SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 21 november 2009

1. Till en kvadratisk sal med sidan 6 m har man anskaffat fem kvadratiska mattor, två med sidan 2 m, en med sidan 2,1 m och två med sidan 2,5 m. Är det möjligt att placera ut de fem mattorna så att de inte på något ställe överlappar varandra? Mattornas kanter behöver inte vara parallella med salens väggar.

2. Finn alla reella lösningar till ekvationen
$$(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5) = 8x^5.$$

3. En urna innehåller ett antal gula och gröna kulor. Man drar två kulor ur urnan (utan att lägga tillbaka dem) och beräknar sannolikheten för att båda kulorna är gröna. Kan man välja antalet gula och gröna kulor så att denna sannolikhet är 1/4?

4. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $x + x^3 = 5y^2$.

5. En halvcirkelbåge och en diameter AB med längden 2 är given. Låt O vara diameterns mittpunkt. På radien vinkelrät mot diametern väljer vi en punkt P på avståndet d från diameterns mittpunkt O, $0 < d < 1$. En linje genom A och P skär halvcirkeln i punkten C. Genom punkten P drar vi ytterligare en linje vinkelrätt mot AC. Den skär halvcirkeln i punkten D. Genom punkten C drar vi så en linje, l_1, parallell med PD och därefter en linje, l_2, genom D parallell med PC. Linjerna l_1 och l_2 skär varandra i punkten E. Visa att avståndet mellan O och E är lika med $\sqrt{2-d^2}$.

6. På ett bord ligger 289 enkronorsmynt och bildar ett kvadratiskt 17×17 -mönster. Alla mynten är vända med krona upp. Vid ett drag får man vända på fem mynt som ligger i rad: lodrätt, vågrätt eller diagonalt. Är det möjligt att efter ett antal sådana drag få alla mynten vända med klave upp?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!