med 2-kronor tills han får summan 60. Om beloppet är 57 eller 59 måste det bland de framräckta mynten finnas något med udda valör. Om Nisse tar bort ett sådant mynt blir det så erlagda beloppet ett jämnt tal som är lika med 52, 54, 56 eller 58. Av de undanlagda 2-kronorna kan han sedan fylla på tills han har fått summan 60.

Därmed har vi visat att skorna kan betalas exakt i vart och ett av de fem fall som kan uppträda.

Svar: Priset är 60 myntenheter.

3. Vi börjar med att sätta in några enkla värden på x. För $x = 0$ får vi $f(0) = 0$. För $x = 1$ får vi

$$f(1) + f(0) = 1,$$

varav $f(1) = 1$. För $x = 2$ får vi

$$f(2) + 2f(-1) = 4,$$

där än så länge $f(2)$ och $f(-1)$ båda är okända. Men vi ser också att för $x = -1$ får vi

$$f(-1) + (-1)f(2) = 1,$$

dvs ytterligare en ekvation som innehåller $f(2)$ och $f(-1)$ och vi har följaktligen ett ekvationssystem ur vilket vi skulle kunna bestämma de båda värdena. Låt oss dock göra detta allmänt: vi ersätter x med $1 - x$ i ekvationen

$$f(x) + xf(1-x) = x^2, \tag{1}$$

och får

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = (1-x)^2.$$

För att kunna eliminera $f(1-x)$ multiplicerar vi den senare ekvationen med x:

$$xf(1-x) + x(1-x)f(x) = x(1-x)^2. \tag{2}$$

Subtraktion av ekvation (2) från ekvation (1) ger

$$(x^2 - x + 1)f(x) = -x^3 + 3x^2 - x,$$

varav

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - x + 1} = \frac{-x(x^2 - 3x + 1)}{x^2 - x + 1}. \tag{3}$$

Det förutsätter att $x^2 - x + 1 \neq 0$. Men detta uttryck kan skrivas som $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, vilket är $\geq \frac{3}{4}$ för alla x. Vid konstruktion av ekvationssystemet utförde vi multiplikation med x, varför vi får se upp med fallet $x = 0$. Formeln (3) ger emellertid precis som tidigare att $f(0) = 0$, vilket betyder att formeln är giltig för alla värden på x.

Svar: $f(x) = \frac{-x(x^2-3x+1)}{x^2-x+1}$ för alla x.

4. Funktionen $f(x) = \tan x - 2x$ har derivatan $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \tan^2 x - 1$, som är lika med 0 för $x = \frac{\pi}{4}$. Derivatan är < 0 för $0 < x < \frac{\pi}{4}$ och > 0 för $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, vilket betyder att $f(x)$ är avtagande i intervallet $0 < x < \frac{\pi}{4}$, antar ett lokalt minimum för $x = \frac{\pi}{4}$ och är sedan växande för $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Eftersom vidare $f(0) = 0$ och $f(x) \to \infty$, när $x \to \frac{\pi}{2}$, följer det att $f(x)$ har ett nollställe i intervallet $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Vi försöker ringa in detta nollställe genom att bestämma f för skilda värden på x. Först noterar vi att $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} < \sqrt{3} - 2 < 0$, dvs nollstället måste vara $> \frac{\pi}{3}$. Vi väljer ett något större värde och sätter $x = \frac{3\pi}{8}$. Enligt additionsformeln är

$$\sin\frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}).$$

Analogt är

$$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}).$$

Kvadraten på sinus-uttrycket är

$$\frac{1}{2}(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}(1 + \sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

