SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningsförslag till finaltävlingen den 19 november 2005

1. Vi utvecklar de båda leden och får ekvationen

$$x^3 + xy + x^2y^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

vilken efter förenkling kan skrivas

$$xy(xy - 3x - 3y + 1) = 0.$$

Vi ser att alla heltalspar (x, y) där $x = 0$ och/eller $y = 0$ löser ekvationen. Ytterligare lösningar får vi genom att betrakta ekvationen $xy - 3x - 3y + 1 = 0$. Vänsterledet kan skrivas som $(x - 3)(y - 3) - 8$, vilket ger ekvationen

$$(x - 3)(y - 3) = 8.$$

Eftersom $8 = 1 \cdot 8 = (-1) \cdot (-8) = 2 \cdot 4 = (-2) \cdot (-4)$, kan talparet $(x - 3, y - 3)$ anta värdeparen $(1, 8)$, $(8, 1)$, $(-1, -8)$, $(-8, -1)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(-2, -4)$, $(-4, -2)$. Vi får därför ytterligare åtta lösningar, nämligen de talpar (x, y) som är lika med $(4, 11)$, $(11, 4)$, $(2, -5)$, $(-5, 2)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$.

Svar: Alla heltalspar (x, y) där $x = 0$, $y = 0$ samt paren $(4, 11)$, $(11, 4)$, $(2, -5)$, $(-5, 2)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$

2. Låt oss studera det allmänna problemet med n köande personer, $n \geq 1$. Vi betecknar kunderna med K_1, $K_2, \ldots,$ K_n i den ordning de stod i den ursprungliga kön. Vi söker S_n = antalet möjliga placeringar i den nya kön. För $n = 1$ är bara en placering möjlig; för $n = 2$ har vi två möjligheter, dvs vi har $S_1 = 1$ och $S_2 = 2$.

Låt oss nu anta att $n \geq 3$. I den nya kön kan K_1 antingen ställa sig på plats nr 1 eller plats nr 2. Om K_1 ställer sig först, kan de övriga $n - 1$ kunderna sedan placera sig över platserna $2, 3, \ldots, n$ enligt givna regler, dvs på S_{n-1} olika sätt. Om K_1 ställer sig på andra plats, är det bara K_2 som har rätt att ställa sig främst. De $n - 2$ övriga kunderna K_3, $K_4, \ldots,$ K_n ska därefter fördela sig över platserna $3, 4, \ldots, n$, vilket kan ske på S_{n-2} olika sätt.

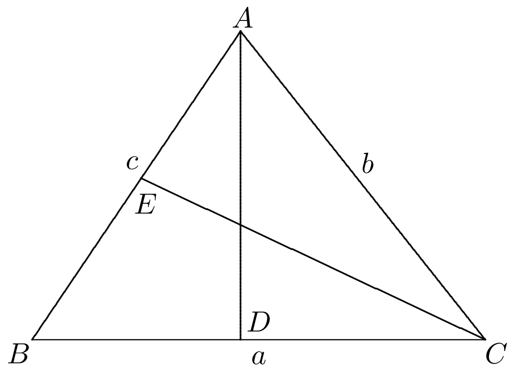
Vi finner således att $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ för $n \geq 3$. I uppgiften gällde det att bestämma S_{12}. Vi använder den funna rekursionsformeln och får i tur och ordning:

$S_3 = S_2 + S_1 = 3$, $S_4 = 3 + 2 = 5$, $S_5 = 8$, $S_6 = 13$, $S_7 = 21$, $S_8 = 34$, $S_9 = 55$, $S_{10} = 89$, $S_{11} = 144$ och slutligen $S_{12} = 233$.

Svar: 233 placeringar

3. Låt triangeln ha sidlängderna a, b och c som figuren visar. Enligt bisektrissatsen gäller att bisektrisen till vinkeln A delar sidan BC så att $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{c}{b}$. Det betyder att sträckan CD har längden $\frac{b}{b+c} \cdot a$. Motsvarande gäller för bisektrisen till vinkeln C.

Den delar sidan AB så att $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{b}{a}$, vilket innebär att sträckan AE har längden $\frac{b}{a+b} \cdot c$.



Vi ska sålunda visa att

$$\frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{a+b} < b,$$

vilket är ekvivalent med att

$$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} < 1,$$

eller

(1)
$$\frac{a^2+ab+bc+c^2}{ab+b^2+ac+bc} < 1.$$

Men enligt cosinussatsen är

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B > a^2 + c^2 - ac,$$

eftersom vinkeln B är $> 60°$ (och $< 180°$), dvs $\cos B < \frac{1}{2}$. Men detta innebär att vänsterledet i (1) ökar om vi i dess nämnare ersätter b^2 med $a^2 + c^2 - ac$, dvs

$$\frac{a^2+ab+bc+c^2}{ab+b^2+ac+bc} < \frac{a^2+ab+bc+c^2}{ab+a^2+c^2+bc},$$

men det senare ledet är ju är lika med 1. Följaktligen måste vänsterledet i (1) vara < 1 och olikheten är visad.