medan kvadraten på cosinusuttrycket är

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Vi bildar kvoten och får

$$\tan^2\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2,$$

och det följer att

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1,$$

varav $f(\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{2} + 1 - \frac{3\pi}{4} > 1,4 + 1 - \frac{3\cdot 3,2}{4} = 0$. Eftersom $f(\frac{\pi}{3}) < 0$ och $f(\frac{3\pi}{8}) > 0$ följer att det sökta nollstället v uppfyller $\frac{\pi}{3} < v < \frac{3\pi}{8}$. Om vi nu kan visa att $\sin\frac{3\pi}{8} < \frac{20}{21}$ så gäller, eftersom $\sin x$ är växande i det aktuella intervallet, att också $\sin v < \frac{20}{21}$. Vi ser då att

$$\sin^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) < \frac{1}{2}(1 + \frac{3/2}{2}) = \frac{7}{8},$$

vilket är mindre än $(\frac{20}{21})^2$, eftersom $7\cdot 441 < 8\cdot 400$, dvs att $3087 < 3200$. Alltså är $\sin v < \frac{20}{21}$.

Svar: Ja, det gäller att $\sin v < \frac{20}{21}$.

5. a) Vi noterar att i fallet $n = 2$ räcker det inte med *en* linje för att täcka alla fyra rutorna. Däremot är det möjligt att täcka samtliga rutor med *två* linjer i fallet $n = 3$. Låt rutorna i rad 1 markeras med a, b, c från vänster till höger, rad 2 med d, e, f och rad 3 med g, h, i. Vi kan låta en linje täcka rutorna a, b, e, h, i och en annan täcka rutorna c, f, e, d, g.

b) Vår strategi går ut på att visa att om det inte förekommer skärningar krävs det n linjer för att varje ruta i en kvadrat med sidan n ska passeras av någon linje. För $n = 1$ och $n = 2$ är detta omedelbart sant. Vi ska strax visa att detta också gäller för $n = 3$. I det allmänna fallet placerar vi en kvadrat i ett rätvinkligt koordinatsystem med hörnen i punkterna $(0, 0)$, $(0, n)$, (n, n), $(n, 0)$ och drar diagonalerna i kvadraten. Varje linje kommer då att skära någon av diagonalerna med en vinkel som är större eller lika med $45°$. Vi kan därför utan inskränkning anta att någon av de $n-1$ linjerna, säg l, är en linje med negativ lutning. Antag att l skär diagonalen i en punkt (x, x), där $k < x < k+1$ (någon linje måste ju passera det inre av rutan med hörn i punkterna (k, k), $(k, k+1)$, $(k+1, k+1)$, $(k+1, k)$). Denna linje passerar inte genom någon ruta i kvadraten med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0, k)$, (k, k), $(k, 0)$, här kallad $A_{0,k}$, och inte heller genom någon ruta i kvadraten med hörn i punkterna (k+1,k+1), (k+1,n), (n,n), (n,k+1), här kallad $A_{k+1,n}$. Vi ska visa att under de givna förutsättningarna måste det finnas en linje som skär såväl kvadraten $A_{0,k}$ som kvadraten $A_{k+1,n}$. Det betyder i sin tur att den måste skära linjen l någonstans i kvadraten.

Betrakta fallet $n = 3$ och antag omvänt att det *inte* förekommer några skärande linjer inom kvadraten. Det finns då en linje l med negativ lutning som passerar det inre av mittrutan. Men det måste då finnas linjer på ömse sidor om l: en linje som passerar rutan $A_{0,1}$ och en linje som passerar rutan $A_{2,3}$. Det skulle alltså krävas tre linjer för att passera samtliga rutor i kvadraten. Enda möjligheten att klara av att täcka kvadraten med två linjer, vilket vi visade i a), vore att linjen genom $A_{0,1}$ också passerade $A_{2,3}$. Men en sådan linje måste nödvändigtvis skära linjen l, och vi har här fått en motsägelse. För att täcka alla rutor i fallet $n = 3$ krävs det alltså tre linjer om det inte förekommer någon skärning inom kvadraten.

Det allmänna fallet visas med induktion. Vi ska visa att det krävs n linjer för att samtliga rutor ska kunna passeras i en kvadrat med sidan n om skärningar saknas. Vi antar att påståendet är visat för alla kvadrater med sidan $1, 2, \ldots,$ $n-1$ och vi ska visa att det då också gäller för en kvadrat med sidan n. Vi använder den utstakade strategin och tillämpar samma teknik som i fallet $n = 3$. Om det inte förekommer några skärningar i kvadraten krävs det enligt antagandet k linjer för att passera samtliga rutor i kvadraten $A_{0,k}$ och $n-k-1$ linjer för att passera rutorna i $A_{k+1,n}$, dvs utöver linjen l skulle det krävas $n-1$ linjer för att täcka hela kvadraten. Enda möjlighet att klara av att täcka samtliga rutor med inalles $n-1$ linjer, vore att någon av de linjer som passerar $A_{0,k}$ också passerar $A_{k+1,n}$, men då denna i så fall måste skära l har vi här fått en motsägelse. Eftersom påståendet är visat vara sant för kvadrater upp till $n = 3$, följer enligt induktionsantagandet att det är sant för varje värde på n.

6. Vi noterar att påståendet är trivialt för $n = 3$ (av ett hörn kan vi kapa av en triangel, med godtyckligt liten area, så att en fyrhörning bildas); detsamma gäller för $n = 4$. Antag därför att $n \geq 5$. Låt PQ vara störst bland alla sid- och diagonallängder i månghörningen och dra linjer parallella med PQ genom alla hörn. Hela den givna månghörningen kommer då att ligga mellan två av dessa linjer. Dra sedan linjer, ortogonala mot PQ, genom alla hörn; återigen kommer hela den givna figuren att ligga mellan två av dessa linjer, nämligen de som passerar genom P och Q. Om något hörn funnes utanför dessa båda linjer skulle det finnas en sid- eller diagonallängd som översteg längden av PQ. Följaktligen finns det en rektangel, formad av nämnda par av linjer, som innehåller månghörningen. Punkterna P och Q jämte ytterligare minst en punkt kommer då att ligga på rektangeln.
Antag först att PQ är en diagonal i månghörningen. Det betyder att P och Q inte kan sammanfalla med något av rektangelhörnen, dvs månghörningen måste ha minst ett hörn på varje rektangelsida. (Om rektangeln har hörn i punkterna A, B, C, D låter vi P ligga på sidan AB och Q på sidan CD. Sträckan PQ är då parallell med sidorna AD och BC.) Vi låter P, M (på sidan BC), Q och N (på

sidan AD) vara fyra sådana hörn och bildar fyrhörningen $PMQN$ (eventuellt kan N sammanfalla med något av hörnen A eller D, medan M kan sammanfalla med något av hörnen B eller C). Eftersom månghörningen är konvex, kommer den att innehålla fyrhörningen.

Låt arean av rektangeln $ABCD$ vara T. Månghörningens area, som ju är lika med 1, är då $\leq T$. Eftersom arean av triangeln PNQ är lika med halva arean av rektangeln $APQD$ och arean av triangeln PMQ är lika med halva arean av rektangeln $PBCQ$, har fyrhörningen $PMQN$ arean $T/2$, som således är $\geq \frac{1}{2}$.

Antag nu att PQ är en sida i månghörningen. Den kommer då att sammanfalla med en av rektangelsidorna, låt denna sida vara AD. Något av månghörningens hörn kommer då att ligga på sidan BC. Låt detta hörn vara M. Om rektangeln $ABCD$ har arean T, har triangeln PMQ, dvs triangeln AMD arean $T/2$. Men vi kan bilda en fyrhörning genom att använda ytterligare ett av månghörningens hörn. Pga konvexiteten kommer fyrhörningens area att vara minst lika med triangelns area och vi kan dra samma slutsats som i föregående fall. Vi har därmed visat att det alltid finns en fyrhörning av önskat slag och vars area är minst lika med $\frac{1}{2}$.