4. Nollställena ligger symmetriskt kring $a + \frac{3d}{2} = m$, säg. Låt

$$g(x) = f(x+m).$$

Då har polynomet g nollställena $-\frac{3d}{2}$, $-\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2}$, $\frac{3d}{2}$, och kan enligt faktorsatsen skrivas

$$g(x) = c(x+\frac{3d}{2})(x+\frac{d}{2})(x-\frac{d}{2})(x-\frac{3d}{2})$$

för något tal $c \neq 0$.
Nu är

$$\begin{aligned} g(-x) &= c(-x+\frac{3d}{2})(-x+\frac{d}{2})(-x-\frac{d}{2})(-x-\frac{3d}{2}) \\ &= c(x-\frac{3d}{2})(x-\frac{d}{2})(x+\frac{d}{2})(x+\frac{3d}{2}) = g(x), \end{aligned}$$

dvs g är en jämn funktion. Då följer att dess derivata, g', är en udda funktion. Eftersom g' är ett tredjegradspolynom, är dess nollställen därför $-b$, 0, b, för något tal b. Men då $f'(x) = g'(x-m)$, följer att nollställena till f' också bildar en aritmetisk följd.

Låt oss som tillägg ta reda på hur nollställena till f' förhåller sig till nollställena till f. Vi multiplicerar faktorerna i $g(x)$ och får enligt konjugatregeln

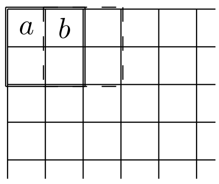
$$g(x) = c(x^2 - (\tfrac{d}{2})^2)(x^2 - (\tfrac{3d}{2})^2) = c(x^4 - \frac{5d^2}{2}x^2 + \frac{9d^4}{16}).$$

Polynomets derivata är

$$g'(x) = c(4x^3 - 2\frac{5d^2}{2}x) = 4cx(x - \frac{\sqrt{5}d}{2})(x + \frac{\sqrt{5}d}{2}),$$

vilket betyder att rötterna till g' är $-\frac{\sqrt{5}d}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{5}d}{2}$, medan rötterna till f' är $m - \frac{\sqrt{5}d}{2}$, m, $m + \frac{\sqrt{5}d}{2}$.

5. Låt oss i rutnätet betrakta alla möjliga delkvadrater bestående av fyra rutor.



Vi noterar då att varje hörnruta ingår i exakt en delkvadrat (i figuren ingår ruta a i den heldragna kvadraten), varje kantruta som inte är en hörnruta ingår i exakt två delkvadrater (ruta b ingår i såväl den heldragna som i den streckade kvadraten), och varje inre ruta, dvs som inte ligger längs en kant, ingår i exakt fyra delkvadrater. Rutorna i figuren nedan är markerade med antalet delkvadrater som de ingår i. Vi har totalt $M = 2004^2$ olika delkvadrater, dvs M är ett jämnt tal.

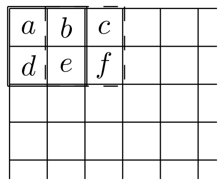
1	2	2	2	2		
2	4	4	4			
2	4	4	4			
2	4	4				

Låt oss nu räkna antalet svarta rutor i var och en av de M delkvadraterna. Svarta inre rutor blir därvid räknade 4 gånger, svarta kantrutor blir räknade 2 gånger och svarta hörnrutor blir räknade 1 gång. Eftersom varje delkvadrat innehåller ett udda antal svarta rutor, samtidigt som M är ett jämnt tal, måste totala antalet räknade svarta rutor vara jämnt.

Låt nu H vara antalet svarta hörnrutor, K antalet svarta kantrutor och I antalet svarta inre rutor. Totala antalet räknade svarta rutor är då $H + 2K + 4I$. Men eftersom $2K + 4I$ är ett jämnt tal, följer att H måste vara ett jämnt tal. Det måste alltså finnas ett jämnt antal svarta hörnrutor.

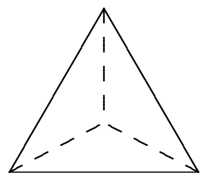
För beräkning av antalet möjliga färgläggningar inser vi att mönstret entydigt bestäms av hur rutorna i den första raden och den första kolumnen är målade. Om exempelvis två av rutorna a, b och d i figuren nedan är svarta, följer att rutan e måste vara svart, eftersom antalet svarta i den heldragna delkvadraten ska vara ett udda tal. Om alla tre rutorna är svarta följer av samma skäl att rutan e måste vara vit. Färgfördelningen i den heldragna delkvadraten är alltså entydigt bestämd av färgerna hos rutorna a, b och d. Vi kan fortsätta resonemanget på samma sätt med den streckade delkvadraten och konstatera att färgen i ruta f är entydigt bestämd av färgerna hos rutorna b, c och e. Vi inser att färgen på var och en av rutorna i den andra raden kan bestämmas stegvis från vänster till höger. Om vi fortsätter på detta sätt rad för rad kommer samtliga rutor ha färgbestämts entydigt av målningen i rad 1 och kolumn 1.

Hur vi än färgsätter den första raden och den första kolumnen är det alltid möjligt att ordna så att varje delkvadrat i rutnätet innehåller ett udda antal svarta rutor. Då varje ruta kan målas på två sätt och då sammanlagda antalet rutor i den första raden och den första kolumnen är $2 \cdot 2005 - 1 = 4009$, finns det följaktligen 2^{4009} sätt att färglägga rutnätet.

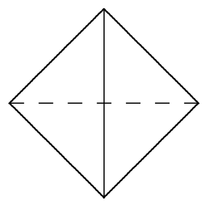


Svar: Rutnätet kan målas på 2^{4009} sätt.

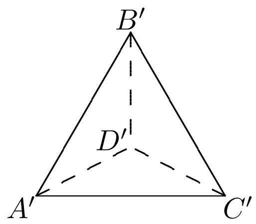
6. Låt oss först bestämma den största möjliga arean. Vi inser att bilden av tetradedern antingen är en triangel eller en fyrhörning. När bilden är en triangel, måste denna vara en projektion av en av tetraederns sidor. Den maximala arean av bilden är lika med arean av tetraederns sida, eller $\sqrt{3}/4$ (höjden mot varje triangelsida är $\sqrt{3}/2$).



Om bilden är en fyrhörning är fyrhörningens diagonaler projektioner av två av tetraederns kanter. Varje diagonal kan därför maximalt ha högst längden 1, vilket gör att fyrhörningens area är högst lika med 1/2. Denna area antas om och endast om båda diagonalerna har längden 1 och bildar rät vinkel med varandra. Men detta kan åstadkommas om vi låter de aktuella kanterna hos tetraedern vara parallella med projektionsplanet. Vi får då en area som är större än den maximala triangelarean, nämligen 1/2.



Låt oss nu bestämma den minsta möjliga arean. Låt hörnen i tetraedern vara A, B, C, D och antag att deras projektioner i planet är resp A', B', C', D'.



I figuren är punkten D' en inre punkt i triangeln $A'B'C'$, men den kan eventuellt sammanfalla med något av triangelhörnen eller ligga på någon av triangelsidorna. Låt linjesegmentet PQ vara den inversa bilden av D'. Det innebär att om P utgör hörnet D i tetraedern så är Q den punkt på tetraedersidan ABC som är sådan att varje punkt på PQ projiceras i D'.

Tetraedern $ABCD$ kan då delas upp i tre deltetraedrar, $PQAB$, $PQAC$ och $PQBC$. Volymen av $PQAB$ har samma volym som en tetraeder med basytan $A'B'D'$ och höjden PQ.

Motsvarande gäller för de båda övriga deltetraedrarna, dvs volymen av tetraedern $ABCD$ är lika med volymen hos en tetraeder med basytan $A'B'C'$ och höjden PQ. Eftersom $|PQ| \leq 1$ (avståndet mellan två punkter på tetraederns yta kan högst vara en kantlängd) och då tetraederns volym är given, blir arean av bilden som minst när $|PQ|$ är som störst. Detta inträffar när PQ sammanfaller med en av kanterna, t ex när punkten D' sammanfaller med A'. Linjesegmentet PQ sammanfaller då med kanten DA som är ortogonal mot projektionsplanet. Volymen av en regelbunden tetraeder med kantlängden a är $\frac{b \cdot h}{3} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$, där b är basytans area och h höjden mot densamma. Med kantlängden 1 blir b, dvs den minimala bildarean, lika med $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Resonemanget när bilden är en fyrhörning är likartat. Vi betecknar diagonalernas skärningspunkt med P' och låter linjesegmentet PQ vara den inversa bilden av P'. Här ligger P och Q på var sin kant. Tetraedern $ABCD$ kan denna gång delas upp i fyra deltetraedrar, $PQAB$, $PQBC$, $PQCD$ och $PQDA$. Den förstnämnda har samma volym som en pyramid med basytan $A'B'C'D'$ och höjden PQ. Det gäller att $|PQ| \leq 1$ med likhet om och endast om PQ sammanfaller med en av kanterna, vilket innebär att den projicerade fyrhörningen övergår i en triangel. Vi har därmed kommit tillbaka till föregående fall.

Svar: Största möjliga area är $1/2$, minsta möjliga area är $\sqrt{2}/4$.